

1. ŘADY

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \\ & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+100} \right)^n, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7} \right)^n, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}, \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n, \\ & \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}, \quad \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n - 2^n}, \quad \text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n} \end{aligned}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-1}), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}, \\ & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}, \quad \text{f)* } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n-1)}, \\ & \text{h) } \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \log n}, \\ & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+1)}, \quad \text{m) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \log \frac{1}{n}, \quad \text{n) } \sum_{n=3}^{\infty} (\log(\log n))^{-\log n} \end{aligned}$$

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, \\ & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-3)^n}{n} x^n \end{aligned}$$

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}, \\ & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}, \quad \text{f) } \sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+17n}}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n}), \\ & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1} - n}{\sqrt{n^2+n} - n}, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2+1}} - 1 \right), \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}, \\ & \text{l) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad \text{m) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{2 - \cos(n\pi)}{4n}, \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}), \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \arctg n, \quad \text{d) } \sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}, \quad \text{e) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n \frac{\pi}{3})}{\log(\log n)}, \quad \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\log^2 n} \end{aligned}$$

6. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n} \right)^{(n^2)}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \log \cos \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \\ & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+1}) \right), \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctg n \cdot \arctg \frac{1}{n}, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), \\ & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{\sqrt{n^2+11} - \sqrt{n^2+1}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \arcsin \frac{1}{n}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)^\alpha \log n, \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \end{aligned}$$

7. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(n \sin \frac{1}{n} \right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{n^3}} \right), \\ & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \left(\arcsin \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \log \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

Nápovědy: 1. l) Pracujte s výrazem $\sin(n+2) - \sin n$. 2. f) Pracujte s výrazem $\sin(n+2)^2 - \sin n^2$ nebo $\sin((n+2)^2 - n^2)$.
h) Vyjádřete a_{n+1} pomocí a_n . n) kondenzační kritérium nebo $a_n = \exp(-\log n \log \log \log n) \leq \frac{1}{n^2}$ pro velká n . 4. d) Zkoumejte hodnoty $\cos(n^2\pi)$. g) Pro důkaz monotonie upravit. h) znaménko, monotonie čitatele a jmenovatele l), m) sečíst po 2 nebo odečíst „dominantní“ řadu nebo rozšířit pro vzorec $a^2 - b^2$ n) sečíst po 2 nebo rozdělit o) odečíst a přičíst $n\pi$ 5. b) upravit; $(-1)^n = \cos(\pi n)$ a vzorec pro $\cos(a+b)$ d), f) odečíst „dominantní“ řadu 6. g) derivace 7. f) rozvoje 3. řádu

Výsledky: 1. a) D b) K c) D d) K e) K f) K g) K h) D i) K j) K k) K l) D m) K, právě když $0 < x < \frac{1}{e}$
n) D o) K p) K q) K
2. a) K b) D c) K d) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ e) D f) D g) K h) K i) K j) K k) K l) K m) K n) K
3. a) AK pro $x \neq \pm 1$, D pro $x = \pm 1$ b) AK pro $|x| \leq 1$, D jinak c) AK pro $|x| < 1$, D jinak d) AK pro $x \in \mathbb{R}$ e) AK pro $|x| \leq \frac{1}{2}$, D jinak f) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = 1$, D jinak g) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = \pm 1$, D jinak h) AK pro $|x| < \frac{1}{3}$, D jinak
4. a) NAK b) NAK c) AK d) NAK e) AK f) D g) NAK h) NAK i) NAK j) AK k) NAK l) NAK m) D
n) D o) AK pro $a = 0$, NAK pro $a \neq 0$
5. a) NAK b) NAK c) NAK d) NAK e) NAK f) NAK
6. a) D b) K c) K d) D e) D f) AK g) NAK h) NAK i) AK pro $\alpha < -1$, D jinak j) K k) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ l) K, právě když $a + b > 1$
7. a) K b) K c) D d) D e) K f) K

2. PRIMITIVNÍ FUNKCE

1. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) $x^3 + 2x + \frac{17}{x}$, b) $18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x$, c) $\sqrt{x} + \sin(2x)$, d) $\cos(3x) + e^{2x}$, e) $(x+5)^3$,
 f) $\sin(2x+7)$, g) $\frac{1}{\cos^2(3-2x)}$, h) $\frac{1}{2x-1}$, i) $\sqrt[3]{1-3x}$, j) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, k) $\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}$, l) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$, m) $\frac{x^2}{1+x^2}$,
 n) $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$, o) $\frac{1}{2+3x^2}$, p) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$, q) $\sqrt{x^6}$, r) $\frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}$, s) $\frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$, t) $\operatorname{tg}^2 x$, u) $\cot^2 x$,
 v) $|\cos x|$, w) $\sqrt{1 - \sin 2x}$, x) $\sin^2 x$, y) $\cos^4 x$, z) $\frac{1}{1 + \cos x}$

2. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) xe^{-x^2} , b) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1}$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$, e) $\frac{x^2}{\cos^2(x^3)}$, f) $\frac{x}{1 + 4x^2}$, g) $\frac{x}{1 + x^4}$, h) $\frac{1}{x \log x}$, i) $\frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$,
 j) $\frac{\sin \log x}{x}$, k) $\frac{e^x}{e^x + 1}$, l) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, m) $\frac{x+1}{x^2 + 2x + 9}$, n) $\frac{x^2}{x+1}$, o) $\frac{x^3}{x^8 + 2}$, p) $\sin^3 x$, q) $\frac{1}{x \log x \log \log x}$,
 r) $\frac{e^{2x}}{1 + e^x}$, s) $\frac{\log x}{x\sqrt{1 + \log x}}$, t) $\cos^5 x \sqrt{\sin x}$, u) $\operatorname{tg}^5 x$, v) $\frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$, w) $\frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos(2x)}}$

3. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) xe^x , b) $\frac{x}{e^x}$, c) $\log x$, d) $x \log x$, e) $x^2 e^{-2x}$, f) $\frac{\cos x}{e^x}$, g) $e^{3x+1} \sin x$, h) $\log^2 x$, i) $x^a \log x$, j) $e^{ax} \sin bx$,
 k) $\operatorname{arctg} x$, l) $\arcsin x$, m) $e^{\sqrt{x}}$, n) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, o) $x^5 e^{x^3}$, p) $x \sin^2 x$, q) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, r) $\sin \log x$,
 s) $x e^x \sin x$, t) $\sqrt{1 - x^2}$, u)* $\frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) $\frac{x+1}{x^2 + 4}$, b) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, c) $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$, d) $\frac{1}{3x^2 - 2x - 1}$, e) $\frac{x}{x^2 - x + 2}$, f) $\frac{x^5}{x^2 + x - 2}$, g) $\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)}$,
 h) $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, i) $\frac{x}{x^4 - 2x^2 - 1}$, j) $\frac{x^{17} - 5}{x - 1}$, k) $\frac{x^{17} - 5}{x^2 - 1}$, l) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$, m) $\frac{x}{x^3 - 1}$,
 n) $\frac{3x+2}{(x^2 + x + 2)^2}$, o) $\frac{1}{1 + x^4}$, p) $\frac{x^8 + x - 1}{x^6 + 1}$

5. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) $\frac{1}{\sin x}$, b) $\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$, c) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$, d) $\frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x - 1}$, e) $\frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$, f) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$,
 g) $\frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}$, h) $\frac{1}{\cos x \sin^3 x}$, i) $\frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$, j) $\frac{1}{(2 + \cos x) \sin x}$, k) $\frac{1}{\sin x + \tan x}$, l) $\frac{\sin x}{1 + \sin x}$,
 m) $\frac{x}{1 + \sin(x^2 + 1)}$, n) $\frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$, o) $\frac{1}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$, p) $\frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, $a, b > 0$,
 q) $\frac{1}{1 + \varepsilon \cos x}$, $0 < \varepsilon < 1$, r) $\frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$, s) $\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$, t) $\frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, u) $\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

6. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

- a) $\frac{1}{1 + \sqrt{x+3}}$, b) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$, c) $\frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$, d) $\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$, e) $\frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$,
 f) $\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, g) $\frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}}$, h) $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$, i) $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, j) $\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, k) $\sqrt{x^2 - 2x}$,
 l) $\sqrt{x^2 - 2x - 1}$, m) $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$, n) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$, o) $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$, p) $\frac{1}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}$,
 q) $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$, r) $\frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$, s) $\frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}$, t) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(5-x)}}$

