

I. Topologické vektorové prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X . Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, nazveme dvojici (X, τ) *topologickým vektorovým prostorem*.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Fakt 2. Necht' X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X . Pak

(a) operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení $+: (X, \rho) \times (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ (dokonce je 2-lipschitzovská);

(b) $\rho(nx, 0) \leq n\rho(x, 0)$ pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení 3. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X .

(b) Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.

(c) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.

Definice 4. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- *pohlcující*, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- *vyvážená*, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Tvrzení 5. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.

(b) $\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.

Věta 6 (John von Neumann (1935)). Necht' X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. je neprázdný a pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:

- Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.
- Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující.
- Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená.

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

Věta 7. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Necht' $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K . Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

(b) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).

(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- X je Hausdorffův.
- X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
- $\{0\}$ je uzavřená množina.
- $\{0\} = \bigcap \{U; U \in \tau(0)\}$.

Tvrzení 8. Necht' X je topologický vektorový prostor.

(a) Je-li $G \subset X$ otevřená a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.

(b) Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.

(c) Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.

Tvrzení 9. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

(a) $\bar{A} = \bigcap \{A + U; U \in \tau(0)\}$.

- (b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$ a $\text{Int } A + \text{Int } B \subset \text{Int}(A+B)$.
- (c) $\lambda \overline{A} = \overline{\lambda A}$ a $\lambda \text{Int } A = \text{Int}(\lambda A)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- (d) Je-li Y podprostor X , pak $\overline{Y}$ je též podprostor X .
- (e) Je-li A konvexní, pak $\overline{A}$ a $\text{Int } A$ jsou konvexní. Dále je-li $\text{Int } A$ neprázdná, pak $\overline{A} = \overline{\text{Int } A}$.
- (f) Je-li A vyvážená, pak $\overline{A}$ je vyvážená.
- (g) Je-li A vyvážená a $0 \in \text{Int } A$, pak $\text{Int } A$ je vyvážená.

Věta 10. Necht' X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.

Důsledek 11. Necht' X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

2. Omezené množiny, metrízovatelnost

Definice 12. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá *omezená*, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 13. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Množina A je omezená.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \rightarrow 0$ platí $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.
- (iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n} x_n \rightarrow 0$.

Tvrzení 14. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.
- (b) Množina λA je omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (c) Množina $\overline{A}$ je omezená.

Lemma 15. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \rightarrow 0$. Pak $\{\delta_n V; n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezená.

Věta 16. Necht' X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) X má spočetnou bázi okolí 0.
- (ii) X je pseudometrízovatelný.
- (iii) X je pseudometrízovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

Definice 17. Necht' X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je *lokálně omezený*, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x .

Věta 18. Necht' X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrízovatelný.

3. Totální omezenost a kompaktnost

Definice 19. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá *totálně omezená*, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

Tvrzení 20. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.
- (b) Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.
- (c) Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.
- (d) Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.
- (e) Je-li A totálně omezená, pak je i $\overline{A}$ totálně omezený.

Tvrzení 21. Necht' X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.

Fakt 22. Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou ρ . Pak $A \subset X$ je τ -totálně omezená, právě když je ρ -totálně omezená.

Definice 23. Necht' $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ jsou topologické vektorové prostory a $f: X \rightarrow Y$. Řekneme, že f je *stejněměrně spojitý*, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Tvrzení 24. Necht' $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ jsou topologické vektorové prostory a $f: X \rightarrow Y$ je *stejněměrně spojitý*. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.

4. Lineární zobrazení

Lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina, vzorem vyvážené množiny při lineárním zobrazení je opět vyvážená množina.

Věta 25. Necht' X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:

- (i) T je omezené na nějakém okolí 0.
- (ii) T je spojitý v 0.
- (iii) T je spojitý.
- (iv) T je *stejněměrně spojitý*.
- (v) T je *sekvenciálně spojitý*.
- (vi) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
- (vii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X, x_n \rightarrow 0$ je množina $\{T(x_n); n \in \mathbb{N}\}$ omezená.

Pak (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizovatelný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

Lemma 26. Necht' X je pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \rightarrow +\infty$ a $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.

Věta 27. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) f je spojitá.
- (ii) $\text{Ker } f$ je uzavřený.
- (iii) $\overline{\text{Ker } f} \neq X$.

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) *funkcionály*.

