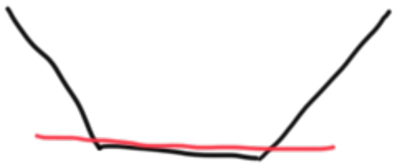


konvexní

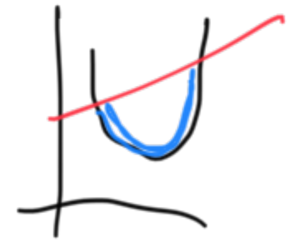
ryze konvexní

konkávní

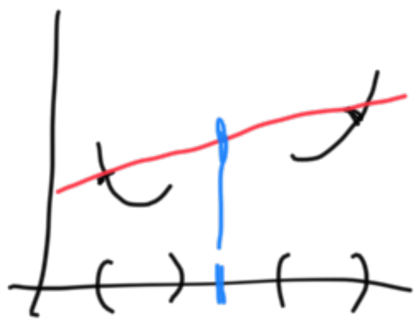
ryze konkávní

f je konvexní:

„graf f leží pod sečnou"



<u>Pozn.:</u> • Definici konvexity je třeba aplikovat na intervalu!

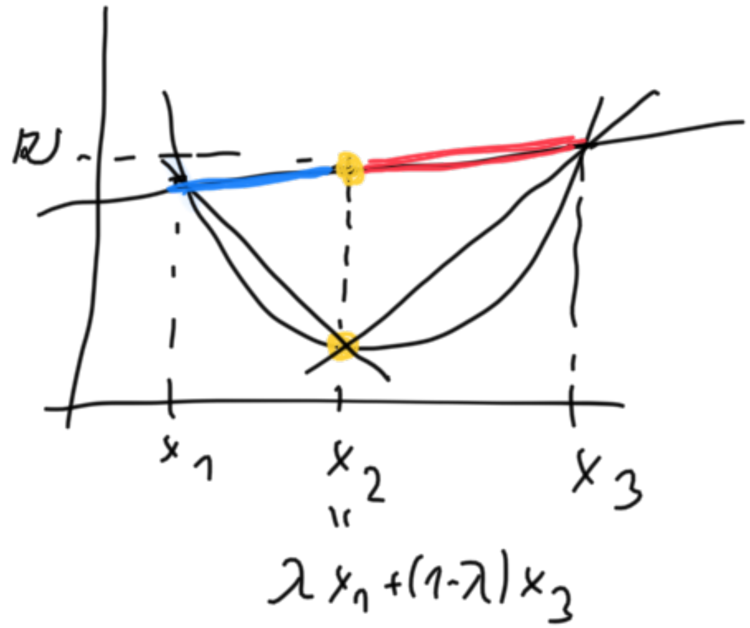


• f je konvexní na $I \Leftrightarrow -f$ je konkávní na I

ryze — " — ryze — " —

<u>Důkaz:</u> „$\Rightarrow$" Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$.

Položme $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Pak $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3$.



Označme $R = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$.

f je konvexní $\Rightarrow R \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3) = f(x_2)$

Tedy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \underbrace{\frac{R - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\substack{\text{směrnice} \\ \text{přímky procház.} \\ [x_1, f(x_1)] \text{ a } [x_2, R]}} = \underbrace{\frac{f(x_3) - R}{x_3 - x_2}}_{\substack{\text{směrnice} \\ \text{přímky procházející} \\ [x_2, R] \text{ a } [x_3, f(x_3)]}} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

„$\Leftarrow$"

Zvolme $x_1, x_3 \in I$, $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$,

Položme $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3$, $R = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$

<u>CHCI</u> $f(x_2) \leq R$

Sporem: kdyby $f(x_2) > R$, pak

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\cdots} > \frac{R - f(x_1)}{\cdots} = \frac{f(x_3) - R}{\cdots} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{\cdots}$$

$x_2 - x_1 \qquad x_2 - x_1 \qquad x_3 - x_2 \qquad \overline{\quad x_3 - x_2 \quad}$

spor $\square$

f

$\forall x \in A: \ \exists f'(x) \in \mathbb{R}^*$

$f': A \to \mathbb{R}^*$

$x \mapsto f'(x)$

$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R};\ \exists f'(x)$ vlastní nebo nevlastní$\}$

Je-li f' na $D_{f'}$ vlastní, pak je to funkce, tj. zobrazení do $\mathbb{R}$.

$g = f'$ funkce, můžu zkoušet derivovat g

Pozn.: • n-tá derivace je def. pomocí mat. indukce

• značení $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}$

$f^{(2)}, f^{(3)}$

derivace, první derivace

Př.: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'''(x) = e^x$ ...

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

$f^{(5)}(x) = \cos x$

$\vdots$

<u>Důkaz</u>: Dokážeme (iii).

f'' je vlastní na $(a,b) \overset{V36}{\Longrightarrow} f'$ je spojitá na $(a,b) \Rightarrow f'$ je vlastní na (a,b)

$\text{"}(f')'\text{"}$ $\overset{V36}{\Longrightarrow} f$ je spojitá na (a,b)

<u>V43</u>: f' je neklesající na (a,b)

Použijeme L46: Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 < x_3$ libovolné.

