1. Primitivní funkce

1. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $x^3+2x+\dfrac{17}{x}$, b) $18e^x+16e^{8x}-\dfrac{1}{x}+3\cos x$, c) $\sqrt{x}+\sin(2x)$, d) $\cos(3x)+e^{2x}$, e) $(x+5)^3$,

f) $\sin(2x+7)$, g) $\dfrac{1}{\cos^2(3-2x)}$, h) $\dfrac{1}{2x-1}$, i) $\sqrt[3]{1-3x}$, j) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, k) $\dfrac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$, m) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

n) $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$, o) $\dfrac{1}{2+3x^2}$, p) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$, q) $\sqrt{x^6}$, r) $\dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$, s) $\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}$, t) $\operatorname{tg}^2 x$, u) $\operatorname{cotg}^2 x$,

v) $|\cos x|$, w) $\sqrt{1-\sin 2x}$, x) $\sin^2 x$, y) $\cos^4 x$, z) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

2. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^{-x^2}, b) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, e) $\dfrac{x^2}{\cos^2(x^3)}$, f) $\dfrac{x}{1+4x^2}$, g) $\dfrac{x}{1+x^4}$, h) $\dfrac{1}{x\log x}$, i) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$,

j) $\dfrac{\sin\log x}{x}$, k) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$, l) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, m) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+9}$, n) $\dfrac{x^2}{x+1}$, o) $\dfrac{x^3}{x^8+2}$, p) $\sin^3 x$, q) $\dfrac{1}{x\log x\log\log x}$,

r) $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$, s) $\dfrac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$, t) $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$, u) $\operatorname{tg}^5 x$, v) $\dfrac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$, w) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}}$

3. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^x, b) $\dfrac{x}{e^x}$, c) $\log x$, d) $x\log x$, e) x^2e^{-2x}, f) $\dfrac{\cos x}{e^x}$, g) $e^{3x+1}\sin x$, h) $\log^2 x$, i) $x^a\log x$, j) $e^{ax}\sin bx$,

k) $\operatorname{arctg} x$, l) $\arcsin x$, m) $e^{\sqrt{x}}$, n) $\log\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$, o) $x^5e^{x^3}$, p) $x\sin^2 x$, q) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, r) $\sin\log x$,

s) $xe^x\sin x$, t) $\sqrt{1-x^2}$, u)* $\dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\dfrac{x+1}{x^2+4}$, b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, c) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}$, d) $\dfrac{1}{3x^2-2x-1}$, e) $\dfrac{x}{x^2-x+2}$, f) $\dfrac{x^5}{x^2+x-2}$, g) $\dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+1)}$,

h) $\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, i) $\dfrac{x}{x^4-2x^2-1}$, j) $\dfrac{x^{17}-5}{x-1}$, k) $\dfrac{x^{17}-5}{x^2-1}$, l) $\dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$, m) $\dfrac{x}{x^3-1}$,

n) $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+2)^2}$, o) $\dfrac{1}{1+x^4}$, p) $\dfrac{x^8+x-1}{x^6+1}$

5. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\dfrac{1}{\sin x}$, b) $\dfrac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$, c) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$, d) $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+\cos x-1}$, e) $\dfrac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$, f) $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$,

g) $\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}$, h) $\dfrac{1}{\cos x\sin^3 x}$, i) $\dfrac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$, j) $\dfrac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, k) $\dfrac{1}{\sin x+\tan x}$, l) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$,

m) $\dfrac{x}{1+\sin(x^2+1)}$, n) $\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+5}$, o) $\dfrac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$, p) $\dfrac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}, a,b>0$,

q) $\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos x}, 0<\varepsilon<1$, r) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, s) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$, t) $\dfrac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, u) $\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

6. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+3}}$, b) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, c) $\dfrac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, e) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$,

f) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$, g) $\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}$, h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$, i) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, j) $\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, k) $\sqrt{x^2-2x}$,

l) $\sqrt{x^2-2x-1}$, m) $\dfrac{1}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$, n) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$, o) $\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$, p) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,

q) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, r) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, s) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$, t) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}$