Definice 28. Necht' X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^\#$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat *algebraickým duálem*. Symbolem X^* budeme značit podprostor $X^\#$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojitý na X , a budeme jej nazývat *topologickým duálem* (či jenom *duálem*).

Definice 29. Necht' X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární. Říkáme, že T je *izomorfismus* X na Y (nebo jen *izomorfismus*), pokud T je homeomorfismus X na Y ; říkáme, že T je *izomorfismus* X do Y (nebo jen *izomorfismus* do), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$.

Fakt 30. Necht' X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je usměrněný soubor lineárních zobrazení z X do Y . Je-li $T: X \rightarrow Y$ bodovou limitou usměrněného souboru $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.

5. Konečněrozměrné prostory

Věta 31. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) X je Hausdorffův a $\dim X < \infty$.
- (ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
- (iii) X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí 0.
- (iv) X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojitý.
- (v) X je pseudometrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.

Důsledek 32. Necht' X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.

6. Lokálně konvexní prostory

Fakt 33. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.

Definice 34. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá *absolutně konvexní*, pokud je konvexní a vyvážená.

Fakt 35. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li A vyvážená, je $\text{conv } A$ vyvážená, a tedy absolutně konvexní.
- (b) A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.

Fakt 36. Necht' X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X . Pak platí následující tvrzení:

- (a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ pro všechna $x, y \in X$.
- (b) Množina $Z = p^{-1}(0)$ je podprostor X . Pro libovolná $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, je $p(x) = p(y)$.
- (c) Množiny $\{x \in X; p(x) < c\}$ a $\{x \in X; p(x) \leq c\}$ jsou absolutně konvexní pro každé $c \in [0, +\infty)$.

Definice 37. Necht' X je vektorový prostor a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *nezáporně homogenní*, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Fakt 38. Necht' X je vektorový prostor a f je *nezáporně homogenní* funkce na X . Označme $F_c = \{x \in X; f(x) \leq c\}$ a $G_c = \{x \in X; f(x) < c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ jsou množiny F_c a G_c pohlcující a navíc $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.

Definice 39. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. *Minkowského funkcionál* množiny A je funkce $\mu_A: X \rightarrow [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf \{\lambda > 0; x \in \lambda A\}.$$

Věta 40. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \leq \mu_A$.
- (b) μ_A je *nezáporně homogenní*.
- (c) Je-li A konvexní, je μ_A *nezáporný sublineární funkcionál*.
- (d) Je-li A absolutně konvexní, je μ_A *pseudonorma*.
- (e) $A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\}$.
- (f) Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\}$.
- (g) Necht' $p: X \rightarrow [0, +\infty)$ je *nezáporně homogenní* a $B \subset X$.
 - Je-li B pohlcující a $B \subset \{x \in X; p(x) \leq 1\}$, pak $\mu_B \geq p$.
 - Je-li $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset B$, pak $\mu_B \leq p$.

Je-li tedy $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X; p(x) \leq 1\}$, pak $\mu_B = p$.

Tvrzení 41. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak $\text{Int } A \subset \{x \in X; \mu_A(x) < 1\}$. Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak

$$\text{Int } A \subset \{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\} \subset \bar{A}.$$

Lemma 42. Necht' X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X . Pak p je *stejněměrně spojitý*, právě když je shora omezený na nějakém okolí 0.

Důsledek 43. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je *spojitý*, právě když A je *okolím* 0. V tom případě pak platí, že

$$\text{Int } A = \{x \in X; \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X; \mu_A(x) \leq 1\} = \bar{A}.$$

Věta 44. Necht' X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje konvexní okolí 0 různé od X .

Definice 45.

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je *lokálně konvexní*, pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.

- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná úplnou translačně invariantní metrikou, nazveme *Fréchetův*.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je *normovatelný*, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Tvrzení 46. *Necht' X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.*

Důsledek 47. *V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin a též bázi sestávající z uzavřených absolutně konvexních pohlcujících množin.*

Necht' X je vektorový prostor, $p_1, \dots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1, \dots, p_n, \varepsilon} = \{x \in X; p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}.$$

Věta 48. *Necht' X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X . Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p, \varepsilon}; p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1, \dots, p_n, \varepsilon}; n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:*

- Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ -spojitá.*
- Množina $A \subset X$ je τ -omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.*
- Usměrněný soubor $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \rightarrow 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.*

Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.