Návody: 5. a) $\int \frac{1}{t^2-1} dt$ b) per partes c) $\int \frac{-t}{1+t^2} dt$ d) $\int \frac{1}{t(t-1)} dt$ e) $6 \int \frac{1}{t(1+t+t^2+t^3)} dt$ f) $\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt$
g) $\int \frac{t}{1+t^4} dt$ h) $\int \frac{1}{t^3(1-t^2)} dt$ i) $\int \frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} dt$ j) $-\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)} dt$ k) $\int \frac{1-t^2}{2t} dt$
l) $-\int \frac{2}{(t+1)^2} dt$ nebo $\int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)} dt$ m) $\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\sin u} du$, $\int \frac{1}{(t+1)^2} dt$ n) $\int \frac{1}{3t^2+2t+2} dt$ o) $\int \frac{1+t^2}{(2+t^2)^2} dt$ p) $\int \frac{1}{a^2t^2+b^2} dt$
q) $\int \frac{2}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2} dt$ r) $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)} dt$ s) $\int \frac{4t(t^2-1)}{(1+t^2)^2(t^2-2t-1)} dt$ t) $\int \frac{t}{1+t^3} dt$ u) $\int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$
6. a) $\int \frac{2t}{1+t} dt$ b) $\int \frac{2(t^2-t+1)}{(t-2)(2t-1)} dt$ c) $\int 6 \frac{t^6-1}{t^4(t+1)} dt$ d) $\int \frac{-2}{1+t^2} dt$ e) $\int \frac{6t^3(t^6-1)}{(t+1)} dt = \int 6t^3(t^3-1)(t^2-t+1) dt$
f) $\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(1-t)} dt$ g) $\int \frac{6t^5(t^2+t+1)}{t+1} dt$ h) $\int \frac{3t}{1-t^3} dt$ i) $\int \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt$ j) $\int \frac{6t^3}{(t^3+1)(t^3-1)} dt$
k) $\int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3} dt$ nebo $\int \frac{-t^2(t+2)^2}{4(t+1)^3} dt$ l) $\int \frac{16t^2}{(1-t^2)^3} dt$ nebo $\int \frac{-(t^2+2t-1)^2}{4(t+1)^3} dt$ m) $\int \frac{t^2+1}{4(t^4+1)} dt$ n) $\int \frac{2(t^2-1)^2}{(1-2t)^3} dt$ o) $\int \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3} dt$
p) $\int \frac{-4\sqrt{2}t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)} dt$ nebo $\int \frac{t^2+2t-1}{(1-t)(1+t^2)} dt$ q) $\int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3} dt$ r) lze využít vzorec pro $a^2 - b^2$, kde $a = 1 + \sqrt{x}$ a $b = \sqrt{x+1}$ s) $\int \frac{2t(t^2-3t+2)}{(3-2t)(3t-4)} dt$ t) $20 \int \frac{t^4}{(1+t^4)^2} dt$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17 \log|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ b) $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3 \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ na $(0, +\infty)$ d) $\frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{4}(x+5)^4$ na $\mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{2} \cos(2x+7)$ na $\mathbb{R}$
g) $-\frac{1}{2} \operatorname{tg}(3-2x)$ na $(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ h) $\frac{1}{2} \log|2x-1|$ na $(-\infty, \frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2}, +\infty)$ i) $-\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1-3x)^4}$ na $\mathbb{R}$
j) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$ na $(0, +\infty)$ k) $-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ l) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ na $(-\infty, \frac{2}{5})$
m) $x - \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0, +\infty)$ o) $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{3}{2}}x)$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{\frac{3}{2}}x)$ na $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$
q) $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ r) $-\frac{1}{\log 5}5^{-x} + \frac{1}{5 \log 2}2^{-x}$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ na $\mathbb{R}$ t) $-x + \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
u) $-x - \operatorname{cotg} x$ na $(0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k \sin x + 2k$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ w) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}k$ pro $x \in (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ x) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$ na $\mathbb{R}$ y) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$ na $\mathbb{R}$ z) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ na $(-\pi, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x$ na $\mathbb{R}$ c) $-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d) $\sqrt{x^2+5}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(x^3)$ na $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}), k \in \mathbb{Z}$ f) $\frac{1}{8} \log(1+4x^2)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\log x|$ na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$
i) $\log(x^2+x+1)$ na $\mathbb{R}$ j) $-\cos \log x$ na $(0, +\infty)$ k) $\log(e^x+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ na $(0, +\infty)$ m) $\frac{1}{2} \log(x^2+2x+9)$ na $\mathbb{R}$
n) $\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|$ na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, +\infty)$ o) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{2}}$ na $\mathbb{R}$ p) $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$ na $\mathbb{R}$ q) $\log|\log \log x|$ na $(1, e)$ a na $(e, +\infty)$ r) $e^x - \log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$ na $(\frac{1}{e}, +\infty)$ t) $\frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11} \sin^{\frac{11}{2}} x$ na $(0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $\frac{1}{4} \cos^{-4} x - \cos^{-2} x - \log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ w) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \sin x$ na $\mathbb{R}$

3. a) $e^x(x-1)$ na $\mathbb{R}$ b) $-e^{-x}(1+x)$ na $\mathbb{R}$ c) $x(\log x - 1)$ na $(0, +\infty)$ d) $\frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2})$ na $(0, +\infty)$ e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2})$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{10}e^{3x+1}(3 \sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ h) $x(\log^2 x - 2 \log x + 2)$ na $(0, +\infty)$
i) $\frac{x^{1+a}}{1+a}(\log x - \frac{1}{1+a})$ na $(0, +\infty)$ pro $a \neq -1$, $\frac{1}{2} \log^2 x$ na $(0, +\infty)$ pro $a = -1$ j) $e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2}$ na $\mathbb{R}$ k) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$ m) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$ na $(0, +\infty)$ n) $x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{4}(x^2-x \sin 2x + \sin^2 x)$ na $\mathbb{R}$ q) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1}{3} \log(x+1) - \frac{1}{3}x$ na $(0, +\infty)$
r) $\frac{1}{2}x(\sin \log x - \cos \log x)$ na $(0, +\infty)$ s) $\frac{1}{2}e^x(x \sin x + (1-x) \cos x)$ na $\mathbb{R}$ t) $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$ na $(-1, 1)$
u) $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$

4. a) $\frac{1}{2} \log(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ na $\mathbb{R}$ b) $x + \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ c) $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ d) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$ na $(-\infty, -\frac{1}{3})$, na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, +\infty)$ e) $\frac{1}{2} \log(x^2-x+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{32}{3} \log|x+2| + \frac{1}{3} \log|x-1|$ na $(-\infty, -2)$, na $(-2, 1)$ a na $(1, +\infty)$
g) $-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ h) $2 \log \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+2}$ na $(-\infty, -4)$, na $(-4, -2)$ a na $(-2, +\infty)$ i) $\frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{|x^2-\sqrt{2}-1|}{x^2+\sqrt{2}-1}$ na $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}})$, na $(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}})$ a na $(\sqrt{1+\sqrt{2}}, +\infty)$
j) $-4 \log|x-1| + \sum_{k=1}^{17} \frac{x^k}{k}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ k) $3 \log|x+1| - 2 \log|x-1| + \sum_{k=1}^8 \frac{x^{2k}}{2k}$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ l) $x + \frac{1}{6} \log|x| - \frac{9}{2} \log|x-2| + \frac{28}{3} \log|x-3|$ na $(-\infty, 0)$, na $(0, 2)$, na $(2, 3)$ a na $(3, +\infty)$
m) $\frac{1}{6} \log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ n) $-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2x+1}{7+(2x+1)^2} + \frac{2\sqrt{7}}{49} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$
o) $\frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$ na $\mathbb{R}$ (nápořád k rozkladu: pracujte s výrazem $(x^2+1)^2$)
p) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{12} \log(x^2-\sqrt{3}x+1) - \frac{\sqrt{3}+1}{12} \log(x^2+\sqrt{3}x+1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})$ na $\mathbb{R}$

