1. Diferenční rovnice

Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami):

1. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0;$
2. $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0, \quad y(1) = y(2) = 1;$
3. $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0;$
4. $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0, \quad y(1) = 2,\, y(2) = 1;$
5. $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0;$
6. $y(n+3) + y(n+2) + 9y(n+1) + 9y(n) = 0, \quad y(1) = -1,\, y(2) = 1,\, y(3) = -1;$
7. $y(n+4) + 8y(n+2) + 16y(n) = 0, \quad y(1) = 0,\, y(2) = -8,\, y(3) = 0,\, y(4) = 64;$
8. $y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = 0, \quad y(1) = 1,\, y(2) = 0,\, y(3) = 0;$
9. $y(n+4) + 3y(n+3) + 3y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 0, \quad y(1) = 10,\, y(2) = -10,\, y(3) = 0,\, y(4) = 0;$
10. $y(n+4) - 81y(n) = 0, \quad y(1) = 3,\, y(2) = 9,\, y(3) = 27,\, y(4) = 81;$

11. $y(n+2) - y(n) = n;$
12. $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos\frac{\pi}{2}n;$
13. $y(n+3) - y(n+2) + 2y(n) = n2^n;$
14. $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n;$
15. $8y(n+3) + y(n) = 3n + \frac{1}{2^n};$
16. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2, \quad y(1) = 3,\, y(2) = 2;$
17. $y(n+2) - y(n) = 17, \quad y(1) = y(2) = 0;$
18. $y(n+4) - y(n) = \sin\frac{\pi}{4}n;$
19. $y(n+4) + y(n) = \sin\frac{\pi}{4}n;$
20. $y(n+2) - y(n+1) + y(n) = \sin\frac{\pi}{3}n.$

Výsledky:

1. $a + b2^n, \quad a, b \in \mathbb{R},$ 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$ 3. $a(-2)^n + bn(-2)^n, \quad a, b \in \mathbb{R},$ 4. $-\frac{5}{4}\cdot(-1)^n + \frac{1}{4}\cdot 3^n,$ 5. $a(\sqrt{3})^n \cos\frac{\pi}{2}n + b(\sqrt{3})^n \sin\frac{\pi}{2}n + cn(\sqrt{3})^n \cos\frac{\pi}{2}n + dn(\sqrt{3})^n \sin\frac{\pi}{2}n, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$ 6. $(-1)^n,$ 7. $n2^n \cos\frac{\pi}{2}n,$ 8. $\frac{27}{30} + \frac{1}{10}\cdot 3^n \cos\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{30}\cdot 3^n \sin\frac{\pi}{2}n,$ 9. $5\cos\frac{\pi}{2}n + 5\sin\frac{\pi}{2}n - 5(-1)^n,$ 10. 3^n (lze uhádnout a dokázat), 11. $-\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n^2 + a + b(-1)^n,$ 12. $\frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{2}n - \frac{2}{5}\sin\frac{\pi}{2}n + a(\sqrt{2})^n \cos\frac{\pi}{4}n + b(\sqrt{2})^n \sin\frac{\pi}{4}n, \quad a, b \in \mathbb{R},$ 13. $-\frac{4}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{6}n2^n + a(-1)^n + b(\sqrt{2})^n \cos\frac{\pi}{4}n + c(\sqrt{2})^n \sin\frac{\pi}{4}n, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$ 14. $-\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\cdot 2^n + a + b(\sqrt{2})^n + c(-\sqrt{2})^n, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$ 15. $\frac{1}{3}n - \frac{8}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + a\left(-\frac{1}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi}{3}n + c\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{\pi}{3}n, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$
16. $-\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n + 1 + \frac{5}{2}\cdot 2^n,$ 17. $\frac{17}{2}n - \frac{51}{4} - \frac{17}{4}(-1)^n,$ 18. $-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}n + a + b(-1)^n + c\cos\frac{\pi}{2}n + d\sin\frac{\pi}{2}n, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$ 19. $-\frac{1}{4}n\sin\frac{\pi}{4}n + a\cos\frac{\pi}{4}n + b\sin\frac{\pi}{4}n + c\cos\frac{3\pi}{4}n + d\sin\frac{3\pi}{4}n, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$
20. $-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\frac{\pi}{3}n + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}n\right)n + a\cos\frac{\pi}{3}n + b\sin\frac{\pi}{3}n, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

2. Konvergence integrálů

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$):

$$1.\ \int_1^{+\infty} \frac{x^{17}+36}{x^{18}+51x^7+5}\,\mathrm{d}x,\quad 2.\ \int_1^{+\infty} x^{20}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad 3.\ \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad 4.\ \int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x,\quad 5.\ \int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$6.\ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad 7.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x,\quad 8.\ \int_0^{\pi} \sin^\alpha x\,\mathrm{d}x,\quad 9.\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x,\quad 10.\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x,$$

$$11.\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\log x},\quad 12.\ \int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x,\quad 13.\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad 14.\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad 15.\ \int_7^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$16.\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x,\quad 17.\ \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,\mathrm{d}x,\quad 18.\ \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\quad 19.\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}\,\mathrm{d}x,$$

$$20.\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x,\quad 21.\ \int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x,\quad 22.\ \int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\quad 23.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$24.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x\,\mathrm{d}x,\quad 25.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x(1-\cos x)^\gamma\,\mathrm{d}x,\quad 26.\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,\mathrm{d}x,\quad 27.\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x,$$

$$28.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\cdot\log\cos x\,\mathrm{d}x,\quad 29.\ \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Návody: 4. výpočet 5. rozdíl integrálů 14. růstová škála 19. pro $\alpha = 1$ substituce 21. $\log\frac{1}{y} = -\log y$ 22. Taylor 23. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} x}{x^\alpha}$ spočteme substitucí $x = \operatorname{cotg} y$ 29. $\lim_{x\to1-}\frac{\arccos x}{(1-x)^\beta}$ spočteme substitucí $x = \cos y$