Návody: 5. a) $\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ b) per partes c) $\int \frac{-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$ e) $6\int \frac{1}{t(1+t+t^2+t^3)}\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{1}{t^3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ j) $-\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{1-t^2}{2t}\,\mathrm{d}t$ l) $-\int \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ m) $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u$, $\int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{1}{3t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{1+t^2}{(2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{1}{a^2t^2+b^2}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{2}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2}\,\mathrm{d}t$ r) $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ s) $\int \frac{4t(t^2-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)}\,\mathrm{d}t$ t) $\int \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ u) $\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

6. a) $\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ b) $\int \frac{2(t^2-t+1)}{(t-2)(2t-1)}\,\mathrm{d}t$ c) $\int 6\frac{t^6-1}{t^4(t+1)}\,\mathrm{d}t$ d) $\int \frac{-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ e) $\int \frac{6t^3(t^6-1)}{(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int 6t^3(t^3-1)(t^2-t+1)\,\mathrm{d}t$ f) $\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t$ g) $\int \frac{6t^5(t^2+t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t$ h) $\int \frac{3t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ i) $\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$ j) $\int \frac{6t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}\,\mathrm{d}t$ k) $\int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-t^2(t+2)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ l) $\int \frac{16t^2}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{-(t^2+2t-1)^2}{4(t+1)^3}\,\mathrm{d}t$ m) $\int \frac{t^2+1}{4(t^4+1)}\,\mathrm{d}t$ n) $\int \frac{2(t^2-1)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t$ o) $\int \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ p) $\int \frac{-4\sqrt{2}t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t$ nebo $\int \frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ q) $\int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ r) lze využít vzorec pro a^2-b^2, kde $a = 1+\sqrt{x}$ a $b = \sqrt{x+1}$ s) $\int \frac{2t(t^2-3t+2)}{(3-2t)(3t-4)}\,\mathrm{d}t$ t) $20\int \frac{t^4}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ b) $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{4}(x+5)^4$ na $\mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{2}\cos(2x+7)$ na $\mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(3-2x)$ na $\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ h) $\frac{1}{2}\log|2x-1|$ na $(-\infty,\frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2},+\infty)$ i) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ na $\mathbb{R}$ j) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ k) $-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$ l) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ na $(-\infty,\frac{2}{5})$ m) $x - \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0,+\infty)$ o) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ q) $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ r) $-\frac{2}{\log 5}5^{-x} + \frac{1}{5\log 2}2^{-x}$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ na $\mathbb{R}$ t) $-x + \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $-x - \operatorname{cotg} x$ na $(0,\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k \sin x + 2k$ pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ w) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}k$ pro $x \in \langle -\frac{3}{4},\frac{1}{4}\pi\rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ x) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ na $\mathbb{R}$ y) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ na $\mathbb{R}$ z) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi,\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ na $\mathbb{R}$ c) $-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d) $\sqrt{x^2+5}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$ na $\left(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right), k \in \mathbb{Z}$ f) $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\log x|$ na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$ i) $\log(x^2+x+1)$ na $\mathbb{R}$ j) $-\cos\log x$ na $(0,+\infty)$ k) $\log(e^x+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$ m) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+9)$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,+\infty)$ o) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}$ na $\mathbb{R}$ p) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ na $\mathbb{R}$ q) $\log|\log\log x|$ na $(1,e)$ a na $(e,+\infty)$ r) $e^x - \log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$ na $(\frac{1}{e},+\infty)$ t) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x$ na $(0,\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $\frac{1}{4}\cos^{-4} x - \cos^{-2} x - \log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ w) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x$ na $\mathbb{R}$