Na druhou stranu, je-li (X, τ) lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V; V \in \mathcal{V}\}$.

Tvrzení 49. *Necht' (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- X je Hausdorffův.*
- Každý systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ má následující vlastnost:
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.*
- Existuje systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ s vlastností z tvrzení (ii).*

Lemma 50. *Necht' (X, τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x - y), 1\}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ .

Věta 51 (A. N. Kolmogorov (1934)). *Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak X je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li X Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí 0.*

Tvrzení 52. *Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

- Je-li A omezená, je i množina $\text{conv } A$ omezená.*
- Je-li A totálně omezená, je i množina $\text{conv } A$ totálně omezená.*

7. Oddělovací věty

Lemma 53. *Necht' X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.*

Věta 54. *Necht' X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

- Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\text{Re } f(x) < \inf_B \text{Re } f$ pro každé $x \in A$.*
- Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \text{Re } f < \inf_B \text{Re } f$. Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce $\sup_A |f| < \inf_B \text{Re } f$.*

Důsledek 55. *Necht' X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:*

- Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X .*
- Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*
- Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F|_Y = f$.*

8. Slabé topologie a poláry

Slabé topologie

Lemma 56. *Necht' X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X . Pak $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, právě když $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } f_j \subset \text{Ker } f$.*

Fakt 57. *Necht' X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L: X \rightarrow Y$ a $S: X \rightarrow Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T: Z \rightarrow Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\text{Ker } S \subset \text{Ker } L$.*

Definice 58. *Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|; f \in M\}$.*

Tvrzení 59. *Necht' X je vektorový prostor a $M, N \subset X^\#$ jsou neprázdné. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\text{span } M = \text{span } N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \text{span } M)$.*

Tvrzení 60. *Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X .*

Věta 61. *Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \text{span } M$.*

Definice 62. *Necht' X je topologický vektorový prostor.*

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá *slabou topologií* (též w -topologií) na X .
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá *slabou s hvězdičkou topologií* (též w^* -topologií) na X^* .

Důsledek 63. *Necht' (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $w \subset \tau$ a $(X, w)^* = X^*$.

(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

Tvrzení 64. *Necht' X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když na prostoru $(X^*, \|\cdot\|)$ topologie slabá a w^* splývají.*

Tvrzení 65. *Necht' X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X . Označme w_{XY} restrikcí topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y . Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X .*

Věta 66. *Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\bar{A}^w = \bar{A}$.

(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.

(c) Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \rightarrow x$ slabě, pak existují $y_n \in \text{conv}\{x_j; j \geq n\}$ takové, že $y_n \rightarrow x$.

Věta 67 (George Whitelaw Mackey (1946)). *Necht' X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.*

Tvrzení 68. *Necht' X je Banachův prostor a $A \subset X^*$. Pak A je omezená právě tehdy, když je w^* -omezená.*

Věta 69. *Necht' X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení. Pak T je w - w spojitě, tj. spojitě jakožto zobrazení $T: (X, w) \rightarrow (Y, w)$.*

Tvrzení 70. *Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když $\text{span } M$ má spočetnou algebraickou bázi.*

Tvrzení 71. *Necht' X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.*

Důsledek 72.

(a) *Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.*

(b) *Necht' X je Fréchetův prostor. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.*

Poláry

Definice 73. Necht' X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\text{aconv } A = \bigcap \{B \supset A; B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 74. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak

$$\text{aconv } A = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 75. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako

$$\overline{\text{aconv}} A = \bigcap \{B \supset A; B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}.$$

Tvrzení 76. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} A = \overline{\text{span}} A$, $\overline{\text{conv}} A = \overline{\text{conv}} A$ a $\overline{\text{aconv}} A = \overline{\text{aconv}} A$.

Definice 77. Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*; |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X; |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Fakt 78. Necht' X je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^* , pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.

Tvrzení 79. Necht' X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Množina A° je absolutně konvexní a w^* -uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.
- (b) Je-li A podprostor X , pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^* , pak $B_\circ = B_\perp$.
- (c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X , pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.
- (d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.
- (e) Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (B_\gamma)_\circ$.

Věta 80 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950)). Necht' X je topologický vektorový prostor.

- (a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\text{aconv}}^w A (= \overline{\text{aconv}} A, \text{ pokud } X \text{ je lokálně konvexní})$.
- (b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\text{aconv}}^{w^*} B$.

