

I. Banachovy algebry

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Řekneme, že $(A, +, -, \cdot, 0, \cdot_s, \cdot)$ je algebra nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, \cdot, 0, \cdot_s)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_s a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_s b) = \alpha \cdot_s (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad $\mathbb{K}$ se nazývá komutativní, pokud je její okruhové násobení $\cdot$ komutativní.

Tvrzení 2. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$. Položme $A_e = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_e obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_e pomocí vzorce

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_e je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_e též komutativní.

Necht' A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi: A \rightarrow B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$).

Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B , pokud Φ je bijekce.

Fakt 3. Necht' A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus. Pak $\tilde{\Phi}: A_e \rightarrow B$, $\tilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ .

Tvrzení 4. Necht' A je algebra s jednotkou e a B je podalgebra A neobsahující e . Pak $C = B + \text{span}\{e\}$ je podalgebra A a zobrazení $\Phi: B_e \rightarrow C$, $\Phi(x, \lambda) = x + \lambda e$ je izomorfismus.

Definice 5. Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaná algebra, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachovou algebrou.

Tvrzení 6. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojitě) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A .

Důsledek 7. Necht' A je normovaná algebra a B je podalgebra A . Pak $\bar{B}$ je též podalgebra A .

Důsledek 8. Pro každou normovanou algebru A existuje její zúplnění, tj. Banachova algebra taková, že A je její hustá podalgebra. Toto rozšíření je určeno jednoznačně až na izometrii. Má-li algebra A jednotku e , pak e je i jednotkou v zúplnění A .

Tvrzení 9. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Definujme-li na A_e normu předpisem $\|(a, \alpha)\|_{A_e} = \|a\| + |\alpha|$ (tj. $A_e = A \oplus_1 \mathbb{K}$), pak A_e s touto normou je normovaná algebra. Je-li $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, je i A_e s výše uvedenou normou Banachova algebra.

Definice 10. Necht' A a B jsou normované algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen izomorfismus), pokud Φ je homeomorfismus A na B ; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen izomorfismus do), pokud Φ je izomorfismus A na $\text{Rng } \Phi$.

Věta 11. Necht' A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a: A \rightarrow A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I: A \rightarrow \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e , pak I je izomorfismus do a $I(e) = \text{Id}$. Platí-li $\|e\| = 1$ nebo $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.

Důsledek 12. Necht' $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální normovaná algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra a $|||e||| = 1$.

Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) platí, že pokud x má levý a pravý inverzní prvek, pak jsou si tyto rovny (a je to tedy inverzní prvek k x). Speciálně, inverzní prvky k invertovatelným prvkům jsou jednoznačně určeny. Dále invertovatelné prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertovatelné, pak i xy je invertovatelný a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertovatelných prvků budeme značit $A^\times$.

Fakt 13. Necht' A je algebra s jednotkou a B je její podalgebra obsahující e . Pak $B^\times \subset A^\times \cap B$.

Fakt 14. Necht' A, B jsou pologrupy, $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus na a necht' A je navíc monoid s jednotkou e . Pak B je monoid s jednotkou $\Phi(e)$ a je-li $x \in A$ invertovatelný, pak $\Phi(x)$ je invertovatelný a $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$. Je-li navíc Φ bijekce, pak $\Phi|_{A^\times}$ je izomorfismus grup $A^\times$ a $B^\times$.

Lemma 15. Necht' A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

Lemma 16. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou.

(a) Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

(b) Necht' $x \in A^\times$ a necht' $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x+h \in A^\times$. Pokud navíc $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.

Definice 17. Necht' G je grupa a τ je topologie na G . Řekneme, že (G, τ) je *topologická grupa*, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot: G \times G \rightarrow G$ a inverze $^{-1}: G \rightarrow G$) spojitě.

Věta 18. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou. Pak $A^\times$ je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.

Tvrzení 19. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a B je její uzavřená podalgebra obsahující e . Pak $(\partial_B B^\times) \cap A^\times = \emptyset$ a

$$B^\times = \bigcup \{C \subset B; C \text{ je komponenta } A^\times \cap B \text{ protínající } B^\times\}.$$

2. Spektrální teorie

Definice 20. Necht' A je algebra s jednotkou. Pro $x \in A$ definujeme *rezolventní množinu* prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K}; \lambda e - x \in A^\times\}$$

a *spektrum* prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k algebře A_e .

Definice 21. Prvek x grupoidu se nazývá *idempotentní*, pokud $x^2 = x$.

Tvrzení 22. Necht' A, B jsou algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je algebraický izomorfismus. Pak $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.

Lemma 23. Necht' M je monoid a $x, y \in M$. Jsou-li alespoň dva z prvků x, y, xy a yx invertovatelné, pak jsou invertovatelné všechny čtyři.

Tvrzení 24. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$.

(a) Je-li A netriviální, pak $\sigma(0) = \{0\}$.

(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\sigma(x)$ pro každé $x \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(c) Je-li $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.

(d) Je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(x^{-1})$.

(e) Jsou-li $x, y \in A$, pak množiny $\sigma(xy)$ a $\sigma(yx)$ se liší nejvýše o prvek 0. Je-li navíc $x \in A^\times$, pak $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

(f) Je-li $z \in A^\times$, pak $\sigma(x) = \sigma(zxz^{-1})$ pro každé $x \in A$.

Tvrzení 25. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $S: X \rightarrow Y$ je lineární izomorfismus. Pak pro operátor $S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ platí, že $\sigma(S \circ T \circ S^{-1}) = \sigma(T)$ a $\sigma_p(S \circ T \circ S^{-1}) = \sigma_p(T)$.

Fakt 26. Necht' A je algebra a B je ideál v A . Pak B je ideál i v A_e .

Tvrzení 27. Necht' A je algebra.

(a) Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_e}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.

(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.

(c) Necht' A má jednotku e , B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \text{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$.

(d) Necht' B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A , pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.

(e) Je-li B vlastní ideál v A , pak $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 28. Necht' A, B jsou algebry, $\Phi: A \rightarrow B$ je homomorfismus a $x \in A$. Má-li A jednotku e a $\Phi(e)$ není jednotkou v B , pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$.

Definice 29. Necht' A je algebra. Pro $x \in A$ definujeme *spektrální poloměr* prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda| \in [0, +\infty); \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Věta 30. Necht' A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Lemma 31. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) Pokud $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.

(b) Pokud $\{a_n\}$ je nezáporná a $a_{m+n} \leq a_m a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$.