3. a) $e^x(x-1)$ na $\mathbb{R}$ b) $-e^{-x}(1+x)$ na $\mathbb{R}$ c) $x(\log x - 1)$ na $(0,+\infty)$ d) $\frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2})$ na $(0,+\infty)$ e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2})$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{10}e^{3x+1}(3\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ h) $x(\log^2 x - 2\log x + 2)$ na $(0,+\infty)$ i) $\frac{x^{1+a}}{1+a}\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$ na $(0,+\infty)$ pro $a \neq -1$, $\frac{1}{2}\log^2 x$ na $(0,+\infty)$ pro $a = -1$ j) $e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}$ na $\mathbb{R}$ k) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$ m) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$ na $(0,+\infty)$ n) $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x + \sin^2 x)$ na $\mathbb{R}$ q) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}x$ na $(0,+\infty)$ r) $\frac{1}{2}x(\sin\log x - \cos\log x)$ na $(0,+\infty)$ s) $\frac{1}{2}e^x\left(x\sin x + (1-x)\cos x\right)$ na $\mathbb{R}$ t) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$ na $(-1,1)$ u) $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$

4. a) $\frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ na $\mathbb{R}$ b) $x + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ c) $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ d) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$ na $(-\infty,-\frac{1}{3})$, na $(-\frac{1}{3},1)$ a na $(1,+\infty)$ e) $\frac{1}{2}\log(x^2-x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{32}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1|$ na $(-\infty,-2)$, na $(-2,1)$ a na $(1,+\infty)$ g) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ h) $2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+2}$ na $(-\infty,-4)$, na $(-4,-2)$ a na $(-2,+\infty)$ i) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{|x^2-\sqrt{2}-1|}{x^2+\sqrt{2}-1}$ na $\left(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, na $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ a na $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}},+\infty\right)$ j) $-4\log|x-1| + \sum_{k=1}^{17}\frac{x^k}{k}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ k) $3\log|x+1| - 2\log|x-1| + \sum_{k=1}^{8}\frac{x^{2k}}{2k}$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$ l) $x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$ na $(-\infty,0)$, na $(0,2)$, na $(2,3)$ a na $(3,+\infty)$ m) $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,1)$ a na $(1,+\infty)$ n) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2x+1}{7+(2x+1)^2} + \frac{2\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$ na $\mathbb{R}$ (nápověda k rozkladu: pracujte s výrazem $(x^2+1)^2$) p) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{12}\log(x^2-\sqrt{3}x+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{12}\log(x^2+\sqrt{3}x+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ na $\mathbb{R}$

5. a) $\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ na $(0,\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) - \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$ na $\mathbb{R}$ c) $-\frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)$ na $\mathbb{R}$ d) $\log\frac{1-\cos x}{|\cos x|}$ na $(-\frac{\pi}{2},0) + 2k\pi$, na $(0,\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ a na $(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e) $x - 3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} - 3\log(e^{\frac{x}{6}}+1) - \frac{3}{2}\log(e^{\frac{x}{3}}+1)$ na $\mathbb{R}$

f) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\log\frac{\operatorname{tg}^2x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}$ pro $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2x$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2x}$ na $(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ i) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}-x+k\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(2k+1)\frac{(4-\sqrt{3})\pi}{2\sqrt{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$ j) $\frac{1}{3}\log(2+\cos x)+\frac{1}{6}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$ na $(0,\pi)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ k) $\frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ na $(0,\frac{\pi}{2})+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ l) na $(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)+2k\pi$: $F(x)=x+\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ pro $x\neq\pi+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ m) na $\left(-\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1-2\pi},-\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1}\right)$, na $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}\pi-1},\sqrt{\frac{3}{2}\pi-1}\right)$ a na $\left(\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1},\sqrt{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-1+2\pi}\right)$, $k\in\mathbb{N}$: $F(x)=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x^2+1}{2}}$ pro $x\neq\pm\sqrt{\pi+2k\pi-1}$, $F(\pm\sqrt{\pi+2k\pi-1})=0, k\in\mathbb{Z}$ n) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+k\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, $k\in\mathbb{Z}$ o) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}-\frac{\operatorname{tg}x}{4(2+\operatorname{tg}^2x)}+k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$
p) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}x\right)+k\frac{\pi}{ab}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{ab}$, $k\in\mathbb{Z}$ q) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+k\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$, $F(\pi+2k\pi)=(k+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $k\in\mathbb{Z}$ r) na $\mathbb{R}$: $F(x)=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)-k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ s) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|$ pro $x\neq\pi+2l\pi$, $F(\pi+2l\pi)=0$, $k,l\in\mathbb{Z}$ t) na $(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$: $F(x)=G(x)$ pro $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(x)=G(x)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$, kde $G(x)=\frac{1}{6}\log\frac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}$ u) na $\mathbb{R}$: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x-1\right)+k\sqrt{2}\pi$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$, $F(\frac{\pi}{2}+k\pi)=(k+\frac{1}{2})\sqrt{2}\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

