Funkcionální analýza

Michal Johanis
Jiří Spurný

2025/1/8

Obsah

Kapitola 1

Banachovy a Hilbertovy prostory

Základní strukturou, se kterou se pracuje ve funkcionální analýze, je koncept normovaného lineárního prostoru (Definice 1), který svazuje dohromady algebraický koncept vektorového prostoru s topologickým konceptem metrického prostoru. Normovaný lineární prostor je definován tak, aby vznikl vektorový prostor s metrikou, vzhledem k níž jsou vektorové operace dobře provázány s metrickou strukturou, zejména pak vyjdou vektorové operace spojité vzhledem k příslušné metrice (Tvrzení 2). Tato struktura je pak zastřešujícím rámcem jak pro klasické konečněrozměrné prostory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, tak pro nekonečněrozměrné prostory posloupností a funkcí (Příklady 4). Slouží tak velmi často jako základní kontext pro práci s nekonečněrozměrnými objekty. V řadě situací je pak klíčová úplnost uvažovaného metrického prostoru. Tento požadavek vede k definici Banachova prostoru (Definice 3).

1. Základní vlastnosti

Budeme pracovat s vektorovými prostory výhradně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Pokud nebude řečeno jinak, budou tvrzení platit jak pro reálné, tak pro komplexní prostory. Bude-li třeba použité těleso označit, použijeme symbol $\mathbb{K}$[1], tj. $\mathbb{K}$ značí buď těleso $\mathbb{R}$, nebo těleso $\mathbb{C}$. Ještě jinak a formálněji: Před každým tvrzením obsahujícím symbol $\mathbb{K}$ si lze představit větu „Nechť $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.“. Jestliže se v definici nebo tvrzení objeví více vektorových prostorů, pak budeme automaticky předpokládat, že jsou všechny nad stejným tělesem, pokud nebude řečeno jinak.

Je-li X komplexní vektorový prostor, pak jej lze chápat také jako reálný vektorový prostor (operaci násobení skalárem zúžíme pouze na $\mathbb{R}$). Tuto „reálnou verzi“ budeme označovat $X_{\mathbb{R}}$.

DEFINICE 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Vlastnost (ii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Snadno z ní odvodíme následující verzi:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Indukcí též obdržíme $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.
(b) Norma je 1-lipschitzovská[2] (a tedy spojitá) funkce na X.
(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

Všimněme si, že tvrzení (c) lze chápat jako větu o aritmetice limit pro posloupnosti v normovaných lineárních prostorech.

[1] Z německého *der Körper*, tj. těleso.
[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz

DŮKAZ. (a) Funkce $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ je translačně invariantní metrika, neboť

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$
$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{a}$$
$$\rho(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

pro libovolná $x, y, z \in X$. Též snadno vidíme, že $0 = \rho(x, y) = \|x - y\|$, právě když $x = y$.

(b) Máme $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| = \rho(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

(c) Připomeňme, že v součinu metrických prostorů funguje konvergence posloupností „po souřadnicích“. Chceme tedy ukázat, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $\{y_n\} \subset X$ splňují $x_n \to x \in X$ a $y_n \to y \in X$, pak $x_n + y_n \to x + y$. To je ovšem snadné: $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Podobně, předpokládejme, že $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ a $\{x_n\} \subset X$ splňují $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$ a $x_n \to x \in X$. Pak $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \to 0$.

□

Nechť X je normovaný lineární prostor. Budeme používat následující značení:

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Nebude-li hrozit nedorozumění, v jakém prostoru se koule bere, budeme zpravidla index X u koulí $B_X(x, r)$ a $U_X(x, r)$ vynechávat.

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pro $A, B \subset X$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $\alpha A = \{\alpha y;\ y \in A\}$, $x + A = \{x + y;\ y \in A\}$ a $A + B = \{y + z;\ y \in A, z \in B\}$. Je snadné si rozmyslet, že platí $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1) = rB_X$ pro libovolné $x \in X$, $r > 0$ a analogicky pro otevřené koule. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ a $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$.

DEFINICE 3. Banachův[3] prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (vizte Tvrzení 62(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (vizte Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.