Věta 32. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\partial \rho_B(x) \subset \partial \rho_A(x)$ a

$$\rho_B(x) = \bigcup \{C \subset \mathbb{K}; C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial \sigma_B(x) \subset \partial \sigma_A(x)$.

(c) Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

(d) Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

Definice 33. Necht' Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f: \Omega \rightarrow Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme *derivací* zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Fakt 34. Necht' Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f: \Omega \rightarrow Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak pro každé $\phi \in Y^*$ je $(\phi \circ f)'(a) = \phi(f'(a))$.

Fakt 35. Necht' Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f: \Omega \rightarrow Y$ a $a \in \Omega$. Existuje-li $f'(a)$, pak f je spojitě v bodě a .

Definice 36. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Na $\rho(x)$ definujeme *rezolventu* (též *rezolventní zobrazení*) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_e .

Tvrzení 37. Necht' A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.

Definice 38. Necht' Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: \Omega \rightarrow Y$. Řekneme, že f je *holomorfní* na Ω , jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Věta 39 (Liouvilleova věta). Necht' Y je komplexní normovaný lineární prostor a $f: \mathbb{C} \rightarrow Y$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Je-li f omezené, pak je konstantní.

Věta 40. Necht' A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.

(a) Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.

(b) Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \neq \emptyset$.

(c) $r(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ (tzv. Beurlingův-Gelfandův vzorec).

Důsledek 41. Je-li A komplexní Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.

Věta 42 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941)). Necht' A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^\times = A \setminus \{0\}$, pak A je izomorfní $\mathbb{C}$. Pokud navíc $\|e\| = 1$, pak A je izometricky izomorfní $\mathbb{C}$.

3. Holomorfní kalkulus

Necht' A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a $x \in A$. Dále necht' $\mathcal{F}$ je nějaká algebra funkcí definovaných na podmnožině $\mathbb{K}$, která obsahuje polynomy. Funkčním kalkulem pro x budeme rozumět nějaký homomorfismus $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow A$ takový, že $\Phi(1) = e$, $\Phi(\text{Id}) = x$, a který je navíc spojitý, případně sekvenciálně spojitý, v nějakých vhodných topologiích na $\mathcal{F}$ a A .

Věta 43. *Necht' A je komplexní algebra s jednotkou a $x \in A$. Necht' $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ jsou otevřená okolí $\sigma(x)$ a necht' $\Phi_i: H(\Omega_i) \rightarrow A$ je algebrový homomorfismus takový, že $\Phi_i(1) = e$, $\Phi_i(\text{Id}) = x$ a Φ_i je sekvenciálně spojitý z topologie lokálně stejnoměrné konvergence na $H(\Omega_i)$ do nějaké Hausdorffovy topologie τ na A , $i = 1, 2$. Jsou-li $f_i \in H(\Omega_i)$, $i = 1, 2$ takové, že $f_1 = f_2$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$, pak $\Phi_1(f_1) = \Phi_2(f_2)$.*

Necht' X je komplexní Banachův prostor, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ cesta a $f: \langle \gamma \rangle \rightarrow X$ spojitě zobrazení. Integrál f podél γ definujeme předpisem

$$\int_{\gamma} f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t)) d\lambda(t).$$

Integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_n$ v $\mathbb{C}$ ze spojitě zobrazení $f: \langle \Gamma \rangle \rightarrow X$ definujeme předpisem

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Lemma 44. *Necht' Γ je řetězec v $\mathbb{C}$, X je komplexní Banachův prostor, $f: \langle \Gamma \rangle \rightarrow X$ je spojitě a $\phi \in X^*$. Pak $\phi(\int_{\Gamma} f) = \int_{\Gamma} \phi \circ f$.*

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω , pokud $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega \setminus K$, $\text{ind}_{\Gamma} z = 1$ pro $z \in K$ a $\text{ind}_{\Gamma} z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Věta 45. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, X je komplexní Banachův prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je holomorfní. Jsou-li Γ_1, Γ_2 dva cykly v Ω takové, že $\text{ind}_{\Gamma_1}(z) = \text{ind}_{\Gamma_2}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pak $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.*

Definice 46. Necht' A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f R_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1} d\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω .

Lemma 47. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a $f \in L_1(\mu, A)$. Pak pro každé $x \in A$ a každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$x \left(\int_E f d\mu \right) = \int_E x f(t) d\mu(t) \quad \text{a} \quad \left(\int_E f d\mu \right) x = \int_E f(t) x d\mu(t).$$

Fakt 48. *Necht' G je grupa. Komutují-li spolu $u, v \in G$, pak spolu komutují i prvky u, v, u^{-1}, v^{-1} .*

Lemma 49. *Necht' A je algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\mu, \nu \in \rho(x)$.*

$$(a) \quad R_x(\mu) R_x(\nu) = R_x(\nu) R_x(\mu).$$

$$(b) \quad R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu) R_x(\mu) R_x(\nu) \quad (\text{tzv. rezolventní identita}).$$

Věta 50 (holomorfní kalkulus). *Necht' A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi: H(\Omega) \rightarrow A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 46, má následující vlastnosti:*

(a) *Na prostoru $H(\Omega)$ uvažujeme topologii lokálně stejnoměrné konvergence. Pak Φ je spojitý algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(\text{Id}) = x$.*

(b) *$f(x) \in A^{\times}$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.*

(c) *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).*

(d) *Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(e) *Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje i s $f(x)$.*

(f) *Je-li B komplexní Banachova algebra a $\Theta: A \rightarrow B$ spojitý homomorfismus takový, že $\Theta(e)$ je jednotka v B , pak $f(\Theta(x)) = \Theta(f(x))$. Speciálně, je-li $z \in A^{\times}$, pak $f(zxz^{-1}) = z f(x) z^{-1}$.*

4. Multiplikativní lineární funkcionály

Definice 51. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$. Homomorfismus $\varphi: A \rightarrow \mathbb{K}$ nazýváme *multiplikativním lineárním funkcionálem* (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Tvrzení 52. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$. Pak $\Delta(A)$ je lineárně nezávislá množina.

Tvrzení 53. Necht' A je algebra. Každý multiplikativní lineární funkcionál φ na A má jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ dané vzorcem $\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_e) = \{\tilde{\varphi}; \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.

Tvrzení 54. Necht' A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$. Pro každé $x \in A$ je $\varphi(x) \in \sigma(x)$, a tedy $|\varphi(x)| \leq r(x)$.

Důsledek 55. Necht' A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ (speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý). Pokud A má jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\|e\|}$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Speciálně, je-li $\|e\| = 1$, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.