5. a) $\frac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ na $(0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) - \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$ na $\mathbb{R}$ c) $-\frac{1}{2} \log(1+\cos^2 x)$ na $\mathbb{R}$ d) $\log \frac{1-\cos x}{|\cos x|}$ na $(-\frac{\pi}{2}, 0) + 2k\pi$, na $(0, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ a na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e) $x - 3 \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} - 3 \log(e^{\frac{x}{6}} + 1) - \frac{3}{2} \log(e^{\frac{x}{3}} + 1)$ na $\mathbb{R}$

- f) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \log \frac{\lg^2 x + 1}{(\lg x + 1)^2}$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ g) $\frac{1}{2} \arctg \sin^2 x$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\lg x| - \frac{1}{2\sin^2 x}$ na $(0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ i) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\lg x}{\sqrt{3}} - x + k\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (2k + 1)\frac{(4-\sqrt{3})\pi}{2\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$ j) $\frac{1}{3} \log(2 + \cos x) + \frac{1}{6} \log(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \log(1 + \cos x)$ na $(0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ k) $\frac{1}{2} \log|\lg \frac{x}{2}| - \frac{1}{4} \lg^2 \frac{x}{2}$ na $(0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ l) na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) + 2k\pi$: $F(x) = x + \frac{2}{1+\lg \frac{x}{2}}$ pro $x \neq \pi + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ m) na $(-\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1 - 2\pi}, -\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1})$, na $(-\sqrt{\frac{3}{2}\pi - 1}, \sqrt{\frac{3}{2}\pi - 1})$ a na $(\sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1}, \sqrt{2k\pi + \frac{3}{2}\pi - 1 + 2\pi})$, $k \in \mathbb{N}$: $F(x) = -\frac{1}{1+\lg \frac{x^2+1}{2}}$ pro $x \neq \pm\sqrt{\pi + 2k\pi - 1}$, $F(\pm\sqrt{\pi + 2k\pi - 1}) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ n) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{1+3\lg \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ pro $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, $k \in \mathbb{Z}$ o) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{\lg x}{\sqrt{2}} - \frac{\lg x}{4(2+\lg^2 x)} + k\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$ p) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{ab} \arctg(\frac{a}{b} \lg x) + k\frac{\pi}{ab}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{ab}$, $k \in \mathbb{Z}$ q) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctg(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \lg \frac{x}{2}) + k\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ pro $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$, $F(\pi + 2k\pi) = (k + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $k \in \mathbb{Z}$ r) na $\mathbb{R}$: $F(x) = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \lg x) - k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, $k \in \mathbb{Z}$ s) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = \frac{\lg \frac{x}{2} - 1}{1+\lg^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\lg \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\lg \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right|$ pro $x \neq \pi + 2l\pi$, $F(\pi + 2l\pi) = 0$, $k, l \in \mathbb{Z}$ t) na $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$: $F(x) = G(x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(x) = G(x) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$, kde $G(x) = \frac{1}{6} \log \frac{\lg^2 x - \lg x + 1}{(\lg x + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2\lg x - 1}{\sqrt{3}}$ u) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \lg x + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \lg x - 1) + k\sqrt{2}\pi$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (k + \frac{1}{2})\sqrt{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
6. a) $2\sqrt{x+3} - 2\log(1 + \sqrt{x+3})$ na $(-3, +\infty)$
b) $\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2\log|\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|$ na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, +\infty)$
c) $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \log x + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, +\infty)$ d) $-2 \arctg \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1, 3)$ e) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - (x+1) + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}$ na $(-1, +\infty)$ f) $\frac{-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} - \log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$ na $\mathbb{R}$
g) $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\log(\sqrt[6]{x+1} + 1)$ na $(-1, 0)$ a na $(0, +\infty)$
h) $-\log\left|1 - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right| + \frac{1}{2} \log\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}^2 + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) - \sqrt{3} \arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$
i) $\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1, 0)$ a na $(0, 1)$ j) $\log \frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} - \sqrt{3} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 0)$ a na $(0, +\infty)$ k) $\frac{\operatorname{sgn} x}{2} \left(x(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x}} + \log\left|\sqrt{\frac{x-2}{x}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}} + 1\right) \right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x} + \frac{1}{2} \log|\sqrt{x^2-2x}-x+1|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(2, +\infty)$
l) $\operatorname{sgn}(x-1+\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{1}{2}(x-1)(x-1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} + \log\left|\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} - 1\right| - \log\left(\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}} + 1\right) \right)$ nebo $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} + \log|\sqrt{x^2-2x-1}-x+1|$, na $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ a na $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ m) $\frac{\sqrt{2}}{8} \arctg\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \arctg\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x+2}{2-x}} + 1\right)$ na $(-2, 2)$ n) $\frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{8} \log(2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1)$ na $\mathbb{R}$ o) $-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ na $(-1, 1)$
p) $\log(t + \sqrt{2} - 1) - \log(t + \sqrt{2} + 1) - 2 \arctg t$, kde $t = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}-x}{x+1+\sqrt{2}}}$, na $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$; nebo $-\log(1-t) - 2 \arctg t$, kde $t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$, na $(-1-\sqrt{2}, 0)$ a na $(0, -1+\sqrt{2})$, lze slepit v 0 q) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2-1})$ na $(1, +\infty)$
r) $\frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$ na $(0, +\infty)$ s) $\frac{t}{18} - \frac{t^2}{6} + \frac{3}{4} \log|2t-3| - \frac{16}{27} \log|3t-4|$, kde $t = \sqrt{x^2+3x+2}-x$, na $(-\infty, -2)$, na $(-1, -\frac{2}{3})$ a na $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ t) $\frac{5}{4\sqrt{2}} \log \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}t+1) + \frac{5}{2\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}t-1) - \frac{5t}{1+t^4}$, kde $t = \sqrt[4]{\frac{x}{5-x}}$, na $(0, 5)$