6. a) $2\sqrt{x+3}-2\log\left(1+\sqrt{x+3}\right)$ na $(-3,+\infty)$
b) $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\log\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right|-\frac{1}{2}\log\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,+\infty)$
c) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\log x+6\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0,+\infty)$ d) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1,3)$ e) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-(x+1)+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ na $(-1,+\infty)$ f) $\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}-\log\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right)$ na $\mathbb{R}$
g) $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\log\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)$ na $(-1,0)$ a na $(0,+\infty)$
h) $-\log\left|1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right|+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,1)$ a na $(1,+\infty)$
i) $\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1,0)$ a na $(0,1)$ j) $\log\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, na $(-\infty,-1)$, na $(-1,0)$ a na $(0,+\infty)$ k) $\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\left(x(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x}+\frac{1}{2}\log\left|\sqrt{x^2-2x}-x+1\right|$, na $(-\infty,0)$ a na $(2,+\infty)$
l) $\operatorname{sgn}(x-1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{1}{2}(x-1)(x-1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+\log\left|\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}-1\right|-\log\left(\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}}+1\right)\right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}+\log\left|\sqrt{x^2-2x-1}-x+1\right|$, na $(-\infty,1-\sqrt{2})$ a na $(1+\sqrt{2},+\infty)$ m) $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}+1\right)$ na $(-2,2)$ n) $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{8}\log\left(2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right)$ na $\mathbb{R}$ o) $-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1,1)$
p) $\log\left(t+\sqrt{2}-1\right)-\log\left(t+\sqrt{2}+1\right)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}-x}{x+1+\sqrt{2}}}$, na $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$; nebo $-\log(1-t)-2\operatorname{arctg}t$, kde $t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$, na $(-1-\sqrt{2},0)$ a na $(0,-1+\sqrt{2})$, lze slepit v 0 q) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ na $(1,+\infty)$
r) $\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ na $(0,+\infty)$ s) $\frac{t}{18}-\frac{t^2}{6}+\frac{3}{4}\log|2t-3|-\frac{16}{27}\log|3t-4|$, kde $t=\sqrt{x^2+3x+2}-x$, na $(-\infty,-2)$, na $(-1,-\frac{2}{3})$ a na $(-\frac{2}{3},+\infty)$ t) $\frac{5}{4\sqrt{2}}\log\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)+\frac{5}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)-\frac{5t}{1+t^4}$, kde $t=\sqrt[4]{\frac{x}{5-x}}$, na $(0,5)$

2. Určité integrály

1. $\displaystyle\int_0^1 (x+2)^5\,\mathrm{d}x$, 2. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x+2)\cos x\,\mathrm{d}x$, 3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+a},\ a\geq 0$, 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$,

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$, 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$, 7. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$, 8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

9. $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$, 10. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, 11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky:

1. $\frac{665}{6}$, 2. $\frac{\pi}{2}\sin 2$, 3. $1+a\log\frac{1+a}{2+a}$, 4. 0, 5. $\frac{11}{30}+2\log\frac{5}{6}$, 6. $\log 2$, 7. 4, 8. $\frac{1}{2}\log 3$,
9. $\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}$, 10. $\frac{4}{3}\sqrt{2}-2$, 11. $-\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{2}\log 2$.