Lemma 81. Necht' X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

- (a) $A^\perp$ je w^* -uzavřený podprostor X^* ,
- (b) $B_\perp$ je slabě uzavřený podprostor X ,
- (c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}}^w A (= \overline{\text{span}} A, \text{ pokud } X \text{ je lokálně konvexní})$,
- (d) $(B_\perp)^\perp = \overline{\text{span}}^{w^*} B$.

Věta 82. Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y , a $T : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení, pak platí, že

- (a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,
- (b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)_\perp$,
- (c) $\overline{\text{Rng } T}^w = (\text{Ker } T^*)_\perp$,
- (d) $\overline{\text{Rng } T^*}^{w^*} = (\text{Ker } T)^\perp$.

Věta 83 (Herman Heine Goldstine (1938)). Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.

Věta 84 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Necht' X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X , pak U° je w^* -kompaktní množina.

Důsledek 85. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^* -kompaktní.

Tvrzení 86. Necht' X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X . Je-li $U \subset X$ okolí 0, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f - g)(x_n)|, 1\}.$$

Fakt 87. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.

Tvrzení 88. Necht' X je normovaný lineární prostor.

(a) Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X , pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(x_n)|.$$

(b) Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*} , pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|.$$

Věta 89. Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.

Věta 90. Necht' X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 91. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x \upharpoonright_{B_{X^*}}$ je lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$. Tedy každý normovaný lineární prostor je izometrický podprostoru $C(K)$ pro nějaký Hausdorffův kompaktní K .

II. Teorie distribucí

Lemma 92. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

(a) Necht' μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω . Jestliže $\int_{\Omega} \varphi d\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Necht' $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_{\Omega} f \varphi d\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω .

(c) Necht' μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_{\Omega} f \varphi d\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Lemma 93. Necht' $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\text{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset U$ a $\varphi = 1$ na A .

Důsledek 94. Necht' $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$ a $\varphi = 1$ na U .

1. Slabé derivace

Tvrzení 95. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in C^1((a, b))$. Pak

$$\int_a^b f' \varphi d\lambda = - \int_a^b f \varphi' d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Definice 96. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ je *slabou derivací* funkce f , jestliže

$$\int_a^b g \varphi \, d\lambda = - \int_a^b f \varphi' \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a, b) je *slabou derivací* funkce f , jestliže

$$\int_a^b \varphi \, d\mu = - \int_a^b f \varphi' \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Věta 97. Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ slabou derivací f , pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a, b) slabou derivací f , pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a, b) slabou derivací f , pak $g \in L_1((a, b))$ a $\mu(A) = \int_A g \, d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a, b)$.

Tvrzení 98. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ taková, že $f = c$ s. v. na (a, b)).

Věta 99. Necht' $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$.

- (a) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$. Je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$, pak má vlastní derivaci s. v., $f' \in L_1((a, b))$ a f' je slabou derivací f . Obráceně, má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a, b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. Potom je $g = f_0'$ s. v.
- (b) Funkce f má slabou derivaci v $L_1^{\text{loc}}((a, b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a, b) taková, že $f = f_0$ s. v.
- (c) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$. Funkce f má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře μ na $[a, b]$, právě když existuje zleva spojitá funkce f_0 konečné variace na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. V tom případě pro každé $x \in [a, b]$ platí $\mu([a, x]) = f_0(x) - f_0(a)$.

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Definice 100. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Posloupnost norem $\{\|\cdot\|_N\}_{N=0}^\infty$ na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ generuje Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ_ρ metrizovatelnou translačně invariantní metrikou

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}$$

pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Věta 101. Metrika ρ má následující vlastnosti:

(a) Necht' $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\varphi_n \rightarrow \varphi$ v metrice ρ .
- (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \rightarrow 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.
- (iii) Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Je-li α multiindex délky d , pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojitě jakožto zobrazení $z(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.

(c) Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K), \rho)$ úplný metrický prostor.

Věta 102. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Položme

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{D}(\Omega); U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

- (a) $\tau_\rho \upharpoonright_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.

- (b) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau|_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.
- (c) Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.
- (d) Necht' $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \rightarrow \varphi$ v τ , právě když existuje kompaktní $K \subset \Omega$ takový, že $\text{supp } \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.
- (e) Je-li Ω neprázdná, pak $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ je první kategorie v sobě.