3. URČITÉ INTEGRÁLY

1. Spočtěte tyto určité integrály:

$$\begin{aligned}
 &\text{a) } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{b) } \int_0^\pi \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \\
 &\text{e) } \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \quad \text{f) } \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx, \quad \text{g) } \int_0^2 |1 - x| dx, \quad \text{h) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}, \quad \text{i) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \text{j) } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \\
 &\text{k) } \int_0^{8\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \text{l) } \int_0^\pi (x \sin x)^2 dx
 \end{aligned}$$

Výsledky: 1. a) $n!$ b) $\pi \frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n sudé, $2 \frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n liché c) $\frac{1}{n+1}$ d) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ g) 1 h) $\frac{2}{3} \log 2$
i) $\frac{1}{2}$ j) 0 k) $\frac{8\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ l) $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$

4. KONVERGENCE INTEGRÁLŮ

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$):

- a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, b) $\int_0^1 \log x dx$, c) $\int_0^1 \frac{1 - \sin x}{x} dx$, d) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$, e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x dx$,
 f) $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$, g) $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x dx$, h) $\int_1^2 \frac{dx}{x \log x}$, i) $\int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x} dx$, j) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx$,
 k) $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$, l) $\int_7^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$, m) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \log(1+e^x)} dx$, n) $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx$,
 o) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}} dx$, p) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx$, q) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}} dx$, r) $\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{\sqrt{1-x}} dx$, s) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$,
 t) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^4-1) \operatorname{arccotg} x}} dx$, u) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x (1 - \cos x)^\gamma dx$,
 w) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} dx$, x) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$, y) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x \cdot \log \cos x dx$, z) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha \frac{1}{x}} dx$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbb{R}$):

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos x}{1+\sqrt{x}} dx$, c) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \sin \frac{1}{x}}{x} dx$, d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, e) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$,
 f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$, g) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x} dx$, h) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin^3 x}{1+x^3} dx$, i) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha} dx$, j) $\int_0^{+\infty} x \cos(x^4) dx$,
 k) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$, l) $\int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$, m) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{1+x} dx$, n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x) dx$, o) $\int_1^{+\infty} \sin(\log x) dx$,
 p) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{x^\alpha} dx$, q) $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x) \cdot \sin 2x}{x^\alpha} dx$, r) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x+2 \sin x} dx$, s) $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2 \sin x} dx$,
 t) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha} dx$, u)* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+\log x)}{x^\alpha} dx$

Návody: 1. b) výpočet c) rozdíl integrálů k) růstová škála p) pro $\alpha = 1$ substituce r) $\log \frac{1}{y} = -\log y$ s) Taylor
 t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^\alpha}$ spočteme substitucí $x = \operatorname{cotg} y$ z) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\beta}$ spočteme substitucí $x = \cos y$
 2. d) BC, $|\sin x| \geq \sin^2 x$ g) rozdíl integrálů nebo Abel h) $|\sin x|^3 \geq \sin^4 x$ j)–o) substituce q) substituce
 r), s) součet integrálů t) $\sin(a+b)$ u) substituce

Výsledky: 1. a) K b) K c) D d) D e) $K \Leftrightarrow \alpha > -1$ f) D g) $K \Leftrightarrow \alpha < -1 < \alpha + \beta$ h) D i) K j) K k) K l) K
 m) K n) $K \Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ o) $K \Leftrightarrow \alpha > -1$ p) $K \Leftrightarrow \alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$ q) $K \Leftrightarrow -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ r) $K \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$ s) $K \Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$ t) K u) $K \Leftrightarrow \alpha > -1, \beta > -1$ v) $K \Leftrightarrow \beta > -1, \alpha + 2\gamma > -1$ w) $K \Leftrightarrow \max\{\alpha, \beta\} > 1, \min\{\alpha, \beta\} < 1$ x) $K \Leftrightarrow \beta \geq 0$ a $-1 < \alpha < \beta - 1$, nebo $\beta < 0$ a $\beta - 1 < \alpha < -1$ y) $K \Leftrightarrow -3 < \alpha < 1$ z) $K \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$
 2. a) D b) AK c) AK d) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ e) NAK f) AK g) D h) NAK i) AK pro $1 < \alpha < 5$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ j) NAK k) NAK l) AK pro $\alpha < -1$, NAK pro $\alpha > 1$ m) NAK n) NAK o) D p) AK pro $1 < \alpha < 3$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ q) AK pro $1 < \alpha < 2$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$ r) NAK s) D t) NAK pro $0 < \alpha < 2$ u) AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $0 < \alpha \leq 1$

5. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

1. Vypočtete obsah obrazce ohraničeného křivkami:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{2}{1+x^2}, y = x^2, & \text{b) } y &= x^2 - 6x + 8, y = 7 - 4x, y = 2x - 8, \\ \text{c) } y &= \frac{x^2}{p}, y = \frac{x^2}{q}, y = \sqrt{ax}, y = \sqrt{bx}, 0 < a < b, 0 < p < q \end{aligned}$$

2. Vypočtete plochu elipsy.

3. Vypočtete délku křivky, která je grafem funkce:

$$\text{a) } \log \cos x, x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle, \quad \text{b) } x^{\frac{3}{2}}, x \in \langle 0, 4 \rangle, \quad \text{c) } e^x, x \in \langle 0, a \rangle, a > 0$$

4. Vypočtete obvod kruhu.

5. Vypočtete délku křivky dané parametrickým vyjádřením ($a > 0$):

$$\text{a) } x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \text{b) } x(t) = a(\cos t + t \sin t), y(t) = a(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

6. Vyjádřete parametricky asteroidu, tj. rovinný útvar $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$ a vypočtete jeho délku.

7. Vypočtete délku části Archimédovy spirály zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$.

8. Vypočtete objem a) koule, b) kužele, c) rotačního elipsoidu, d) anuloidu.

9. Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ležícího v rovině xy kolem osy x . Obrazec je ohraničen křivkami jejichž rovnice jsou $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$ a $y^2 - x^2 = 1$.

10. Vypočtete povrch a) koule, b) kužele, c) anuloidu.

11. Vypočtete obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in \langle 0, \frac{3}{4} \rangle$ kolem osy x .

Výsledky: 1. a) $\pi - \frac{2}{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$

2. πab

3. a) $\frac{1}{2} \log 3$ b) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ c) $a - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2a}} + \log(1 + \sqrt{2}) - \log(1 + \sqrt{1 + e^{2a}})$

4. $2\pi r$

5. a) $8a$ b) $2\pi^2$

6. $6a$

7. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$

8. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$ b) $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ c) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ d) $2\pi^2 Rr^2$

9. $\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3} - 2)$

10. a) $4\pi r^2$ b) $\pi(r\sqrt{r^2 + v^2} + r^2)$ c) $4\pi^2 rR$

11. $\frac{\pi}{16}(\frac{255}{64} - 2 \log 2)$

6. $\mathbb{R}^n$ JAKO METRICKÝ PROSTOR

1. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^2$ jsou dva body v rovině. Ukažte, že úsečka $\overline{ab} \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená množina.
2. Ukažte, že následující podmnožiny $\mathbb{R}^2$ jsou uzavřené:
 $(0, 1) \times (0, 1)$, $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$, $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0\}$, $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; xy \geq 1\}$.
3. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené, eventuálně uzavřené, a určete uzávěr, vnitřek, hranici:
a) $\mathbb{N}$, b) $\{1/n; n \in \mathbb{N}\}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$,
e) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| - x - y > 0\}$, f) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.
4. Necht' $M \subset \mathbb{R}^m$ je množina všech bodů, jejichž souřadnice jsou tvaru $k/2^l$, $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$. Určete $\overline{M}$, $\text{Int } M$, $H(M)$.
5. Vyšetřete, zda následující množiny jsou otevřené nebo uzavřené:
a) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$, b) $\{x \in \mathbb{R}; \log^2 x \geq 0\}$, c) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 < \sin(x + y^3)\}$,
d) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt{xy} + x > 0\}$, e) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = x \cos y, xyz \leq x^2 + y^2\}$,
f) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 y + xy^2 \leq 5, xy < x^2 + y^2 + 1\}$, g) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 y \leq \arcsin(x + y^3)\}$,
h) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 y < \arcsin(x + y^3)\}$, i) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 6 - \arccos x < \arcsin(x + y^3)\}$.
6. Připomeňme, že průměr neprázdné množiny A v metrickém prostoru (P, ρ) definujeme jako $\text{diam } A = \sup\{\rho(x, y); x, y \in A\}$. Určete průměr následujících množin: a) $(0, 1)$, b) $(0, 2)$, c) $\{3\} \cup (-1, 0)$, d) otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$, e) $(0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$.
7. Najděte v $\mathbb{R}^2$ disjunktní otevřené, resp. uzavřené množiny A a B pro něž je $\text{dist}(A, B) = 0$. Lze nalézt tyto množiny tak, aby jedna, případně obě, byly omezené?