Definice 56. Necht' A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A , který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Tvrzení 57. Necht' A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A .

Tvrzení 58. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li I vlastní ideál v A , je i $\bar{I}$ vlastní ideál v A . Tedy každý maximální ideál v A je uzavřený.

Lemma 59. Necht' A je komutativní algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertovatelný. Pak hlavní ideál $x A$ je vlastní.

Věta 60. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A . Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi|_I = 0$.

Důsledek 61. Je-li A netriviální komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou, pak $\Delta(A) \neq \emptyset$.

Důsledek 62. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi: \varphi \mapsto \text{Ker } \varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A .

Věta 63. Necht' A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A . Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak M je Alexandrova kompaktifikace $\Delta(A)$.

Zobrazení $\Phi: M \rightarrow \Delta(A_e)$, kde $\Phi(\varphi) = \tilde{\varphi}$ je jednoznačné rozšíření φ na prvek $\Delta(A_e)$, je homeomorfismus.

Necht' X, Y jsou vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^\#: Y^\# \rightarrow X^\#$ předpisem $T^\# f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^\#$ a $x \in X$.

Lemma 64. Necht' X, Y jsou vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární bijekce. Pak $T^\#$ je bijekce a $(T^\#)^{-1} = (T^{-1})^\#$.

Tvrzení 65. Necht' A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Psi = \Phi^\#|_{\Delta(B)}$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\Delta(A)$.

Tvrzení 66. Necht' S, T jsou topologické prostory a $h: S \rightarrow T$ je spojitý a na. Pak $\Phi: C_b(T) \rightarrow C_b(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_b(T)$ do Banachovy algebry $C_b(S)$. Jsou-li S a T lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory a h je homeomorfismus, pak $\Phi|_{C_0(T)}$ je izometrický izomorfismus Banachových algeber $C_0(T)$ a $C_0(S)$.

Věta 67. Necht' K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.

(ii) Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.

(iii) Prostory K a L jsou homeomorfní.

Definice 68. Komutativní algebra A se nazývá *polojednoduchá*, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A , tj. pokud $\bigcap \{\text{Ker } \varphi; \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Věta 69. Necht' A, B jsou Banachovy algebry a B je komutativní a polojednoduchá. Pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý. Též každé sdružené lineární multiplikativní zobrazení z A do B je automaticky spojitý.

Důsledek 70. Necht' A je komutativní polojednoduchá algebra. Pak všechny normy na A , ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.

5. Gelfandova transformace

Definice 71. Necht' A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\hat{x}: \Delta(A) \rightarrow \mathbb{K}$ předpisem $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\hat{x} = \varepsilon_x \upharpoonright_{\Delta(A)}$. Funkci $\hat{x}$ říkáme *Gelfandova transformace* prvku x .

Věta 72. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak $\text{Rng } \hat{x} = \sigma(x)$. Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \text{Rng } \hat{x} \subset \sigma(x)$.

Důsledek 73. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\|\hat{x}\|_{C_0(\Delta(A))} = r(x)$.

Definice 74. Necht' A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma: A \rightarrow C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \hat{x}$ nazýváme *Gelfandovou transformací* algebry A .

Tvrzení 75. Necht' A je Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Γ je spojitý homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.
- (b) Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.
- (c) Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A , tj. právě tehdy, pokud A je komutativní a polojednoduchá.

Věta 76. Necht' A je komplexní komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Γ je izomorfismus do, právě když existuje $K > 0$ takové, že $\|x^2\| \geq K \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (b) Γ je izometrie do právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Definice 77. Necht' A je grupoid a $M \subset A$. Pak množina $M^c = \{a \in A; ax = xa \text{ pro každé } x \in M\}$, tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M , se nazývá *komutant* množiny M .

Tvrzení 78. Necht' A je grupoid a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) $M \subset (M^c)^c$.
- (b) Množina $M \cap M^c$ komutuje.
- (c) Pokud komutuje M , pak komutuje též $(M^c)^c$.

Tvrzení 79. Necht' A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) M^c je podalgebra A .
- (b) Má-li A jednotku, pak $e \in M^c$.
- (c) Je-li A normovaná, pak M^c je uzavřená.

Tvrzení 80. Necht' A je algebra s jednotkou e a necht' $M \subset A$ komutuje. Pak $B = (M^c)^c$ je komutativní algebra s jednotkou e , $M \subset B$ a $B^\times = A^\times \cap B$. Tedy pro každé $x \in B$ platí, že $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 81. Necht' A je komplexní Banachova algebra a $x, y \in A$ spolu komutují. Pak platí následující:

- (a) $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ a $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
- (b) $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ a $r(xy) \leq r(x)r(y)$.

6. B^* -algebry

Věta 82. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^* = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j: H_j \rightarrow H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Löwigovy-Fréchetovy-Rieszovy věty.

Definice 83. Operátor T^* z předcházející věty nazýváme *hilbertovsky adjungovaným operátorem* k T .

Věta 84. Necht' H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

- (a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{**} = (T^*)^* = T$.
- (b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $(Id_{H_1})^* = Id_{H_1}$.

(d) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$.

(e) T^* je izomorfismus, právě když T je izomorfismus.

(f) T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

Definice 85. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $*$: $A \rightarrow A$ se nazývá *algebrová involuce*, pokud má následující vlastnosti:

- $(x + y)^* = x^* + y^*$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^* = y^* x^*$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^*)^* = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení $*$ je involuce).

Algebře, na které je definována algebrová involuce, budeme říkat *algebra s involucí*.

Fakt 86. Necht' A je algebra s involucí. Pak $(a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha})$ pro $(a, \alpha) \in A_e$ je algebrová involuce na A_e rozšiřující involuci z A .

Tvrzení 87. Necht' A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li e levá nebo pravá jednotka v A , pak e je jednotka a $e^* = e$.
- (b) Necht' A má jednotku. Pak $x^* \in A^\times$ právě tehdy, když $x \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.
- (c) $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$. Tedy $r(x^*) = r(x)$.

Tvrzení 88. Necht' A je komutativní polojednoduchá Banachova algebra. Pak každá algebrová involuce na A je spojitá.

Definice 89. Necht' A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá *samoadjungovaný*, pokud $x^* = x$.