3. Vícerozměrné integrály

1. $\int_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,2]$;
2. $\int_M e^{-x-y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le y\}$;
3. $\int_M x(y+1) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je jednotkový kruh;
4. $\int_M \sin(x+2y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;
5. $\int_M xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je čtvrtina jednotkového kruhu ležící v prvním kvadrantu;
6. $\int_M xyz^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $M = \langle 0,2 \rangle \times \langle 0,2 \rangle \times \langle -1,1 \rangle$;
7. $\int_M 2x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je čtyřúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,2]$, $[1,1]$, $[1,3]$;
8. $\int_M ye^{-x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, |x-y| \le 1\}$;
9. $\int_M (x^2 y + xy^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,1]$, $[1,2]$;
10. $\int_M \frac{y^2\sqrt{x}}{1+x^4} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je plocha ohraničená parabolou $y^2 = x$.

Výsledky:

1. $\frac{5}{6}$, 2. $\frac{1}{2}$, 3. 0, 4. 2, 5. $\frac{1}{8}$, 6. $\frac{8}{3}$, 7. $\frac{7}{3}$, 8. 2, 9. $\frac{39}{10}$, 10. $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2}$.

4. Vektorové prostory

1. Ověřte, že následující množiny spolu s kanonicky definovanými operacemi tvoří vektorové prostory:
$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $C(\mathbb{R})$, $C(\langle 0,1\rangle)$, $M(3\times 2)$, polynomy.

2. Které z následujících podmnožin tvoří vektorové podprostory?
a) $W_1 = \{(r,2r,-r);\ r\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$, b) $W_2=\{(r+s,2s-r,r+2s);\ r,s\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$,
c) $\{(r+1,2r,-r);\ r\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$, d) $\{(s+t,2s-t+2,s+t);\ s,t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$,
e) $\{(rs+s,2s,r,s);\ r,s\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^4$, f) $W_1\cap W_2$, g) $W_1\cup W_2$,
h) $\{$polynomy stupně $2\}\subset\mathcal{P}$, i) $\mathcal{P}_2=\{$polynomy stupně nejvýše $2\}\subset\mathcal{P}$, j) $\{ax^3+x+b;\ a,b\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{P}_3$,
k) $\{p\in\mathcal{P};\ p(0)=1\}\subset\mathcal{P}$, l) $\{p\in\mathcal{P};\ p(0)=0\}\subset\mathcal{P}$, m) $\{p\in\mathcal{P};\ p'(0)=0\}\subset\mathcal{P}$,
n) $\{p\in\mathcal{P};\ 2p(0)-3p(1)=0\}\subset\mathcal{P}$, o) $\{p\in\mathcal{P};\ p(1)-3p(2)=1\}\subset\mathcal{P}$,
p) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f'(0)+3f''(1)=0\}\subset C(\mathbb{R})$,
q) $\{\mathbb{A}\in M(n\times n);\ \mathbb{A}$ regulární$\}\subset M(n\times n)$, r) $\{\mathbb{A}\in M(n\times n);\ \mathbb{A}$ horní trojúhelníková$\}\subset M(n\times n)$,
s) $\{\mathbb{A}\in M(n\times n);\ \det\mathbb{A}=0\}\subset M(n\times n)$, t) $\{\mathbb{A}\in M(n\times n);$ součet prvků na diagonále $\mathbb{A}$ je $0\}\subset M(n\times n)$.

3. Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně nezávislé:
a) $(1,1,0),(2,1,1),(3,1,2)\in\mathbb{R}^3$, b) $(1,0,-1,1),(2,1,0,1),(1,0,0,-1),(2,1,1,1)\in\mathbb{R}^4$,
c) $x^2+x+1, x+1, x-3\in\mathcal{P}_2$, d) $3x^2+2x+1, x^2+x+3, x^2-2x+1\in\mathcal{P}_2$, e) $x^3+x+1, x^3+2x, x^3+x+2\in\mathcal{P}_3$,
f) $\sin x, x\sin x, x^2\sin x\in C(\mathbb{R})$, g) $\sin x,\cos x,\sin 2x\in C(\mathbb{R})$, h) $\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x\in C(\mathbb{R})$.

