

1. CVIČENÍ

- 1) Existuje inverzní zobrazení.
- 2) a) Zkoumejme $e_{L\ell p}$. b) Zkoumejme $x_L x x p$. c) Čemu se rovná $(xy)^{-1}$? d) f je prosté, resp. na.
- 3) Matematickou indukcí. Pro krok $n \rightarrow n + 1$ je potřeba vhodně vynásobit $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.
- 4) $\sup_{x \in A} (\sup_{y \in B} f(x, y)) = \sup_{(x, y) \in A \times B} f(x, y) = \sup_{y \in B} (\sup_{x \in A} f(x, y))$.
- 5) \mathbb{C}^n je izomorfní \mathbb{R}^{2n} .
- 10) $\{x \in X; f(x) + g(x) \geq \alpha + \beta\} \subset \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in X; g(x) \geq \beta\}$.
- 14) $\dim Y = \infty$: Položme $f_n = \chi_{(1/2^n, 1/2^{n+1/2^{n+1}})} - c_n \chi_{(1/2^n + 1/2^{n+1}, 1/2^{n-1})}$ pro vhodnou konstantu $c_n \in \mathbb{R}$ takovou, aby $f_n \in Y$. Pak $\{f_n; n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ je nekonečná lineárně nezávislá množina.

2. CVIČENÍ

- 3) Necht' $x, y \in \text{Int } M$ a $\lambda \in [0, 1]$. Necht' $r > 0$ je takové, že $U(x, r) \subset M$ a $U(y, r) \subset M$. Pak $U(\lambda x + (1 - \lambda)y, r) \subset M$.
- 4) $\overline{U(x, r)} \subset B(x, r)$ je triviální. $B(x, r) \subset \overline{U(x, r)}$: Necht' $y \in B(x, r)$. Nalezňte $\{y_n\} \subset U(x, r)$ takovou, že $y_n \rightarrow y$. Diskrétní metrický prostor.
- 8) Lze např. ukázat, že doplněk je otevřený.
- 9) a) Srovnávací kritérium pro řady $\sum |x_n|^p$ a $\sum |x_n|^q$. Pro důkaz ostrosti inkluze vezměte vektor $(1/n^\alpha)_{n=1}^\infty$ pro vhodné $\alpha > 0$. b) Srovnávací kritérium pro integrály nebo Hölderova nerovnost.
- 11) Lze ukázat, že c_{00} je hustý v c_0 , a že c_{00} je separabilní.
- 12) Lze ukázat, že $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ je hustý v ℓ_p , a že $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ je separabilní.
- 13) Vezměme systém $\{\chi_A; A \subset \mathbb{N}\}$. Jakou mají od sebe vzdálenost jednotlivé prvky tohoto systému? Jakou má tento systém mohutnost?

5. A 6. CVIČENÍ

A) $\sqrt[q]{|a|^q + |b|^q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

B)

- 1) $\|\phi\| = 1$, nabývá se pro posloupnosti v B_X s $\lim x_n = 1$.
- 2) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodech sféry, které mají nezáporné souřadnice.
- 3) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodech sféry, které mají nezáporné souřadnice a liché souřadnice nulové.
- 4) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodech sféry, které mají nezáporné sudé souřadnice a nekladné liché souřadnice.
- 5) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodě $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$.
- 6) $\|\phi\| = 1$, nenabývá se.
- 7) $\|\phi\| = \frac{\pi^2}{6}$, nenabývá se.
- 8) $\|\phi\| = \frac{\pi^2}{6}$, nabývá se v bodě $(1, 1, 1, \dots)$.
- 9) $\|\phi\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, nabývá se v bodě $(\frac{\sqrt{6}}{n\pi})_{n=1}^\infty$.
- 10) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v každé $f \in C([0, 1])$ takové, že $|f| \leq 1$ a $f(0) = 1$.
- 11) $\|\phi\| = 2$, nabývá se v každé $f \in C([0, 1])$ takové, že $|f| \leq 1$, $f(0) = 1$ a $f(1) = -1$ (např. $1 - 2x$).
- 12) $\|\phi\| = 1$, nabývá se právě ve funkci konstantně rovné 1.
- 13) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se v každé $f \in C([0, 1])$ takové, že $|f| \leq 1$ a $f = 1$ na $[0, \frac{1}{2}]$.
- 14) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se v každé $f \in L_\infty([0, 1])$ takové, že $|f| \leq 1$ a $f = 1$ na $[0, \frac{1}{2}]$ (s. v.).
- 15) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se právě ve funkci konstantně rovné 1 s. v.
- 16) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se právě ve funkci konstantně rovné 1.
- 17) $\|\phi\| = \frac{1}{4}$, nabývá se právě ve funkci $\chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}$.
- 18) $\|\phi\| = \frac{1}{4}$, nenabývá se.
- 19) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v každé $f \in L_1([0, 1])$ takové, že $f \geq 0$, $f = 0$ na $(\frac{1}{2}, 1]$ a $\int_0^{\frac{1}{2}} f = 1$ (např. $2\chi_{[0, \frac{1}{2}]}$).
- 20) $\|\phi\| = 1$, nenabývá se.
- 21) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nenabývá se.

