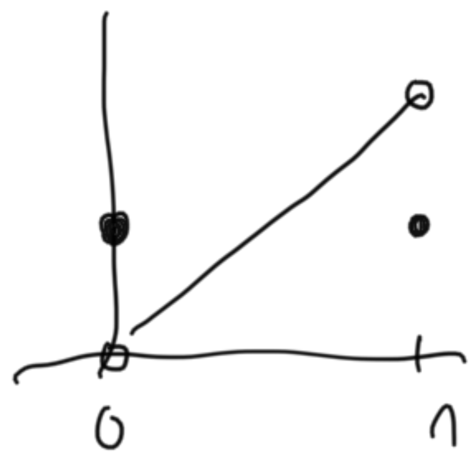
$f(x)=\frac{1}{x}$ na $(0,1)$

f spojitá, nenabývá na $(0,1)$ ani max ani min

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{2}, & x\in\{0,1\}\end{cases}$$



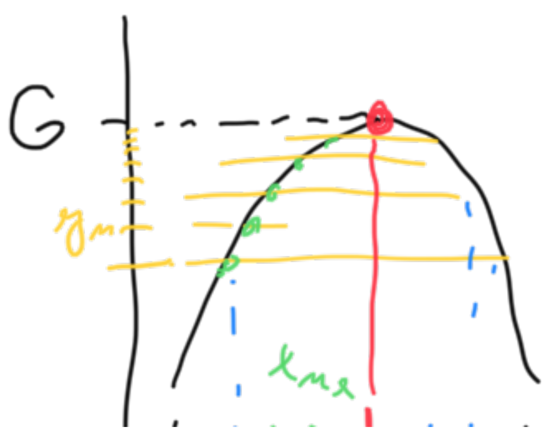
f není spojitá na $\langle 0,1\rangle$

nenabývá max ani min na $\langle 0,1\rangle$

<u>Důkaz</u>: existence bodu maxima:

Položme $G=\sup f(\langle a,b\rangle)=\sup\{f(x);\ x\in\langle a,b\rangle\}$.

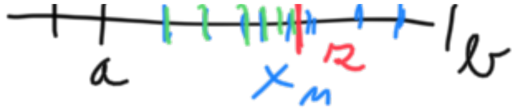
(Zatím nevíme, jestli $G\in\mathbb{R}$ nebo $G=+\infty$.)



L16 $\Rightarrow$ $\exists\, y_n\in f(\langle a,b\rangle)$: $\lim y_n = G$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n\in\langle a,b\rangle$: $f(x_n)=y_n$.

V18 (Bolzano-Weierstraß) $\Rightarrow$



∃ podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, která má limitu $r \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \begin{array}{c} a \le x_n \le b \\ \downarrow \\ r \end{array} \quad \underset{V13}{\Longrightarrow} \quad a \le r \le b$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = r \quad \overset{V28}{\underset{HEINE}{\Longrightarrow}} \quad \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(r)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = G$$

$\{y_{n_k}\}$ je vybraná z $\{y_n\}$ $\xrightarrow{V10}$ G

Tedy bod r je bodem maxima f na $\langle a,b\rangle$.

Bod minima
- analogicky
- vezmeme fci $g = -f$, dle předchozího

∃ $u \in \langle a,b\rangle$, g má max v u

Pak f má min. v u:

$$\forall x \in \langle a,b\rangle: \quad g(x) \le g(u)$$

$\Rightarrow f(x) = -g(x) \geq -g(u) = f(u)$ $\square$

---

f spojitá na intervalu I, ryze monotónní $\Rightarrow$ f je prostá na I

$\Rightarrow f(I) = J$ je interval $\qquad f: I \xrightarrow{\text{na}} J$

zobrazení $f^{-1}: J \xrightarrow{\text{na}} I$ ... je to funkce

nazýváme ji inverzní funkce

Důsl. 32: V31 $\exists u, v \in \langle a,b \rangle$: u bod maxima f na $\langle a,b \rangle$
v bod minima — " —

$\forall x \in \langle a,b \rangle: f(v) \leq f(x) \leq f(u) \Rightarrow f$ je na $\langle a,b \rangle$ omezená

Důkaz: Nechť f je rostoucí.