4. Určete dimenzi a nalezněte nějakou bázi následujících podprostorů:
a) $\mathrm{lin}\{(1,1,1),(1,2,2),(10,11,11)\}\subset\mathbb{R}^3$,
b) $\mathrm{lin}\{(1,1,1,2,2),(-1,-2,-2,-2,2),(19,1,1,1,1),(-1,-3,-3,-2,6)\}\subset\mathbb{R}^5$,
c) $\mathrm{lin}\{x+7,x^2-x-1,x^2+3,x-5\}\subset C(\mathbb{R})$, d) $\mathrm{lin}\{\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\}\subset C(\mathbb{R})$,
e) $M(2\times 3)$, f) $\{\mathbb{A}\in M(3\times 3);\ \mathbb{A}^T=\mathbb{A}\}$, g) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y-2z=0\}$, h) $\{f\in C^3(\mathbb{R});\ f'''=0\}$,
i) $\mathbb{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Výsledky:
2. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, f) ano, g) ne, h) ne, i) ano,
j) ne, k) ne, l) ano, m) ano, n) ano, o) ne, p) ano, q) ne, r) ano, s) ne,
t) ano.
3. a) ne, b) ano, c) ano, d) ano, e) ano, f) ano, g) ano, h) ano.
4. a) 2, např. $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$ nebo $\{(1,1,1),(1,1,2)\}$, b) 3, $\{(1,1,1,2,2),(-1,-2,-2,-2,2),(19,1,1,1,1)\}$,
c) 3, $\{1,x,x^2\}$, d) 4, e) 6, f) 6, g) 2, $\{(1,-1,0),(1,1,1)\}$, h) 3, $\{1,x,x^2\}$,
i) 4, $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.

5. Lineární zobrazení

Zjistěte, zda L je lineární zobrazení. Pokud ano, určete $\ker L$ a $\mathrm{Im}\, L$.
1. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $L(u,v,w)=(u+v,v+2w)$;
2. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $L(u,v,w)=(u,u-w,u+v,v)$;
3. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $L(u,v,w)=(u^2,u+v,0)$;
4. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $L(u,v,w)=(0,0,0)$;
5. $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $L(u,v,w,z)=(u,u)$;
6. $L:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x)=f(x+1)-f(x)$;
7. $L:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;
8. $L:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x)=f(x^2)$;
9. $L:C^1(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $L(f)(x)=f'(x)$;
10. $L:C^1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, $L(f)=(f(0),f'(1))$;
11. $L:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_3$, $L(p)(x)=p(x)+x^2$;
12. $L:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_3$, $L(p)(x)=(x+1)p(x)$

Výsledky:
1. $\{(2w,-2w,w);\ w\in\mathbb{R}\},\mathbb{R}^2$, 2. $\{(0,0,0)\},\{(a,c,a+b,b);\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$, 3. ne, 4. $\mathbb{R}^3,\{(0,0,0)\}$,
5. $\{(0,v,w,z);\ v,w,z\in\mathbb{R}\},\{(a,a);\ a\in\mathbb{R}\}$, 6. $\{f\in\mathbb{C}(\mathbb{R});\ f$ je 1-periodická$\}, C(\mathbb{R})$,
7. $\{f\equiv 0\},\{g\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ g(0)=0\}$, 8. $\{f\restriction_{(0,+\infty)}\equiv 0\},\{g\in\mathbb{C}(\mathbb{R});\ g$ je sudá$\}$,
9. $\{f\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ f$ je konstantní$\}, C(\mathbb{R})$, 10. $\{f\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R});\ f(0)=f'(1)=0\},\mathbb{R}^2$, 11. ne, 12. $\{p\equiv 0\}$,
$\{q\in\mathcal{P}_3;\ q(-1)=0\}$