Fakt 90. Necht' A je algebra s involucí a $x, y \in A$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Prvky $x + x^*$, $x^* x$, $x x^*$, a v komplexním případě i prvek $i(x - x^*)$ jsou samoadjungované.
- (b) Je-li x samoadjungovaný, pak je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Je-li A komplexní, pak existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Pro ně pak platí, že $x^* = u - iv$.
- (d) Jsou-li x, y samoadjungované a komutují spolu, pak xy je samoadjungovaný.
- (e) Je-li x samoadjungovaný, pak $yx y^*$ je samoadjungovaný.

Definice 91. Banachova algebra A s involucí se nazývá *B^* -algebra*, pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$

Lemma 92. Necht' A je normovaná algebra s involucí. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\|x^* x\| \geq \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (ii) $\|x x^*\| \geq \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (iii) $\|x^* x\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
- (iv) $\|x x^*\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Ve všech případech je pak $\|x^*\| = \|x\|$ pro každé $x \in A$.

Tvrzení 93. Necht' A je B^* -algebra bez jednotky. Pak na A_e s involucí z Faktu 86 existuje norma $\|\cdot\|$ rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 9) taková, že A_e je B^* -algebra.

Definice 94. Necht' A je algebra s involucí.

- Pokud A má jednotku, pak prvek $x \in A$ se nazývá *unitární*, splňuje-li rovnosti $x^* x = x x^* = e$, neboli $x^{-1} = x^*$.
- Prvek $x \in A$ se nazývá *normální*, pokud komutuje s x^* , tj. pokud $x^* x = x x^*$.

Fakt 95. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$ s involucí a $x, y \in A$.

- (a) Má-li A jednotku a jsou-li x, y unitární, pak xy je unitární.
- (b) Je-li x normální, pak x^n je normální pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Má-li A jednotku a je-li x normální a y unitární, pak xyx^* je normální.
- (d) Má-li A jednotku a je-li x normální a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak $\lambda e - x$ je normální.

Věta 96. Necht' A je B^* -algebra a $x \in A$.

- (a) Je-li x normální, pak $\|x^n\| = \|x\|^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.
- (b) Je-li A komplexní, pak $r(x^*x) = r(xx^*) = \|x\|^2$.
- (c) Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| = 1\}$. Je-li navíc A netriviální, pak $\|x\| = 1$.
- (d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Důsledek 97. Necht' A je netriviální komplexní komutativní B^* -algebra. Pak $\Delta(A) \neq \emptyset$.

Důsledek 98. Necht' A je komplexní algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je B^* -algebra.

Definice 99. Necht' A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi: A \rightarrow B$ nazýváme $*$ -homomorfismus, pokud zachovává operaci $*$, tj. $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ pro každé $x \in A$.

Důsledek 100. Necht' A je komplexní B^* -algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je $*$ -homomorfismus.

Důsledek 101. Necht' A, B jsou komplexní B^* -algebry a $\Phi: A \rightarrow B$ je $*$ -homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \leq 1$.

Důsledek 102. Necht' A je komplexní B^* -algebra a B je její B^* -podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále necht' $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A , pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Věta 103 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943)). Necht' A je komplexní komutativní B^* -algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický $*$ -izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.

Důsledek 104. Komplexní komutativní B^* -algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 105. Necht' A a B jsou komplexní komutativní B^* -algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) A a B jsou izometricky $*$ -izomorfní.
- (ii) A a B jsou algebraicky izomorfní.
- (iii) Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

Věta 106 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), I. Kaplansky (1953)). Každou komplexní B^* -algebru lze izometrickým $*$ -izomorfismem vnořit do $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný komplexní Hilbertův prostor H .

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky B^* -algeber

Tvrzení 107. Necht' A je normovaná algebra nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f, g: \Omega \rightarrow A$ a $t \in \Omega$. Pokud existují $f'(t)$ a $g'(t)$, pak $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.

Necht' A je (reálná) Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Pak definujeme

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Věta 108. Necht' A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou e a $x \in A$.

- (a) Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak $\exp x \exp y = \exp(x + y)$.
- (b) $\exp x \in A^\times$ a $(\exp x)^{-1} = \exp(-x)$.
- (c) Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ položíme $f(\lambda) = \exp(\lambda x)$. Pak $f'(\lambda) = \exp(\lambda x)x$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.

(d) Je-li A algebra se spojitou involucí, pak $(\exp x)^* = \exp x^*$.

(e) Je-li A komplexní algebra se spojitou involucí a x je samoadjungovaný, pak $\exp(ix)$ je unitární.

Věta 109 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951)). Necht' A je komplexní B^* -algebra, $x \in A$, a necht' $a, b \in A$ jsou normální a platí, že $ax = xb$. Pak $a^*x = xb^*$.

Definice 110. Necht' A je algebra a $M \subset A$. Algebrovým obalem M nazveme množinu

$$\text{alg } M = \bigcap \{B \supset M; B \text{ je podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 111. Necht' A je algebra a $M \subset A$. Pak

$$\text{alg } M = \text{span}\{x_1 x_2 \cdots x_n; x_1, \dots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definice 112. Necht' A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme uzavřený algebrový obal M jako

$$\overline{\text{alg}} M = \bigcap \{B \supset M; B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}.$$

Tvrzení 113. Necht' A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak $\overline{\text{alg}} M = \overline{\text{alg } M}$.

Fakt 114. Necht' A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi: \text{alg } M \rightarrow B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M . Jsou-li A, B normované algebry, pak každý spojitý algebrový homomorfismus $\Phi: \text{alg } M \rightarrow B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M .

Tvrzení 115. Necht' A je B^* -algebra a necht' $M \subset A$ komutuje a je uzavřená na involuci. Pak $\overline{\text{alg}} M$ je komutativní B^* -podalgebra A .

Věta 116. Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a $x \in A$. Necht' $\Omega_2 \subset \mathbb{K}$ je uzavřená a $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Necht' $\Phi_i: C(\Omega_i) \rightarrow A$ je algebrový homomorfismus takový, že $\Phi_i(1) = e$, $\Phi_i(\text{Id}) = x$, v komplexním případě navíc $\Phi_1(\overline{\text{Id}}) = \Phi_2(\overline{\text{Id}})$, a necht' Φ_i je sekvenciálně spojitý z topologie lokálně stejnoměrné konvergence na $C(\Omega_i)$ do nějaké Hausdorffovy topologie τ na A , $i = 1, 2$. Pak $\Phi_1(f|_{\Omega_1}) = \Phi_2(f)$ pro každou $f \in C(\Omega_2)$.

Necht' A je komplexní B^* -algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^*\}$. Pak můžeme definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \quad (1)$$

Věta 118 (spojitý kalkulus). Necht' A je komplexní B^* -algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi: C(\sigma(x)) \rightarrow A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem (1), má následující vlastnosti:

(a) Φ je izometrický $*$ -izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\text{alg}}\{e, x, x^*\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(\text{Id}) = x$.