Tvrzení 103. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, Y je lokálně konvexní prostor a $T: (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \rightarrow Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je spojitý.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergující k 0 v τ je množina $\{T(\varphi_n); n \in \mathbb{N}\}$ omezená.
- (iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $T|_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.

Definice 104. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ se nazývají *distribuce* na Ω . Prostor všech distribucí na Ω je tedy prostor $\mathcal{D}(\Omega)^* = (\mathcal{D}(\Omega), \tau)^*$.

Věta 105. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ je lineární. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, právě když pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Definice 106. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme *řádem* distribuce Λ . Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

3. Operace s distribucemi

Lemma 107. Necht' $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny parciální derivace až do řádu k omezené a necht' $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Definice 108. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme *derivaci* D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme *součin funkce f a distribuce Λ* jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Tvrzení 109. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:

- (a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
- (b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
- (c) Je-li $g \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.
- (d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.
- (e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $g \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$, pak
- $\Lambda'_g = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\text{loc}}((a, b))$, právě když h je slabou derivací g ;
 - $\Lambda'_g = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a, b) , právě když μ je slabou derivací g .

Fakt 110. Necht' $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c_\beta^\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta \leq \alpha$ (nerovnost vektorů zde chápeme po složkách) takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ \beta \leq \alpha}} c_\beta^\alpha D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

4. Prostor distribucí

Tvrzení 111. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

- (a) *Necht' $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $g \in C^\infty(\Omega)$. Pak zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$ a $\Lambda \mapsto g\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení prostoru $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$ do sebe.*
- (b) *Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0$, pak $\Lambda_{f_n} \rightarrow \Lambda_f$.*
- (c) *Zobrazení $\varphi \mapsto \Lambda_\varphi$ je prosté spojitě lineární zobrazení $(\mathcal{D}(\Omega), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$.*
- (d) *Je-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \rightarrow \Lambda_f$.*

Věta 112. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

5. Nosič distribuce

Definice 113. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ , jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.*

Věta 114. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Množina $G = \bigcup \{H \subset \Omega; H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ , tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ , pak $H \subset G$.*

Definice 115. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω . Nosič distribuce Λ definujeme jako $\text{supp } \Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ .*

Věta 116. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω .*

- (a) *Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\text{supp } \Lambda_f = \text{supp } f$.*
- (b) *Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω , pak $\text{supp } \Lambda_\mu = \text{supp } \mu$.*
- (c) *Pokud je $\text{supp } \Lambda$ kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.*
- (d) *$\text{supp } \Lambda = \{z\}$ pro $z \in \Omega$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α , $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ ne všechny nulové.*

6. Schwartzův prostor

Lemma 117. *Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na $\mathbb{R}^d$. Pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.*

Definice 118. *Schwartzův prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:*

$$\mathcal{S}_d = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}); PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\}.$$

Lemma 119. *Necht' $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Tvrzení 120. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

- (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mathbb{R}^d)$.
- (b) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax + b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.*
- (c) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d , pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.*
- (d) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.*
- (e) *Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.*

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$v_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \|x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x)\|_\infty.$$

Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{v_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ . Tato topologie je metrizovatelná metrikou z Lemmatu 50.

Věta 121. Metrika z Lemmatu 50 příslušná systému $\{v_N\}_{N=0}^{\infty}$ je úplná. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:

(a) Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $f_n \rightarrow f$ v topologii σ .
- (ii) Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \rightarrow (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.
- (iii) Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \rightarrow PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Jestliže $f_n \rightarrow f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\mathbb{R}^d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

(c) Je-li α multiindex délky d , P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá lineární zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

Tvrzení 122. Necht' $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Věta 123. Fourierova transformace je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ na sebe. Navíc pro $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{a} \quad \widehat{\widehat{\widehat{f}}} = f.$$

7. Temperované distribuce

Lemma 124. Necht' $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Tvrzení 125. Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $\text{Id} : (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \rightarrow (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojitá a na hustou podmnožinu.

Definice 126. Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionalů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají *temperované distribuce*.

Věta 127. Necht' $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) Λ je temperovaná.
- (ii) Λ je spojitá i v (slabší) topologii σ .
- (iii) Existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C v_N(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Tvrzení 128. Necht' Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce

- $D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ a
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ do sebe.

Definice 129. Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 130.

(a) Je-li $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, pak Λ_g je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_g$. Je-li $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.