- Výsledky: 3. a) ne, ano, $\overline{A} = \mathbb{N}$, $\text{Int } A = \emptyset$, $H(A) = \mathbb{N}$ b) ne, ne, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $\text{Int } A = \emptyset$, $H(A) = A \cup \{0\}$ c) ne, ne, $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\text{Int } A = \emptyset$, $H(A) = \mathbb{R}$ d) ne, ne, $\overline{A} = \{x \geq 0, y \leq 0\}$, $\text{Int } A = \{x > 0, y < 0\}$, $H(A) = \{x = 0, y \leq 0\} \cup \{x \geq 0, y = 0\}$ e) ano, ne, $\overline{A} = \{y \leq -x\}$, $\text{Int } A = A$, $H(A) = \{y = -x\}$ f) ne, ne, $\overline{A} = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$, $\text{Int } A = \emptyset$, $H(A) = \overline{A}$
4. $\overline{M} = \mathbb{R}^m$, $\text{Int } M = \emptyset$, $H(M) = \mathbb{R}^m$
5. a) ano, ne b) ano, ne c) ano, ne d) ne, ne e) ne, ano f) ne, ano g) ne, ano h) ne, ne i) ano, ano
6. a) 1 b) 2 c) 4 d) 2 e) $\sqrt{n}$
7. $A = B(0, 1)$, $B = B(2, 1)$; $A = \{y = 0\}$, $B = \{y = \frac{1}{x}, x > 0\}$; pro uzavřené ne.

7. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH – ŘEZY, LIMITA A SPOJITOST

1. Určete a nakreslete definiční obor, vrstevnice a (pokud to lze) řezy rovnoběžné s rovinami yz a xz :

- a) $x + \sqrt{y}$, b) $\frac{y}{x}$, c) $x^2 + y^2$, d) $x^2 - y^2$, e) $|x| + y$, f) $\min\{x, y\}$, g) $\max\{x, y\}$, h) $\sqrt{xy}$,
i) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, j) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, k) $\arcsin \frac{x}{y}$, l) $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$, m) $\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$,
n) $\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$, o) $\operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$

2. Vyšetřete $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ a $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y)$, kde

a) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$, b) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0, y) = 0$

3. Vyšetřete následující limity:

- a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$, b) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$, c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^4}$, d) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
e) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, f) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, g) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$, h) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$,
i) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + (x - y)^2}}$, j) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, k) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 + x^2 + y^3 + y^2}{x^2 + y^2}$,
l) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$, m) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$, n) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$,
o) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$, p) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} (x^2 + y^2 + z^2)^{xyz}$, q) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (x^2 + y^2)^{xy}$, r) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^4 + y^4}$,
s) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^4}$, t) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin x \sin^3 y}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$, u) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2}$, v)* $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^6}}$,
w)* $\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x+y \neq 0}} \frac{\sin x + \log(1 + y)}{x + y}$

4. Lze funkci $\frac{\sin(xy)}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

5. Lze funkci $\frac{\sin x + \sin y}{x + y}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

- Výsledky: 1. a) $D_f = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, vrstevnice jsou „levé poloviny“ parabol b) $D_f = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem c) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c \geq 0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{c}$
d) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou hyperboly a jedna dvojice přímek e) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c \in \mathbb{R}$ je graf funkce $c - |x|$ f) $D_f = \mathbb{R}^2$ g) $D_f = \mathbb{R}^2$ h) $D_f = [0, +\infty)^2 \cup (-\infty, 0]^2$, vrstevnice na hladině $c > 0$ jsou hyperboly tvaru $\frac{c^2}{x}$, na hladině 0 je to dvojice os i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, vrstevnice na hladině $0 \leq c \leq 1$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1 - c^2}$ j) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$, vrstevnice na hladině $c > 0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}$ k) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq |x| > 0\} \cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \leq -|x| < 0\}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem l) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, na hladině 1 jedna parabola m) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, vrstevnice na hladině $0 \leq c < \frac{3}{2}$ jsou dvojice kružnic se středy v počátku a poloměry $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5 \pm \sqrt{9 - 4c^2}}$, na hladině $\frac{3}{2}$ jedna kružnice se středem v počátku a poloměrem $\frac{\sqrt{10}}{2}$
n) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{N}_0\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic se středy v počátku
o) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině -1 a 1 jsou „šachovnice“, na hladině 0 mřížka
2. a) dvojnásobné limity jsou 0, dvojnásobná neexistuje b) prostřední limita neexistuje, ostatní jsou 0
3. a) 1 b) 0 c) $+\infty$ d) 0 e) neexistuje f) 0 g) neexistuje h) neexistuje i) 0 j) neexistuje k) 1 l) 2 m) 0
n) 1 o) 1 p) 1 q) 1 r) 0 s) neexistuje t) neexistuje u) $\frac{1}{2}$ v) 0 w) neexistuje
4. ANO
5. ANO ($f(a, -a) = \cos a$)

1. Vyšetřete parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí (případně dodefinovaných nulou v počátku):

- a) $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ b) e^{xy} , c) $xy + yz + xz$, d) $\sqrt{1-x^2-y^2}$, e) $\sqrt{x^2+y^2}$, f) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$, g) $|xy|$,
 h) $\sqrt[3]{xy}$, i) $x + y \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, j) $|y - \sin x|$, k) $\sqrt[3]{x+y^2}$, l) $\sqrt{|xy|}$, m) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, n) $\frac{x^3 y}{x^2+y^2}$,
 o) $x + y + \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, p) $\frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1+xy)$, q) $e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}}$, r) $(x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$, s) $xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
 t) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$, u) $x^{\frac{y}{z}}$, v) x^{y^z} , w)* $|\sin y - \sin x|$, x)* $\sqrt[3]{x^2+y} \log(x^2+y^2)$, y)* $\frac{x^2 y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$