(b) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.

(c) $f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.

(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).

(e) Pokud $\Psi: C(\sigma(x)) \rightarrow A$ je $*$ -homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(\text{Id}) = x$, pak $\Psi = \Phi$.

(f) Je-li $C \subset A$ komutativní B^* -podalgebra obsahující e a x , pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.

(g) Pokud $g \in C(f(\sigma(x)))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(h) Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g|_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 50.

(i) Pokud $y \in A$ komutuje s x , pak y komutuje i s $f(x)$.

(j) Je-li D komplexní B^* -algebra a $\Theta: A \rightarrow D$ je $*$ -homomorfismus takový, že $\Theta(e)$ je jednotka v D , pak $f(\Theta(x)) = \Theta(f(x))$. Speciálně, je-li $u \in A$ unitární, pak $f(uxu^*) = uf(x)u^*$.

(k) Je-li $0 \in \sigma(x)$ a $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\text{alg}}\{x, x^*\}$.

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_e . Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

Věta 119. Necht' A je komplexní B^* -algebra a $x \in A$.

(a) Prvek x je samoadjungovaný, právě když je normální a $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

(b) Má-li A jednotku, pak x je unitární, právě když je normální a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.

8. Nezáporné prvky B^* -algeber

Definice 120. Necht' A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je *nezáporný*, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Fakt 121. Prvek x komplexní B^* -algebry je *nezáporný*, právě když je *normální* a $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Tvrzení 122. Necht' A je algebra s involucí a $x, y \in A$ jsou *nezáporné*.

(a) Je-li $t \geq 0$, pak tx je *nezáporný*.

(b) Je-li A komplexní B^* -algebra, pak $x + y$ je *nezáporný*.

(c) Je-li A komplexní Banachova algebra a x a y spolu komutují, pak xy je *nezáporný*.

Fakt 123. Necht' A je komplexní B^* -algebra a $x \in A$.

(a) Je-li x *nezáporný*, pak $|x| = x$.

(b) Je-li x samoadjungovaný, pak $|x|^2 = x^2$.

(c) Je-li x *nezáporný*, pak $(\sqrt{x})^2 = x$. Navíc $\sqrt{x}$ je *jediné* *nezáporné* $y \in A$ takové, že $y^2 = x$.

(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sqrt{x^2} = |x|$.

Tvrzení 124. Necht' A je komplexní B^* -algebra. Pak pro každý samoadjungovaný prvek $x \in A$ existuje právě jedna dvojice *nezáporných* prvků $x^+, x^- \in A$ taková, že $x = x^+ - x^-$ a $x^-x^+ = x^+x^- = 0$. Navíc $x^+ + x^- = |x|$.

Věta 125 (I. Kaplansky (1953)). Necht' A je komplexní B^* -algebra a $x \in A$. Pak x^*x i xx^* jsou *nezáporné*.

Věta 126 (polární rozklad). Necht' A je komplexní B^* -algebra s jednotkou a $x \in A$ je *invertovatelný*. Pak existují *unitární* $u \in A$ a *nezáporný* $a \in A$ tak, že $x = ua$. Tento rozklad je určený *jednoznačně*.

II. Spojité lineární operátory na Hilbertových prostorech

1. Základní vlastnosti

Věta 127. Jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, pak platí, že

(a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,

(b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)^\perp$,

(c) $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp$,

(d) $\overline{\text{Rng } T^*} = (\text{Ker } T)^\perp$.

Definice 128. Necht' X, Y a Z jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $B: X \times Y \rightarrow Z$ se nazývá *bilineární*, pokud je lineární v první i ve druhé souřadnici, tj. zobrazení $x \mapsto B(x, y)$ je lineární pro každé $y \in Y$ a $y \mapsto B(x, y)$ je lineární pro každé $x \in X$. Zobrazení B se nazývá *seskvilineární*, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici. V případě, že $Z = \mathbb{K}$, se B nazývá *bilineární*, resp. *seskvilineární forma*.

Tvrzení 129 (polarizační vzorec). Necht' X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$ a $S: X \times X \rightarrow Y$ je *seskvilineární* zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) + S(y, x) = \frac{1}{2}(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y)).$$

Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že

$$S(x, y) = \frac{1}{4}(S(x + y, x + y) - S(x - y, x - y) + iS(x + iy, x + iy) - iS(x - iy, x - iy)).$$

Věta 130. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $T: X \rightarrow X$ je lineární operátor. Necht' dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- X je komplexní.
- X je Hilbertův a T je spojité a samoadjungovaný.

Jestliže $\langle Tx, x \rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.

Důsledek 131. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $S, T: X \rightarrow X$ jsou lineární operátory. Necht' dále platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

- X je komplexní.
- X je Hilbertův a S, T jsou spojité a samoadjungované.

Pokud $\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$ pro každé $x \in X$, pak $S = T$.

Definice 132. *Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $B: X \times Y \rightarrow Z$ je bilineární, resp. seskvilineární zobrazení. Řekneme, že B je omezené, pokud $\sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|B(x, y)\| < +\infty$. V tom případě klademe $\|B\| = \sup_{x \in B_X, y \in B_Y} \|B(x, y)\|$.*

Tvrzení 133. *Necht' H je Hilbertův prostor. Je-li S omezená seskvilineární forma na H , pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že $\|T\| = \|S\|$.*

Fakt 134. *Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\text{Ker } T^* \circ T = \text{Ker } T$.*

Věta 135. *Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) T je normální.
- (ii) $\langle T^*x, T^*y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$.
- (iii) $\|T^*x\| = \|Tx\|$ pro každé $x \in H$.