6. Kvadratické formy

Určete definitnost následujících matic:

$$\textbf{1.}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{2.}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad \textbf{3.}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&2&5\end{pmatrix},\quad \textbf{4.}\begin{pmatrix}6&0&3\\0&3&3\\3&3&5\end{pmatrix},\quad \textbf{5.}\begin{pmatrix}7&0&4&2\\0&3&3&2\\4&3&6&3\\2&2&3&2\end{pmatrix}$$

$$\textbf{6.}\begin{pmatrix}2&-3&1&-1\\-3&8&3&0\\1&3&5&-2\\-1&0&-2&1\end{pmatrix},\quad \textbf{7.}\begin{pmatrix}-2&1&1&-1\\1&-7&1&-2\\1&1&-10&0\\-1&-2&0&-2\end{pmatrix},\quad \textbf{8.}\begin{pmatrix}3&4&4&3\\4&6&5&6\\4&5&6&2\\3&6&2&11\end{pmatrix},\quad \textbf{9.}\begin{pmatrix}-3&-4&4&-3\\-4&-6&5&-6\\4&5&-6&2\\-3&-6&2&-11\end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete definitnost následujících matic:

$$\textbf{10.}\begin{pmatrix}337&338&400&398\\338&415&371&399\\400&371&333&343\\398&399&343&a\end{pmatrix},\quad \textbf{11.}\begin{pmatrix}3&3&1&2\\3&4&2&-1\\1&2&3&a\\2&-1&a&13\end{pmatrix}.$$

Výsledky: 1. ID, 2. ID, 3. PSD, 4. PD, 5. PD, 6. ID, 7. ND, 8. PSD, 9. NSD, 10. vždy ID, 11. PD pro $a \in \left(-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$, ID pro $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}\right) \cup \left(-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}, +\infty\right)$, PSD pro $a = -\frac{7}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$.

7. Vlastní čísla

Najděte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro následující matice:

$$\textbf{1.}\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix},\quad \textbf{2.}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix},\quad \textbf{3.}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad \textbf{4.}\begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix},\quad \textbf{5.}\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix},\quad \textbf{6.}\begin{pmatrix}-2&1&2\\-4&3&2\\-5&1&5\end{pmatrix}$$

$$\textbf{7.}\begin{pmatrix}5&0&-2\\2&3&-2\\4&0&-1\end{pmatrix},\quad \textbf{8.}\begin{pmatrix}8&-1&-3\\8&1&-4\\7&-1&-2\end{pmatrix},\quad \textbf{9.}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\6&-2&-2\\3&-1&-1\end{pmatrix},\quad \textbf{10.}\begin{pmatrix}2&0&-1\\5&-1&-2\\1&1&-1\end{pmatrix},$$

$$\textbf{11.}\begin{pmatrix}-2&0&-2&3\\-2&1&-1&2\\-2&0&0&2\\-5&0&-3&6\end{pmatrix},\quad \textbf{12.}\begin{pmatrix}-23&21&3&-17\\-40&35&4&-31\\58&-50&-5&47\\-8&6&0&-7\end{pmatrix}.$$

Výsledky (vlastní číslo, násobnost, vlastní vektory):

1. $(1, 1, \{[t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (2, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 2. $(4, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (-1, 1, \{[3t, -2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 3. $(1+i, 1, \{[t, ti];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (1-i, 1, \{[t, -ti];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 4. $(3, 2, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 5. pro $a \neq 0$: $(a, 1, \{[t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (-a, 1, \{[t, -t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, pro $a = 0$: $(0, 2, \{[s, t];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, 6. $(1, 1, \{[t, t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (2, 1, \{[t, 2t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (3, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 7. $(1, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (3, 2, \{[t, s, t];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, 8. $(1, 1, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (3, 2, \{[t, 2t, t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 9. $(0, 3, \{[t, 3t-s, s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, 10. $(0, 3, \{[t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\})$, 11. $(2, 1, \{[t, t, t, 2t];\ t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}), (1, 3, \{[s, t, 0, s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$, 12. $(i, 2, \{[3t-(7+i)s, 4t, (-5+i)t-(8+10i)s, 8s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\}), (-i, 2, \{[3t+(-7+i)s, 4t, -(5+i)t+(-8+10i)s, 8s];\ [s, t] \in \mathbb{C}^2\setminus\{[0, 0]\}\})$.