7. CVIČENÍ

A) $e \notin \overline{\text{span } A}$

B) 1) $\{1, x \mapsto \sqrt{3}(2x - 1)\}$, $P(f)(x) = \int_0^1 f(t) dt + 3(\int_0^1 (2t - 1)f(t) dt)(2x - 1) = 2(\int_0^1 f(t) dt)(2 - 3x) + 6(\int_0^1 t f(t) dt)(2x - 1)$, $P(t \mapsto t^2)(x) = x - \frac{1}{6}$

2) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, x \mapsto \frac{\sqrt{6}}{2}x, x \mapsto \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})\}$, $P(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{3}{2}(\int_{-1}^1 t f(t) dt)x + \frac{45}{8}(\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})f(t) dt)(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{9}{8} \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{3}{2}(\int_{-1}^1 t f(t) dt)x + \frac{45}{8}(\int_{-1}^1 t^2 f(t) dt)(x^2 - \frac{1}{3})$, $P(t \mapsto t^3)(x) = \frac{3}{5}x$, $P(\sin)(x) = 3(\sin 1 - \cos 1)x$

3) $\{\sqrt{3}(\frac{1}{2^n})_{n=1}^\infty, \sqrt{200}(\frac{1}{5 \cdot 2^n} - \frac{1}{3^n})_{n=1}^\infty\}$, $P(e_1) = \frac{20}{3}(\frac{1}{3^n} - \frac{3}{8 \cdot 2^n})_{n=1}^\infty$