Definice 136. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *přibližným vlastním číslem* operátoru T , pokud existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že $(\lambda I - T)x_n \rightarrow 0$. Množina všech přibližných vlastních čísel operátoru T se nazývá *přibližné bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\text{ap}}(T)$.*

Fakt 137. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\lambda \in \mathbb{K}$ je přibližným vlastním číslem T , právě když $\lambda I - T$ není izomorfismus do.*

Tvrzení 138. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $S: X \rightarrow Y$ je lineární izomorfismus. Pak pro operátor $S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ platí, že $\sigma_{\text{ap}}(S \circ T \circ S^{-1}) = \sigma_{\text{ap}}(T)$.*

Definice 139. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x \rangle; x \in S_X\}$ se nazývá *numerický range* operátoru T .*

Fakt 140. *Necht' X je normovaný lineární prostor takový, že $\dim X_{\mathbb{R}} \neq 1$ (tj. X je buď komplexní, nebo reálný dimenze různé od 1). Pak S_X je křivkově souvislá.*

Tvrzení 141. *Necht' X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$.*

- (a) $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- (b) Množina N_T je křivkově souvislá.
- (c) $\sigma_p(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.
- (d) $\sigma_{\text{ap}}(T) \subset \overline{N_T}$. Je-li X Hilbertův, pak $\sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ap}}(T) \subset N_T$, a tedy $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Věta 142. *Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:*

- (a) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$.
- (b) $\text{Rng } T$ je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.
- (c) T je invertovatelný právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.
- (d) $\sigma(T) = \sigma_{\text{ap}}(T)$.
- (e) $\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem T^* příslušným vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.
- (f) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T , pak $\text{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \text{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

Věta 143. *Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:*

- (a) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$. Je-li H netriviální a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

(c) $r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in N_T\} = \|T\|$.

Tvrzení 144. Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $N_T \subset \mathbb{R}$.

Důsledek 145. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Je-li T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$, právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$. Je-li H komplexní, pak T je nezáporný (prvek algebry $\mathcal{L}(H)$), právě když $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.

Věta 146. Necht' H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) P je samoadjungovaná.
- (ii) P je normální.
- (iii) P je ortogonální.
- (iv) P je nezáporná.

Lemma 147. Necht' H je Hilbertův prostor, $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak $\text{Rng } S \perp \text{Rng } T$ právě tehdy, když $ST = 0$.

Definice 148. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^* \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^* = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^*$.

Věta 149. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je unitární.
- (ii) T je na a $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in H$.
- (iii) T je izometrie na.

Lemma 150. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Necht' Y je uzavřený podprostor H_2 takový, že $\text{Rng } T \subset Y$ a $S \in \mathcal{L}(H_1, Y)$ je definovaný jako $Sx = Tx$ pro $x \in H_1$. Pak $S^* = T^* \upharpoonright_Y$.

Věta 151. Necht' H je Hilbertův prostor. Pak $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{F}(H)}$.

Definice 152. Necht' A je množina a $f: A \rightarrow A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f , pokud $f(B) \subset B$, tj. $f \upharpoonright_B: B \rightarrow B$.

Fakt 153. Necht' H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ a $M \subset H$ je množina vlastních vektorů T (ne nutně všech).

- (a) Je-li $Y \subset H$ invariantní vůči T , pak $Y^\perp$ je invariantní vůči T^* .
- (b) $\overline{\text{span}} M$ je invariantní vůči T .
- (c) Je-li T normální, pak $\overline{\text{span}} M$ i $(\overline{\text{span}} M)^\perp$ jsou invariantní vůči T i T^* .
- (d) Necht' $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i T^* . Pak $(T \upharpoonright_Y)^* = T^* \upharpoonright_Y$. Je-li tedy T samoadjungovaný, resp. normální, pak $T \upharpoonright_Y \in \mathcal{L}(Y)$ je samoadjungovaný, resp. normální.

Věta 154 (spektrální rozklad normálního kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907)). Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$. Dále předpokládejme, že

- T je samoadjungovaný, nebo
- H je komplexní a T je normální.

Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T . Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\text{Rng } T}$ a pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n .

Je-li $\{\lambda_n\}_{n=1}^M$, $M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ prostá posloupnost všech vlastních čísel T a P_n je ortogonální projekce na $\text{Ker}(\lambda_n I - T)$, pak

$$I = \sum_{n=1}^M P_n,$$

kde řada konverguje bodově bezpodmínečně (tj. $x = \sum_{n=1}^M P_n x$ bezpodmínečně pro každé $x \in H$) a

$$T = \sum_{n=1}^M \lambda_n P_n,$$

kde řada konverguje bezpodmínečně v prostoru $\mathcal{L}(H)$.

Věta 155 (reprezentace kompaktního operátoru; E. Schmidt (1907)). Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Pak existují $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_1$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H_2$ takové, že pro každé $x \in H$ je

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Dále $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^N$ je posloupnost všech nenulových vlastních čísel operátoru $T^* \circ T$, přičemž pro každé $\lambda > 0$ je počet prvků množiny $\{n \in \mathbb{N}; \lambda_n^2 = \lambda\}$ roven $\dim \text{Ker}(\lambda I - T^* \circ T)$. Tedy posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je určena jednoznačně až na permutaci a je-li $N = \infty$, pak $\lambda_n \rightarrow 0$.

2. Omezený borelovský kalkulus

Definice 156. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Na prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ definujeme následující lokálně konvexní topologie:

- silná operátorová topologie τ_{SOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_x(T) = \|Tx\|; x \in X\}$,
- slabá operátorová topologie τ_{WOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_{x,f}(T) = |f(Tx)|; x \in X, f \in Y^*\}$.

Symbolem $\text{Bf}_b(X)$ budeme značit množinu všech omezených borelovských funkcí na topologickém prostoru X .

Definice 157. Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Řekneme, že zobrazení $\Psi: \text{Bf}_b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ je borelovský funkční kalkulus pro T , pokud Ψ je algebrový homomorfismus, $\Psi(1) = I$, $\Psi(\text{Id}) = T$ a je-li $\{f_n\} \subset \text{Bf}_b(\sigma(T))$ omezená posloupnost konvergující bodově k $f \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$, pak $\Psi(f_n) \rightarrow \Psi(f)$ v topologii τ_{WOT} .

Necht' A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou, τ je Hausdorffova topologie na A , $x, y \in A$ a $F \subset \mathbb{K}$ je uzavřená. Homomorfismu $\Phi: \text{Bf}_b(F) \rightarrow A$ budeme říkat borelovský kalkulus na F pro τ a dvojici (x, y) , pokud $\Phi(1) = e$, $\Phi(\text{Id}) = x$, $\Phi(\overline{\text{Id}}) = y$ a $\Psi(f_n) \xrightarrow{\tau} \Psi(f)$ kdykoli $\{f_n\} \subset \text{Bf}_b(F)$ je omezená posloupnost konvergující bodově k $f \in \text{Bf}_b(F)$.