Fce f splňuje na $\langle x_1, x_2 \rangle$ předp. Lagr. věty, tedy

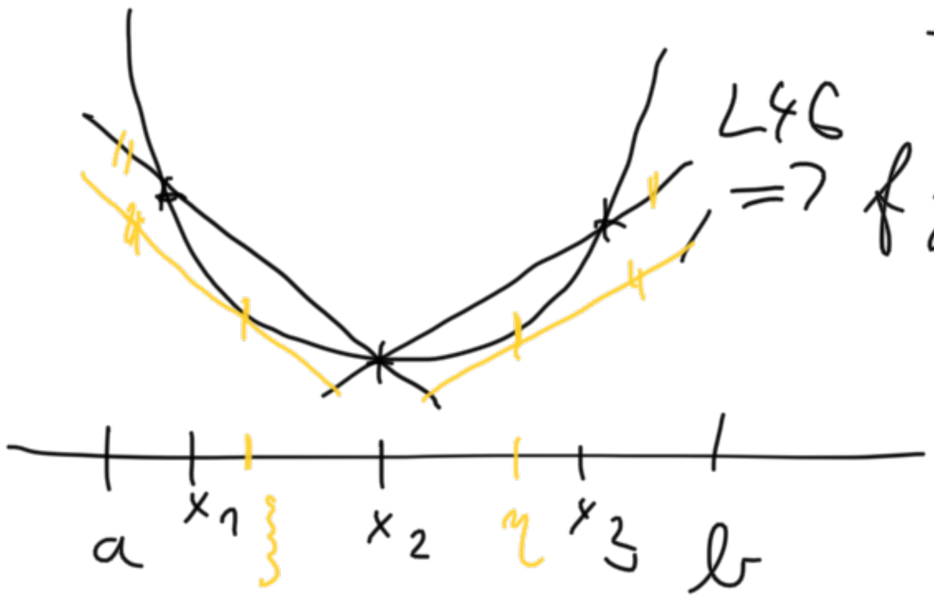
$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2):\ f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Podobně f splňuje na $\langle x_2, x_3\rangle$ předp. Lagr. věty, tedy

$$\exists\, \eta \in (x_2, x_3):\ f'(\eta) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Protože $\xi < \eta$, je $f'(\xi) \leq f'(\eta) \Rightarrow$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$



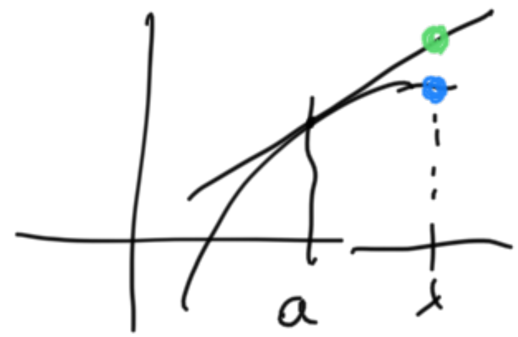
L46
$\Rightarrow f$ je konvexní

Př.: $\quad \log'' x = \left((\log x)'\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,\ x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow \log$ je ryze konkávní na $(0, +\infty)$

$\exp'' x = \exp x > 0, \ x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ exp je ryze konvexní na $\mathbb{R}$

$f(x) < T_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$



Sporem.

Důkaz: Předpokládejme, že $f''(a)$ existuje a $f''(a) \neq 0$.

Nechť $f''(a) > 0$. Pak $f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0$

$\overset{V23}{\Rightarrow} \exists \Delta > 0 : \forall x \in P(a, \Delta) : \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0.$

$\Rightarrow \forall x \in (a-\Delta, a) : f'(x) < f'(a)$

$\forall x \in (a, a+\Delta) : f'(x) > f'(a)$

Je-li nyní $y \in (a, a+\Delta)$ libovolné, pak f splňuje na $\langle a, y \rangle$

předp. Lagr. věty (f' na $(a-\Delta, a+\Delta)$ $\exists$ vlastní

$\Rightarrow f$ je tam spojitá)

V36

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a, y): \; f'(\xi) = \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$

$\xi \in (a, a+\Delta) \Rightarrow f'(\xi) > f'(a)$ $\quad / \cdot (y-a) > 0$

$\Rightarrow f(y) > f(a) + f'(a)\cdot(y-a) = T_a(y)$

$\Rightarrow [y, f(y)]$ leží nad tečnou T_a.

pro $y \in (a-\Delta, a)$

Podobně z Lagr. věty na $\langle y, a \rangle$:

$\exists\, \eta \in (y, a): \; f'(\eta) = \dfrac{f(a) - f(y)}{a - y}$ $\quad / \cdot (a-y) > 0$

$f'(\eta) < f'(a)$

$f'(a)(a-y) > f(a) - f(y)$

$f(y) > f(a) + f'(a)(y-a)$

$\Rightarrow [y, f(y)]$ leží taky nad tečnou T_a.

To je spor s tím, že a je inflexní bod

Je-li $f''(a) < 0$, pak spor dostaneme analogicky. $\square$