Výsledky: 1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$, totální diferenciál existuje všude b) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$, TD existuje všude c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$, TD existuje všude d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ pro $x^2+y^2 < 1$, TD existuje pokud $x^2+y^2 < 1$ e) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ mimo počátek, TD existuje všude kromě počátku f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ pokud $y \neq -x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, TD existuje všude kromě $y = -x$ g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy a v počátku h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x \geq 0 \wedge y \geq x) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \neq 0$ a $x \neq y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \neq y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde $\frac{\partial f}{\partial x}$ j) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x) \cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$ pokud $y \neq \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo $y = \sin x$ k) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ pokud $x \neq -y^2$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD l) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \sqrt{\frac{y}{|x|}}$ pokud $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{2} \sqrt{\frac{x}{|y|}}$ pokud $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy m) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje mimo počátek n) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude o) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + \frac{xy(2x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, TD existuje všude p) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (y > -\frac{1}{x} \wedge x > 0) \vee (y < -\frac{1}{x} \wedge x < 0) \vee (x = 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} - \frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \log(1+xy)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} + \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \log(1+xy)$ pro $[x, y] \in D_f \setminus \{[0, 0]\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude mimo počátek q) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude r) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude s) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje všude t) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \log \frac{x}{y}$, TD existuje všude u) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x > 0 \wedge z \neq 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z} \log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \frac{y}{z^2} \log x$, TD existuje všude v) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x > 0 \wedge y > 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} z y^{z-1} \log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \log x \log y$, TD existuje všude w) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y) \cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin y - \sin x) \cos y$ pokud $\sin y \neq \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD x) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} + \frac{2x\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} + \frac{2y\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ pro $y \neq -x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x^2) = 0$ pokud $x^2+x^4=1$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD y) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy((3y^2-x^4)|x|+2(y^2-x^4)|y|)}{(x^4+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3((x^4-y^2)\operatorname{sgn} x+2x^3|y|)}{(x^4+y^2)^2}$ pokud $[x, y] \neq [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, TD existuje mimo počátek

9. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH – DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

1. Necht' $f(u, v) = uv$ a necht' $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definováno předpisem $g(x, y) = [(x^2 + y^2)(e^x - 1), \frac{y^2}{x^2 + y^2}]$. Vypočtete $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)$, kde $F = f \circ g$.

2. Necht' $\nabla f(2, 2, 2) = [1, 2, 3]$ a necht' $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $g(x, y, z) = [x + y + z, x^2 + y^2 + 1, x^3 + y^3 + 1]$. Vypočtete $\nabla F(0, 1, 1)$, kde $F = f \circ g$.

3. Necht' $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F = f \circ g$ a $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dáno předpisem

$$\text{a) } g(x, y) = \sin x \cos y, \quad \text{b) } g(x, y) = [x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy], \quad \text{c) } g(x, y) = \left[\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2 \right].$$

4. Necht' $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, +\infty)$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\text{a) } F(x, y) = f(x, y)^{f(x, y)}, \quad \text{b) } F(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}.$$

5. Necht' $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[1, 1]$ a splňuje $f(1, 1) = 1$. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)$, je-li

$$\text{a) } F(x, y) = f(f(y, x), f(x, y)), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2, \quad \text{b) } F(x, y) = f(f(x, y)^{f(y, x)}, f(y, x)^{f(x, y)}).$$

6. Necht' $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[a, b]$. Nalezněte jej, platí-li

$$\text{a) } F(r, \alpha) = f(r \cos \alpha, r \sin \alpha), \quad [a, b] = [1, 1], \quad \frac{\partial F}{\partial r}(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = 4,$$

$$\text{b) } F(u, v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v), \quad [a, b] = [1, 0], \quad \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) = 7, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(0, 0) = -1.$$

Výsledek: 1. $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = e$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 2e - 2$

2. $\nabla F(0, 1, 1) = [1, 14, 1]$

3. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(\sin x \cos y) \cdot \cos x \cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -f'(\sin x \cos y) \cdot \sin x \sin y$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial f}{\partial t}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) + 2x \frac{\partial f}{\partial u}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) + 2y \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y \frac{\partial f}{\partial t}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) - 2y \frac{\partial f}{\partial u}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) + 2x \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$ c) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot \frac{x}{y} - \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot \frac{2y}{(x - y)^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial v}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot \frac{1 - x^2}{2y^2} + \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot \frac{2x}{(x - y)^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial v}(\frac{x^2 - 1}{2y}, \frac{x + y}{x - y}, x^2 - y^2) \cdot y$

4. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x, y)^{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y) (\log f(x, y) + 1)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)^{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) (\log f(x, y) + 1)$

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(y, x) \log f(x, y) + \frac{f(y, x)}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y) \right)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(y, x) \log f(x, y) + \frac{f(y, x)}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \right)$

5. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = 4$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right)^2$

6. a) $\nabla f(1, 1) = [-2, 2]$ b) $\nabla f(1, 0) = [7, -1]$