Věta 158. Necht' A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou, τ je nějaká Hausdorffova topologie na A (neostře) slabší než normová a $x, y \in A$. Předpokládejme, že existuje borelovský kalkulus Ψ na nějaké uzavřené $F \subset \mathbb{K}$ pro τ a dvojici (x, y) . Pak existuje borelovský kalkulus Φ na $\sigma(x)$ pro τ a dvojici (x, y) . Je-li dále Ψ_1 nějaký borelovský kalkulus na F_1 pro τ a dvojici (x, y) , pak $\Psi_1(f) = \Phi(f \upharpoonright_{\sigma(x)})$ pro každou $f \in \text{Bf}_b(F_1)$.

Lemma 159. Necht' H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$. Jestliže $x_n \rightarrow x \in H$ slabě a $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, pak $x_n \rightarrow x$ (v normě).

Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor. Pro pevná $x, y \in H$ vezměme funkci $\varphi_{x,y}: C(\sigma(T)) \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(T)x, y \rangle.$$

Existuje regulární borelovská komplexní míra $\mu_{x,y}$ na $\sigma(T)$ taková, že pro každé $f \in C(\sigma(T))$ je

$$\varphi_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y}$$

a $\|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$.

Pro $f \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$ existuje jednoznačně určený operátor $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ takový, že pro každé $x, y \in H$ je

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y}. \quad (2)$$

Navíc $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$.

Věta 160. *Necht' H je komplexní Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor a $f \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$. Zobrazení $\Phi: \text{Bf}_b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, kde $\Phi(g) = g(T)$ je definováno výše, je borelovský funkční kalkulus pro T , který má následující vlastnosti:*

- (a) Φ je $\star$ -homomorfismus a označíme-li Ψ spojitý kalkulus pro T z Věty 118, pak $\Phi \upharpoonright_{C(\sigma(T))} = \Psi$. Je-li H netriviální, pak $\|\Phi\| = 1$.
- (b) Je-li $\{f_n\} \subset \text{Bf}_b(\sigma(T))$ omezená posloupnost konvergující bodově k f , pak $\Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f)$ v topologii τ_{SOT} .
- (c) Pokud Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T , který je navíc $\star$ -homomorfismus, pak $\Psi(g) = \Phi(g)$ pro každou $g \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$.
- (d) $f(T)$ je normální. Je-li f reálná, pak $f(T)$ je samoadjungovaný. Je-li $|f| = 1$, pak $f(T)$ je unitární.
- (e) $\sigma(f(T)) \subset \overline{f(\sigma(T))}$.
- (f) Pokud $g \in \text{Bf}_b(\overline{\text{Rng } f})$, pak $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.
- (g) Pokud $S \in \mathcal{L}(H)$ komutuje s T , pak S komutuje i s $f(T)$.
- (h) Je-li $U \in \mathcal{L}(H)$ unitární, pak $f(UTU^*) = Uf(T)U^*$.

3. Polární rozklad

Věta 161 (polární rozklad). *Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální, právě když existují unitární $U \in \mathcal{L}(H)$ a nezáporný $A \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = UA = AU$. Tento rozklad je určen jednoznačně, právě když T je prostý.*

Důsledek 162. *Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální, právě když existuje unitární $U \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T^* = UT = TU$.*

Věta 163. *Necht' H_1, H_2 jsou komplexní Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $A \in \mathcal{L}(H_1)$ a $U \in \mathcal{L}(\overline{\text{Rng } A}, \overline{\text{Rng } T})$ taková, že $T = U \circ A$, A je nezáporný a U je unitární. Je-li T izomorfismus, pak A je automorfismus H_1 .*

Tvrzení 164. *Necht' $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Pak existují unitární $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a nezáporný $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tak, že $T = UA$.*

4. Spektrální rozklad operátoru

Definice 165. *Necht' $\mathcal{S}$ je σ -algebra a X je topologický vektorový prostor. Zobrazení $\mu: \mathcal{S} \rightarrow X$ se nazývá vektorová míra, pokud $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$.*

Fakt 166. *Necht' X, Y jsou topologické vektorové prostory, $\mu: \mathcal{S} \rightarrow X$ je vektorová míra a $T: X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení. Pak $T \circ \mu$ je též vektorová míra.*

Tvrzení 167. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$, $\mathcal{S}$ je σ -algebra a $\mu: \mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{L}(X, Y), \tau_{\text{WOT}})$ je vektorová míra. Pak pro každé $x \in X$ a $f \in Y^*$ je funkce $\mu_{x,f}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ daná předpisem*

$$\mu_{x,f}(A) = f(\mu(A)x)$$

komplexní míra na $\mathcal{S}$. Zobrazení $B: (x, f) \mapsto \mu_{x,f}$ je bilineární zobrazení z $X \times Y^$ do normovaného lineárního prostoru komplexních měr na $\mathcal{S}$. Je-li navíc X Banachův, pak $\sup_{A \in \mathcal{S}} \|\mu(A)\| < +\infty$ a B je omezené.*

Věta 168 (B. J. Pettis (1938)). *Necht' X je normovaný lineární prostor a $\mu: \mathcal{S} \rightarrow (X, w)$ je vektorová míra. Pak μ je i vektorová míra jakožto zobrazení do $(X, \|\cdot\|)$.*

Důsledek 169. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $\mathcal{S}$ je σ -algebra a $\mu: \mathcal{S} \rightarrow (\mathcal{L}(X, Y), \tau_{\text{WOT}})$ je vektorová míra. Pak μ je i vektorová míra jakožto zobrazení do $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_{\text{SOT}})$.*

Symbollem $\text{Bs}(X)$ budeme značit σ -algebru borelovských podmnožin topologického prostoru X .

Definice 170. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$. Rozkladem identity na X rozumíme vektorovou míru $E: \text{Bs}(\mathbb{K}) \rightarrow (\mathcal{L}(X), \tau_{\text{SOT}})$ s následujícími vlastnostmi:*

- (i) $E(A)$ je projekce pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
- (ii) $E(\mathbb{K}) = I$.
- (iii) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro libovolné borelovské $A, B \subset \mathbb{K}$.

Je-li X Hilbertův a všechny projekce $E(A)$ jsou ortogonální, pak se E nazývá ortogonální rozklad identity na X .

Fakt 171. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a E je rozklad identity na X .*

- (a) Projekce $E(A)$ a $E(B)$ pro $A, B \in \text{Bs}(\mathbb{K})$ spolu komutují.
- (b) Pro $A, B \in \text{Bs}(\mathbb{K})$, $B \subset A$ je $\text{Rng } E(B) \subset \text{Rng } E(A)$ a $\text{Ker } E(B) \supset \text{Ker } E(A)$.
- (c) Pro $\{A_n\} \subset \text{Bs}(\mathbb{K})$ je $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Ker } E(A_n) \subset \text{Ker } E(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
- (d) Pro každé $x \in X$ a $f \in X^*$ je $E_{x,f}$ regulární borelovská komplexní míra na $\mathbb{K}$.