(b) Je-li Λ temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, kde $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, a
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$.

III. Bochnerův integrál

1. Měřitelná zobrazení

Tvrzení 131. *Necht' Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.*

Definice 132. Necht' Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f: \Omega \rightarrow X$ se nazývá *jednoduché*, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Věta 133. *Necht' Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f: \Omega \rightarrow X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X .*

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $\mathcal{A}(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ -s. v. na Ω s hodnotami v M .

Definice 134 (Salomon Bochner (1933)). Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $\mathcal{A}(\Omega, X)$ nazveme *silně měřitelným* (též *bochnerovsky měřitelným*) vzhledem k μ , pokud je μ -s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X .

Lemma 135. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.*

Důsledek 136. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné.*

Lemma 137. *Necht' Ω a X jsou měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g: \Omega \rightarrow X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.*

Důsledek 138. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.*

Definice 139 (Izrail Moisejevič Gelfand (1938), Billy James Pettis (1938)). Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ nazveme *slabě měřitelným*, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Definice 140. Necht' X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je *1-normující*, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Lemma 141. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^* -hustá v B_{X^*} , pak A je 1-normující.*

Lemma 142. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_0 = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x, r) = \bigcap_{f \in A} \{y \in X; |f(y) - f(x)| \leq r\}$.*

Lemma 143. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\text{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\text{span } A$ a $B_X \cap \text{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \text{span } A$. Odtud plyne, že je-li $M \subset X$ separabilní, pak $\overline{\text{span}} M$ je též separabilní.*

Věta 144. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) f je silně měřitelné.
- (ii) f je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
- (iii) f je slabě měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
- (iv) Existují $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ separabilní podprostor a $A \subset B_{Y^*}$ spočetná tak, že $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \text{span } A$ je w^* -hustá v B_{Y^*} a $\phi \circ f$ je měřitelná pro každé $\phi \in A$.

Tvrzení 145. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.*

2. Bochnerův integrál

Definice 146. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f: \Omega \rightarrow X$ se nazývá *schodovité*, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

Definice 147. Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme *Bochnerův integrál* f přes E jako

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{x \in f(\Omega) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E) x.$$

Lemma 148. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.*

Věta 149. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g: \Omega \rightarrow X$ jsou schodovitá zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou schodovitá a $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ a $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Je-li (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je měřitelná na Ω , neboť je složením spojitě funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f . Tuto funkci budeme značit $\|f\|$.

Lemma 150. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f: \Omega \rightarrow X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < +\infty$. V tom případě je $\|\int_E f \, d\mu\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Lemma 151. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je Banachův prostor, $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ a $f_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu(t) = 0$. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$. Navíc je-li $g_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má $\{f_n\}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$.*

Definice 152. *Necht' (Ω, μ) je prostor s mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Řekneme, že f je bochnerovsky integrovatelné, pokud existuje posloupnost $f_n: \Omega \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes E jako*

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Věta 153. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když je silně měřitelné a $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná. V tom případě je $\|\int_E f \, d\mu\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Věta 154. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ jsou bochnerovsky integrovatelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak zobrazení $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ a $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Věta 155 (o majorizované konvergenci). *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Necht' $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je takové, že $f_n \rightarrow f$ bodově s. v., a necht' $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. Speciálně, $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.*

Věta 156. *Necht' (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset \mathcal{A}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Necht' $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \rightarrow f$ stejnoměrně s. v. na Ω . Pak $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.*

Věta 157 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|\int_E f \, d\mu\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

Věta 158. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak $T \circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$\int_E T \circ f \, d\mu = T \left(\int_E f \, d\mu \right).$$

Fakt 159. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $x \in X$ a $f \in L_1(\mu)$. Pak $\int_E f(t)x \, d\mu(t) = (\int_E f \, d\mu)x$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Věta 160. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $\int_E f \, d\mu = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$, pak $f = 0$ s. v.*

Věta 161. *Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou $E \subset \Omega$ kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\text{conv}} f(E).$$