8. A 9. CVIČENÍ

- 1) $\|T\| = 1$, nabývá se v každém bodě S_{ℓ_2} . T je izometrie do, obor hodnot je $\{(x_n); x_1 = 0\}$.
- 2) $\|T\| = 1$, nabývá se v každém bodě S_{ℓ_2} splňujícím $x_1 = 0$. T není prostý, $\text{Ker } T = \text{span}\{e_1\}$, T je na.
- 3) T je izometrie na.
- 4) T je izomorfismus na, $\|T\| = \|T^{-1}\| = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- 5) $\|T\| = 1$, norma se nabývá v bodech S_{ℓ_2} , které mají liché souřadnice nulové. T není prostý, $\text{Ker } T$ tvoří prvky, které mají sudé souřadnice nulové. T není na, $\text{Rng } T$ tvoří prvky, které mají liché souřadnice nulové. T je ortogonální projekce.
- 6) $\|T\| = 1$, nabývá se v bodech αe_1 , kde $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte vektory e_n).
- 7) $\|T\| = 2$, nabývá se v bodech αe_1 , kde $|\alpha| = 1$. T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = 1$.
- 8) $\|T\| = 1$, nenabývá se. Pro nerovnost $\|T\| \geq 1$ lze posloupnost vektorů e_n . T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = 2$.
- 9) $\|T\| = 1$, nabývá se v bodech S_{ℓ_1} , jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné nebo jsou všechny nekladné. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte vektory $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 0, 0, \dots)$).
- 10) $\|T\| = 1$, nabývá se v bodech S_{ℓ_1} , jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné nebo jsou všechny nekladné. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte vektory $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 0, 0, \dots)$).
- 11) $\|T\| = 3$, nabývá se ve funkcích αf splňujících $|f| \leq 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $|\alpha| = 1$. T je prostý a na. T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = 3$, $T^{-1}(g) = g + g(0) - g(1)$.
- 12) T je izometrie na.
- 13) $\|T\| = r$, nabývá se ve funkcích $|f| \leq 1$, $|f(r)| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte funkce $f_n(0) = 1$ a $f_n = 0$ na $[\frac{1}{n}r, r]$).
- 14) $\|T\| = r$, nabývá se v konstantních funkcích $f(x) = \alpha$, $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte funkce $\sin(nx)$).
- 15) $\|T\| = r + 1$, nabývá se v konstantních funkcích $f(x) = \alpha$, $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T je izomorfismus do, obor hodnot je $\{g \in C^1([0, r]); g(0) = 0\}$, $\|T^{-1}\| = 1$.
- 16) $\|T\| = \frac{1}{2}$, nabývá se ve funkcích f splňujících $|f| \leq 1$ a $|f(0)| = 1$ nebo $|f(1)| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte funkce $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ splňující $f_n(\frac{1}{2}) = 1$ a $f_n = 0$ mimo interval $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$).
- 17) T je izometrie na.
- 18) $\|T\| = 1$, nabývá se ve funkcích f , $|f| \leq 1$, pro které existuje $x \in [0, 1]$ splňující $|f(x)| = 1$. T není prostý, $\text{Ker } T$ tvoří funkce nulové na $[0, 1]$. T není na, $\text{Rng } T$ tvoří sudé funkce.
- 19) $\|T\| = 1$, nenabývá se. T není prostý, $\text{Ker } T$ tvoří konstantní funkce. T je na.
- 20) $\|T\| = 1$, nabývá se např. ve funkci konstantní 1. T není prostý, $\text{Ker } T = \{ce^x; c \in \mathbb{K}\}$. T je na.
- 21) $\|T\| = 1$, nabývá se např. ve funkci konstantní 1. T není prostý, $\text{Ker } T = \text{span}\{\sin, \cos\}$. T je na.
- 22) Pro $p = \infty$ je to izometrie na. Pro $1 \leq p < \infty$ je $\|T\| = 2^{\frac{1}{p}}$, nenabývá se. (Pro důkaz $\|T\| \leq 2^{\frac{1}{p}}$ použijte větu o substituci. Pro důkaz $\|T\| \geq 2^{\frac{1}{p}}$ uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[1-\frac{1}{n}, 1]}$.) T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$).
- 23) $\|T\| = 1$, pro $p = \infty$ se nabývá např. ve funkci konstantní 1, pro $1 \leq p < \infty$ se nenabývá. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$).
- 24) $\|T\| = 1$, pro $p = \infty$ se nabývá např. ve funkci konstantní 1, pro $1 \leq p < \infty$ se nenabývá. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$).
- 25) $\|T\| = 1$, pro $p = \infty$ se nabývá např. ve funkci konstantní 1, pro $1 \leq p < \infty$ se nabývá v těch funkcích, které jsou s. v. nulové na $[\frac{1}{2}, 1]$. T není prostý, $\text{Ker } T$ obsahuje funkce s. v. nulové na $[0, \frac{1}{2}]$. T není na.
- 26) T je izometrie na.

10. CVIČENÍ

1) $B_{\perp} = \{0\}$, $(B_{\perp})^{\perp} = \ell_{\infty}$

11. CVIČENÍ

- 1) $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + 2y_3, y_1 - y_2 + y_3)$, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{T^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- 2) $T^*((y_n)) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$
- 3) $T^*((y_n)) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$
- 4) $T^*((y_n)) = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \dots)$
- 5) $T^*((y_n)) = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$
- 6) $T^*((y_n)) = (-\frac{1}{2}y_2, \frac{2}{1}y_1, -\frac{2}{3}y_4, \frac{3}{2}y_3, \dots, -\frac{n}{n+1}y_{2n}, \frac{n+1}{n}y_{2n-1}, \dots)$
- 7) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=n}^{\infty} \frac{y_k}{k})_{n=1}^{\infty}$
- 8) $T^*((y_n)) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$
- 9) $T^*g(t) = tg(t)$
- 10) $T^*g = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot g$
- 11) $T^*g(t) = 2tg(t^2)$
- 12) $T^*g(s) = \int_0^1 \min\{s, t\}g(t) dt$