Necht' dále X je Hilbertův a E je ortogonální.

- (e) Jsou-li $A, B \in \text{Bs}(\mathbb{K})$ disjunktní, pak $\text{Rng } E(A) \perp \text{Rng } E(B)$.
- (f) Pro každé $x \in X$ je $E_{x,x}$ konečná regulární borelovská nezáporná míra na $\mathbb{K}$ a $\|E_{x,x}\| = \|x\|^2$.

Lemma 172. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $E: \text{Bs}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ má následující vlastnosti:*

- (i) $E(A)$ je projekce pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
- (ii) $E(\mathbb{K}) = I$.
- (iii) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ pro libovolné borelovské $A, B \subset \mathbb{K}$.
- (iv) Pro všechna $x \in X$ a $f \in X^*$ je $E_{x,f}: \text{Bs}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $E_{x,f}(A) = f(E(A)x)$ borelovská komplexní míra na $\mathbb{K}$.

Pak E je rozklad identity na X .

Je-li X komplexní Hilbertův prostor, pak stačí místo (iv) předpokládat, že pro každé $x \in X$ je $E_{x,x}: \text{Bs}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{C}$, $E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x \rangle$ konečná borelovská míra na $\mathbb{C}$.

Tvrzení 173. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory nad $\mathbb{K}$, E je rozklad identity na X a $S: X \rightarrow Y$ je lineární izomorfismus. Pak $F: A \mapsto S \circ E(A) \circ S^{-1}$, $A \in \text{Bs}(\mathbb{K})$ je rozklad identity na Y . Jsou-li navíc X, Y Hilbertovy, S izometrie (a tedy unitární) a E ortogonální, pak i F je ortogonální.*

Definice 174. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Řekneme, že E je rozklad identity vzhledem k operátoru T , pokud E je rozklad identity na X takový, že pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$ platí:*

- (i) projekce $E(A)$ komutuje s T ,
- (ii) definujeme-li $T_A = T \upharpoonright_{\text{Rng } E(A)}$, pak $\sigma(T_A) \subset \bar{A}$.

Tvrzení 175. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ a E je rozklad identity vzhledem k T .*

- (a) $\sigma(T_A) \subset \sigma(T)$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
- (b) V komplexním případě je $E(\sigma(T)) = I$.
- (c) Je-li $E(\sigma(T)) = I$ (speciálně je-li X komplexní), pak pro každou (relativně) otevřenou neprázdnou $G \subset \sigma(T)$ je $E(G) \neq 0$.
- (d) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\text{Ker}(\lambda I - T) \subset \text{Rng } E(\{\lambda\})$. Speciálně, je-li λ vlastní číslo T , pak $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

Lemma 176. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X)$, $Z \subset X$ je podprostor invariantní vůči T a necht' $S: X \rightarrow Y$ je lineární izomorfismus. Pak $S(Z)$ je invariantní vůči $U = S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ a $\sigma(U \upharpoonright_{S(Z)}) = \sigma(T \upharpoonright_Z)$.*

Tvrzení 177. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $S: X \rightarrow Y$ je lineární izomorfismus. Je-li E rozklad identity vzhledem k T , pak $F: A \mapsto S \circ E(A) \circ S^{-1}$, $A \in \text{Bs}(\mathbb{K})$ je rozklad identity vzhledem k operátoru $U = S \circ T \circ S^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$.*

Věta 178. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li Ψ borelovský funkční kalkulus pro $T \in \mathcal{L}(X)$, pak existuje rozklad identity E vzhledem k T takový, že pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ je*

$$\phi(Tx) = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE_{x,\phi}(\lambda).$$

Tento rozklad má následující vlastnosti:

- (a) $E(A) = \Psi(\chi_{A \cap \sigma(T)})$ pro každou borelovskou $A \subset \mathbb{K}$.
- (b) Pro každou $f \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$ a pro každé $x \in X$ a $\phi \in X^*$ je

$$\phi(\Psi(f)x) = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,\phi}.$$

(c) Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $E(\{\lambda\})$ projekce na $\text{Ker}(\lambda I - T)$.

(d) $\lambda \in \sigma_p(T)$ právě tehdy, když $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

(e) Je-li X komplexní a λ izolovaný bod $\sigma(T)$, pak $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(f) Je-li X Hilbertův a Ψ je $\star$ -homomorfismus, pak E je ortogonální.

Na druhou stranu, je-li E je rozklad identity na X takový, že $E(K) = I$ pro nějakou kompaktní $K \subset \mathbb{K}$, pak existuje jednoznačně určené zobrazení $\Psi: \text{Bf}_b(K) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ takové, že platí (b). Toto Ψ je borelovský funkční kalkulus pro $T = \Psi(\text{Id})$, E je rozklad identity vzhledem k T a platí (a)–(e). Je-li navíc X komplexní Hilbertův prostor a E je ortogonální, pak Ψ je $\star$ -homomorfismus a T je normální.

Důsledek 179. Necht' H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor. Pak existuje právě jeden ortogonální rozklad identity E na H takový, že existuje kompaktní $K \subset \mathbb{C}$ obsahující $\sigma(T)$, $E(K) = I$ a pro každé $x \in H$ je

$$\langle Tx, x \rangle = \int_K \lambda \, dE_{x,x}(\lambda).$$

Tento rozklad je dán vzorcem $E(A) = \chi_A(T)$. Je to ortogonální rozklad identity vzhledem k T . Pro každou $f \in \text{Bf}_b(\sigma(T))$ a pro každé $x, y \in H$ je

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f \, dE_{x,y}.$$

Dále platí (c), (d), (e) z Věty 178.

Definice 180. Necht' $(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory, X je topologický vektorový prostor, $\mu: \mathcal{S} \rightarrow X$ je vektorová míra a $f: S \rightarrow T$ je měřitelné zobrazení. Zobrazení $f(\mu): \mathcal{T} \rightarrow X$ definované vzorcem $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pro $A \in \mathcal{T}$ se nazývá obrazem vektorové míry μ .

Tvrzení 181. Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, E je rozklad identity vzhledem k $T \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $E(K) = I$ pro nějakou kompaktní $K \subset \mathbb{K}$, a $f \in \text{Bf}_b(K)$. Pak $f(E)$ je rozklad identity vzhledem k $f(T) = \Psi(f)$, kde Ψ je borelovský funkční kalkulus pro T z Věty 178.