8. Taylorův polynom

1. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě a pro následující funkce:

a) arctg, $k = 3$, $a = 1$
b) tg, $k = 3$, $a = \frac{\pi}{4}$
c) exp, $k = 5$, $a = 2$

2. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě 0 (pokud není řečeno jinak) pro následující funkce:

a) $\sin \cdot \cos$, $k = 4$
b) tg, $k = 5$
c) e^{x^2}, $k = 6$
d) $\cos(x^3 - 1)$, $k = 3$, v bodě 1
e) $x^7 \sin(x^2)$, $k = 10$
f) $\cos(\sin x)$, $k = 5$
g) $\sin(\sin x)$, $k = 6$
h) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 4$
i) $\log(\cos x)$, $k = 6$

3. Spočtěte limity:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}$
b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$
d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1 + x^2}}{x^5}$
e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$
f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$
g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}\right)$
h) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin\bigl(\cos(\sin x) - 1\bigr) + \frac{1}{2}x^2}{x^2 \sin^2 x}$

4. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby příslušná limita byla konečná a různá od 0 a spočtěte tuto limitu:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^x - 1}{x^n}$
b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$
d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{12}(x - 1)^3$ b) $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3$
c) $e^2 + e^2(x - 2) + \frac{1}{2}e^2(x - 2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x - 2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x - 2)^4 + \frac{1}{120}e^2(x - 2)^5$

2. a) $x - \frac{2}{3}x^3$ b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ c) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ d) $1 - \frac{9}{2}(x - 1)^2 - 9(x - 1)^3$
e) x^9 f) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$ g) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ h) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$

3. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{12}$ c) 0 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $\frac{1}{6}$ h) $\frac{5}{24}$

4. a) 1 ($n = 2$) b) $\frac{e}{2}$ ($n = 1$) c) $\frac{1}{3}$ ($n = 4$) d) $\frac{1}{30}$ ($n = 7$)

9. Lokální extrémy funkcí více proměnných

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

1. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
2. $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$,
3. $(1 + e^y)\cos x - ye^y$,
4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$,
5. $e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$,
6. $x^2 + y^2 + x - 2xy$,
7. $(x - 2y)e^{xy}$,
8. $x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$,
9. $(x^2 - xy - z^2)e^{x+y}$,
10. $x + y + 4\sin x \sin y$,
11. $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
12. $x^3 + y^2 + 12xy$

Výsledky:

1. $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ ostrá lokální minima, $[0, 0]$ sedlový bod, 2. $[5, 2]$ ostré lokální minimum, 3. $[2k\pi, 0]$ ostré lokální maximum, $[(2k + 1)\pi, -2]$ sedlový bod, $k \in \mathbb{Z}$, 4. $[0, 0, 0]$ sedlový bod, $[2, 2, 2]$ ostré lokální minimum,
5. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ sedlový bod, 6. nemá kritické body, 7. $[-1, \frac{1}{2}]$ a $[1, -\frac{1}{2}]$ sedlové body,
8. $[1, 2]$ ostré lokální minimum, 9. $[0, 0, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0]$ sedlové body, 10. $[\frac{7}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální maximum pro k sudé, sedlový bod pro k liché, $[\frac{11}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{11}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální minimum pro k liché, sedlový bod pro k sudé, 11. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[x, y]$ splňující $x^2 + y^2 = 1$ lokální maximum,
12. $[24, -144]$ ostré lokální minimum, $[0, 0]$ sedlový bod