- 13) $T^*g = g + \int_0^2 g(t) dt \cdot \chi_{[0,1]}$
- 14) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos nt$
- 15) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos nt$
- 16) $T^*g = \left(\int_0^1 t^n g(t) dt\right)_{n=1}^{\infty}$
- 17) $T^*\mu = \left(\int_{[0,1]} t^n d\mu(t)\right)_{n=1}^{\infty}$
- 18) $T^*\mu = \mu + \mu([0, 1]) \cdot (\delta_1 - \delta_0)$
- 19) $T^*\mu(A) = \int_A \mu([t, 1]) dt$, tj. hustota míry $T^*\mu$ je $t \mapsto \mu([t, 1])$
- 20) $T^*\mu(A) = \int_A t d\mu(t)$
- 21) $T^*\mu(A) = \mu(\{t \in [0, 1]; 1 - t \in A\}) = \mu(1 - A)$, tj. $T^*\mu$ je obraz míry μ při zobrazení $t \mapsto 1 - t$
- 22) $T^*\mu(A) = \mu(\{t \in [-1, 1]; t^2 \in A\})$, tj. $T^*\mu$ je obraz míry μ při zobrazení $t \mapsto t^2$
- 23) $T^*\mu(A) = \mu(A \cap [0, 1])$

12. A 13. CVIČENÍ

A) 1) ano, 2) ne, 3) ne, 4) ne, 5) ano: $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$, 6) ano: $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$, 7) ano: $\|T - T_n\| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$, 8) ano: $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$, 9) ne, 10) ne: $T|_Y$ je izomorfismus, kde $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ s.v. na } [0, \frac{1}{2}]\}$, 11) ne: $T|_Y$ je izomorfismus, kde $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ s.v. na } [0, \frac{1}{2}]\}$, 12) ne: posloupnost $(\cos nt)_{n=1}^{\infty}$, 13) ne: posloupnost $(\cos nt)_{n=1}^{\infty}$, 14) ano: $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{(1+p(n+1))^{1/p}}$, 15) ne: posloupnost (e_{2^n}) , $\|t^{2^n} - t^{2^m}\|_{\infty} \geq \|t^{2^n} - t^{2^{n+1}}\|_{\infty} = \frac{1}{4}$, 16) ne: $T|_Y$ je identita, kde $Y = \{f \in X; f(0) = f(1)\}$, 17) ano: funkce v $T(B_X)$ jsou 1-lipschitzovské, 18) ne: T je izomorfismus do, 19) ne: $T|_Y$ je izomorfismus, kde $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ na } [0, \frac{1}{2}]\}$, 20) ne: $T|_Y$ je izometrie, kde $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ na } [-1, 0]\}$, 21) ne: $T(B_X) = B_Y$, 22) ano: funkce v $T(B_X)$ jsou 1-lipschitzovské, 23) ano: funkce v $T(B_X)$ jsou 1-lipschitzovské

B) 1) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = B(0, 1)$, 2) $\sigma_p(T) = U(0, 1)$, $\sigma(T) = B(0, 1)$, 3) $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, 1\}$, 4) $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{i, -i\}$, 5) $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, 6) $\sigma_p(T) = \{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$, 7) $\sigma_p(T) = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $\sigma(T) = [0, 1]$, 8) $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{1\}$, 9) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$, 10) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ – položíme $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ a řešíme rovnici $\lambda F' - F = g$, 11) $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = [0, \frac{1}{2}]$, 12) $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{0, 1\}$, 13) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$, 14) $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{0, 1\}$, 15) $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = [0, \frac{1}{2}]$, 16) a 17) $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{-1, 1\}$, napsat rovnice v bodě t a $-t$ a řešit soustavu, 18) $p = \infty$: $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na), $p < \infty$: $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, pro $\lambda = 1$ funkce $\chi_{[0,1]} \notin \text{Rng}(\lambda I - T)$), 19) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, pro $\lambda = 1$ funkce se $\text{supp} = [0, 1]$ není v $\text{Rng}(\lambda I - T)$), 20) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ (T je izometrie na, pro $\lambda = 1$ funkce se $\text{supp} = [1, 2]$ není v $\text{Rng}(\lambda I - T)$),