f zobrazuje J na $f(J)$, což je interval (V30)

f^{-1} rostoucí: nechť $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$

Chci: $f(y_1) < f(y_2)$

Kdyby ne: $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, tedy

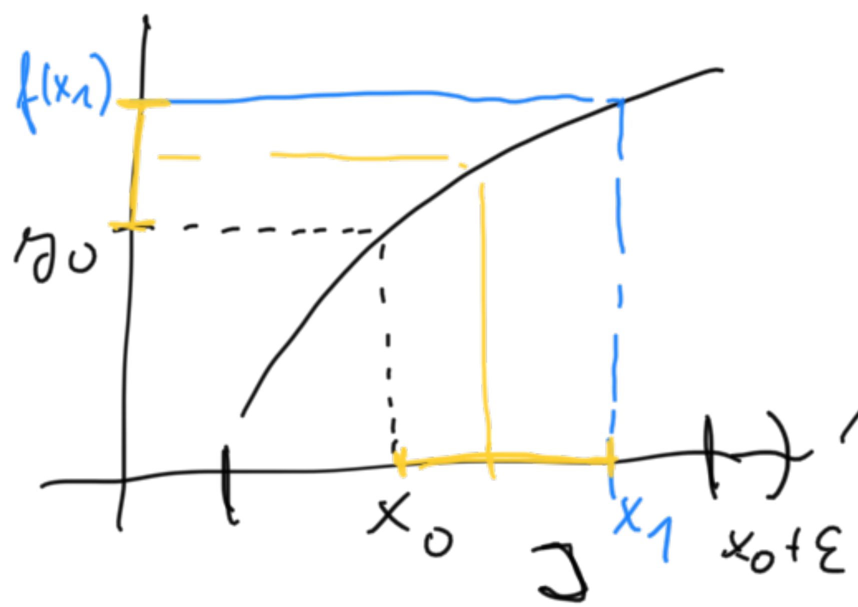
$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \quad (f \text{ je rostoucí})$$

$$\overset{\|}{y_1} \geq \overset{\|}{y_2} \quad \text{spor}$$

spojitost:

Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod $f(J)$.

Ukážeme, že f^{-1} je spojitá v y_0 zprava.



Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$ (tj. $f(x_0) = y_0$)

Pak x_0 není pravý koncový bod J

(f je rostoucí).

Nechť $\varepsilon > 0$. $\exists x_1 \in J : x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

$x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0) = y_0$ (f rostoucí)

Stačí vzít $\delta = f(x_1) - y_0 > 0$.

Pak $B^+(y_0, \delta) = \langle y_0, y_0 + \delta) = \langle y_0, f(x_1)) = \langle f(x_0), f(x_1))$

f^{-1} je rostoucí $\Rightarrow \forall y \in B^+(y_0,\delta)$, tj. $f(x_0) \le y < f(x_1)$:

$$x_0 = f^{-1}(f(x_0)) \le f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_0+\varepsilon,$$

tedy $f^{-1}(y) \in B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$

Takže f^{-1} je spojitá v y_0 zprava.

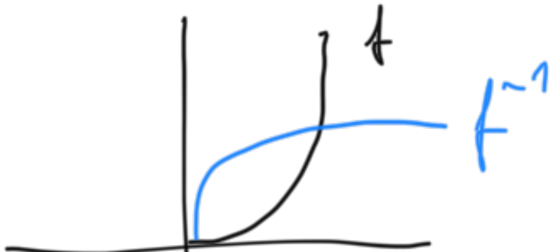
$\square$

Důk. V6 (o n-té odmocnině):

Nechť $n \in \mathbb{N}$. $\quad f(x) = x^n$ spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f \text{ je rostoucí na } \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \dots\ n \text{ sudé} \\ \mathbb{R} & \dots\ n \text{ liché} \end{cases}$$

$$V33 \Rightarrow f^{-1} \text{ je spojitá rostoucí na } \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \dots\ n \text{ sudé} \\ \mathbb{R} & \dots\ n \text{ liché} \end{cases}$$



pro $x \in \langle 0, +\infty)$

položme $y = f^{-1}(x)$, pak

$$y^n = f(y) = f(f^{-1}(x)) = x, \text{ tj.}$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \text{ neboli } f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Navíc $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ je spojitá na svém def. oboru
(tj. $\langle 0, +\infty)$ pro n sudé,
$\mathbb{R}$ pro n liché).

Elementární funkce: polynomy, log, exp, obecná mocnina,
goniometrické, cyklometrické

• $\log 1 = \log(1 \cdot 1) \overset{(L3)}{=} \log 1 + \log 1 \quad / -\log 1$

$$0 = \log 1$$

• $\frac{1}{x} \cdot x = 1$

$$0 = \log 1 = \log\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \overset{(L3)}{=} \log \frac{1}{x} + \log x$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

• $\underline{n=0}$ $\quad \log x^n = \log x^0 = \log 1 = 0 = 0\cdot \log x$

$\underline{n\in\mathbb{N}}$: indukcí $\quad n=1$ zřejmé

$n \to n+1$: $\quad \log x^{n+1} = \log(x\cdot x^n) \overset{(23)}{=} \log x + \log x^n =$

$$\overset{\text{ind. předp.}}{=} \log x + n\cdot \log x = (n+1)\cdot \log x$$

$\underline{n\in\mathbb{Z}, n<0}$ $\quad \log x^n = \log \dfrac{1}{x^{-n}} = -\log\big(\underbrace{x^{-n}}_{-n\in\mathbb{N}}\big) = -(-n)\log x =$

$$= n\cdot \log x$$