Výsledky: 1. D 2. K 3. K 4. K 5. D 6. D 7. K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ 8. K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ 9. D 10. K $\Leftrightarrow \alpha < -1 < \alpha + \beta$ 11. D 12. K 13. K 14. K 15. K 16. K 17. K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ 18. K $\Leftrightarrow \alpha > -1$ 19. K $\Leftrightarrow \alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$ 20. K $\Leftrightarrow -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ 21. K $\Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$ 22. K $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$ 23. K 24. K $\Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ 25. K $\Leftrightarrow \beta > -1, \alpha + 2\gamma > -1$ 26. K $\Leftrightarrow \max\{\alpha,\beta\} > 1, \min\{\alpha,\beta\} < 1$ 27. K $\Leftrightarrow 0 < \alpha + 1 < \beta$ 28. K $\Leftrightarrow -3 < \alpha < 1$ 29. K $\Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$

3. Kvalitativní analýza autonomních rovnic

Popište průběh a načrtněte graf maximálních řešení rovnice:

1. $y' = y^2$,
2. $y' = y^2 + 1$,
3. $y' = \sin y$,
4. $y' = y^2 - 1$,
5. $y' = \sqrt{1 - y^2}$,
6. $y' = |y|$,
7. $y' = (y + 1)\sqrt{1 - y}$,
8. $y' = \frac{\sin y}{y}$.

Další viz úlohy O. Kalendy.

Výsledky:

1. Stacionární řešení $y = 0$. Řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(0, +\infty)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$.
2. Řešení jsou rostoucí a jsou definována na omezených intervalech.
3. Stacionární řešení $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešení s hodnotami v $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ jsou rostoucí a jsou definována na $\mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ jsou klesající a jsou definována na $\mathbb{R}$.
4. Stacionární řešení $y = \pm 1$. Řešení s hodnotami v $(-\infty, -1)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(-1, 1)$ jsou klesající a jsou definována na $\mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(1, +\infty)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$.
5. Stacionární řešení $y = \pm 1$. Řešení s hodnotami v $(-1, 1)$ jsou rostoucí a jsou definována na omezených intervalech. Lze lepit.
6. Stacionární řešení $y = 0$. Řešení s hodnotami v $(-\infty, 0)$ jsou rostoucí a jsou definována na $\mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(0, +\infty)$ jsou rostoucí a jsou definována na $\mathbb{R}$.
7. Stacionární řešení $y = \pm 1$. Řešení s hodnotami v $(-\infty, -1)$ jsou klesající a jsou definována na $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(-1, 1)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$; lze lepit na $y = 1$.
8. Stacionární řešení $y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Řešení s hodnotami v $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, $k \geq 1$ a $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$, $k \leq -2$ jsou rostoucí a jsou definována na $\mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$, $k \geq 0$ a $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, $k \leq -1$ jsou klesající a jsou definována na $\mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(0, \pi)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Řešení s hodnotami v $(-\pi, 0)$ jsou rostoucí a jsou definována na $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$.

4. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Najděte všechna řešení diferenciálních rovnic:

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$,
2. $y'' - 3y' + 2y = 0$,
3. $y'' - 6y' + 13y = 0$,
4. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$;

5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$,
6. $y'' - 2y' + 5y = \cos x$,
7. $7y'' - y' = 14x$,
8. $y''' + y'' = x$,
9. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$,
10. $y'' + y = 4x\cos x$,
11. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$,
12. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$,
13. $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$;

14. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x+1}$,
16. $y'' + y = \operatorname{tg} x$,
17. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$,
18. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

Výsledky:

1. $ae^{-2x} + bxe^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 2. $ae^x + be^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 3. $e^{3x}(a\cos 2x + b\sin 2x)$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 4. $a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x + cx\cos\sqrt{3}x + dx\sin\sqrt{3}x$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 5. $\frac{1}{5}e^{4x} + ae^{-x} + be^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 6. $\frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + e^x(a\cos 2x + b\sin 2x)$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 7. $-7x^2 - 98x + a + be^{\frac{x}{7}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 8. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 9. $-e^{-3x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) + a + be^{-3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 10. $x^2\sin x + x\cos x + a\cos x + b\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 11. $\frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 12. $-\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ae^{-x} + be^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 13. $\frac{3}{5}e^x - x\sin\frac{x}{2} + a + b\cos\frac{x}{2} + c\sin\frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 14. $(e^x + e^{-x})\operatorname{arctg} e^x + ae^x + be^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 15. $e^x\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log(x^2 + x + 1) + a + bx\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 16. $-\cos x \log\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + a\cos x + b\sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, 17. $e^x\left(\sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2} + a + bx\right)$, $x \in (-2, 2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, 18. $e^x\arccos e^x + e^{2x}\left(x - \log\left(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}\right)\right) + ae^x + be^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$.