Věta 162 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál). *Necht' (Ω_1, μ_1) a (Ω_2, μ_2) jsou prostory se σ -konečnými úplnými mírami a necht' ν je úplněním součinné míry $\mu_1 \times \mu_2$. Necht' X je Banachův prostor a $f \in \mathcal{A}(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k ν . Potom pro μ_1 -s. v. $s \in \Omega_1$ je zobrazení $t \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_2 , pro μ_2 -s. v. $t \in \Omega_2$ je zobrazení $s \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_1 ; zobrazení $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s, t) d\mu_2(t)$ a $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s, t) d\mu_1(s)$ definovaná s. v. na Ω_1 , resp. Ω_2 jsou bochnerovsky integrovatelná a*

$$\int_{\Omega_1} \psi_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2 d\mu_2.$$

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

Definice 163. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z $\mathcal{A}(\Omega, X)$ takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ -s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu, X)} = \|t \mapsto \|f(t)\|\|_{L_p(\mu)}$.

Věta 164. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$.

(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu, X)}$.

(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mu, X)} = \int_{\Omega} \langle f(t), g(t) \rangle d\mu.$$

Věta 165. Necht' (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p < \infty$.

(a) Množina schodovitých zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.

(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

IV. Kompaktní konvexní množiny

Definice 166. Necht' C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že $x \in C$ je *extremálním bodem* množiny C , jestliže x není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v C , tj. pokud $u, v \in C$ a $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$, pak $u = v$. Množinu všech extrémálních bodů C značíme $\text{ext } C$.

Definice 167. Necht' C je konvexní podmnožina reálného vektorového prostoru X . Afinní nadrovina $W \subset X$ se nazývá *opěrnou nadrovinou* množiny C (v bodě $x \in C$), pokud $W \cap C \neq \emptyset$ (resp. $x \in W \cap C$) a C leží celá v jednom z poloprostorů určených W (tj. existují nenulová lineární forma f na X a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \leq \alpha$).

Fakt 168. Necht' C je konvexní množina ve vektorovém prostoru X .

(a) Je-li $B \subset C$ konvexní, pak $B \cap \text{ext } C \subset \text{ext } B$.

(b) Je-li Y vektorový prostor a $T: X \rightarrow Y$ afinní zobrazení, pak T zachovává konvexní kombinace. Je-li T prosté, pak $\text{ext } T(C) = T(\text{ext } C)$.

(c) Je-li X reálný a $W \subset X$ opěrná nadrovina množiny C , pak $\text{ext}(C \cap W) = W \cap \text{ext } C$.

Věta 169. Je-li C kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak každý bod množiny C je konvexní kombinací nejvýše $n + 1$ extrémálních bodů množiny C . Tedy $C = \text{conv ext } C$.

Lemma 170. Necht' $C \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní. Pak buďto $\text{Int } C \neq \emptyset$, nebo C leží v nějaké afinní nadrovině v $\mathbb{R}^n$.

Důsledek 171. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \text{conv } A$, pak existuje nejvýše $(n + 1)$ -prvková podmnožina $B \subset A$ taková, že $x \in \text{conv } B$.

Důsledek 172. Necht' $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Pak $\text{conv } K$ je též kompaktní.

Tvrzení 173. Necht' X je Fréchetův prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $\overline{\text{conv}} K$ a $\overline{\text{aconv}} K$ jsou kompaktní.

Definice 174. Necht' C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že neprázdná $E \subset C$ je *extremální podmnožinou* C , pokud žádný bod E není netriviální konvexní kombinací bodů z C , z nichž některý leží mimo E , tj. je-li $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$, pak $x, y \in E$.

Definice 175. Necht' C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že funkce $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in C$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Lemma 176. *Necht' C je konvexní podmnožina vektorového prostoru, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní a E je extrémální podmnožina C . Pak množina bodů, ve kterých f nabývá maxima na E , je buďto prázdná, nebo je to extrémální podmnožina C .*

Lemma 177. *Necht' X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a necht' $C \subset X$ je konvexní. Pak každá kompaktní extrémální podmnožina C obsahuje extrémální bod C .*

Připomeňme, že reálná funkce f na topologickém prostoru X se nazývá shora polospojité, pokud pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ uzavřená.

Věta 178 (Bauerův princip maxima). *Necht' X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor), necht' $K \subset X$ je neprázdňá kompaktní konvexní množina a $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ je shora polospojité konvexní funkce. Pak f nabývá maxima na K v extrémním bodě K .*

Věta 179 (Krejnova-Milmanova). *Necht' X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a necht' $K \subset X$ je kompaktní a konvexní. Pak $K = \overline{\text{conv}} K$.*