[3]Stefan Banach

- Prostor $\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$, $1 \le p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. Prostor ℓ_∞ všech omezených posloupností v $\mathbb{K}$ s normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je též Banachův prostor. (Jsou to speciální případy prostorů uvedených níže.)
- Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ pro $1 \le p < \infty$, resp. $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ pro $p = \infty$. (Připomeňme, že $\operatorname{ess\,sup} g = \inf\{\eta \in \mathbb{R};\ \mu(\{x \in \Omega;\ g(x) > \eta\}) = 0\}$ pro reálnou funkci g. V případě, že $p = \infty$ navíc předpokládáme, že μ není identicky nulová.) Bude-li jasné z kontextu, jaká míra se na prostoru Ω rozumí, budeme pro prostor $L_p(\mu)$ též používat značení $L_p(\Omega)$.
- Je-li Γ libovolná neprázdná množina a $1 \le p \le \infty$, pak definujeme prostory $\ell_p(\Gamma)$ následovně: Nechť $\Omega = \Gamma$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Gamma)$ a μ je aritmetická míra na Γ. Pak
$$\ell_p(\Gamma) = L_p(\mu) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F}|x_\gamma|^p < +\infty\right\}$$
pro $p < \infty$ a
$$\ell_\infty(\Gamma) = L_\infty(\mu) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma| < +\infty\right\}.$$
V oddílu 2 zavedeme pojem zobecněné řady, který nám umožní přeformulovat definici $\ell_p(\Gamma)$ analogicky, jako pro ℓ_p (vizte Tvrzení 34):
$$\ell_p(\Gamma) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sum_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|^p < +\infty\right\}.$$
Norma v $\ell_p(\Gamma)$ je dána vzorcem
$$\|(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_p = \left(\sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F}|x_\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
pro $p < \infty$, resp. $\|(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|$. Pro $\Gamma = \mathbb{N}$ pak dostáváme, že $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

c) Je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak prostor
$$c_0(\Gamma) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathbb{K};\ \forall\varepsilon > 0 \text{ je } \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \ge \varepsilon\} \text{ konečná}\right\}$$
se supremovou normou $\|(x_\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$. Vskutku, je-li $x \in \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $A = \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \ge \varepsilon\}$ je nekonečná. Pak pro každé $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ a $\gamma \in A$ platí, že $|y_\gamma| \ge |x_\gamma| - |x_\gamma - y_\gamma| \ge \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$.

Všimněme si též, že z definice snadno plyne, že je-li $(x_\gamma) \in c_0(\Gamma)$, pak množina $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \ne 0\}$ je spočetná.

d) Nechť K je kompaktní prostor, pak prostor $M(K)$ regulárních borelovských[4] komplexních či znaménkových (tj. s hodnotami v $\mathbb{R}$) měr na K s normou $\|\mu\| = |\mu|(K)$ je Banachův prostor. Připomeňme, že nezáporná míra μ na K leží v $M(K)$, pokud je definovaná na σ-algebře borelovských množin, je konečná a vnitřně i zevně regulární. Znaménková či komplexní míra leží v $M(K)$, pokud je definována na borelovských množinách a její variace $|\mu|$ leží v $M(K)$.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li Y vektorový podprostor X, pak $(Y, \|\cdot\|)$, kde uvažujeme restrikci normy $\|\cdot\|$ na Y, je zjevně též normovaný lineární prostor. Následující tvrzení je speciálním případem tvrzení o (metrických) podprostorech metrických prostorů.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.
(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

[4] Félix Édouard Justin Émile Borel

DEFINICE 6. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \le \rho(x, y) \le B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Zjevně skoro stejné metriky jsou ekvivalentní.

PŘÍKLAD 7. Metriky $\rho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$ na $\mathbb{R}$ jsou ekvivalentní, ale nikoli skoro stejné (všimněte si, že $\mathbb{R}$ je v σ omezená). Metriky $\rho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = |x - y| + \operatorname{arctg}|x - y|$ na $\mathbb{R}$ jsou skoro stejné, neboť $\rho(x, y) \le \sigma(x, y) \le 2\rho(x, y)$.

$\diamond$

TVRZENÍ 8. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá.

$\Leftarrow$ Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $\rho_1(x_n, y_n) > n\rho_2(x_n, y_n)$, tedy $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$. Pak $\rho_1(z_n, 0) = \|z_n\|_1 = 1$, ale $\rho_2(z_n, 0) = \|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, což je spor s ekvivalencí ρ_1 a ρ_2.

$\square$

Díky předchozímu tvrzení je následující definice konzistentní s Definicí 6.

DEFINICE 9 (ekvivalentní normy). Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

PŘÍKLAD 10. Na prostoru ℓ_1 uvažme normu $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Pak normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ nejsou ekvivalentní. Položíme-li $z_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$, pak $\|z_n\|_\infty = 1$, ale $\|z_n\|_1 = n$.

$\diamond$

POZNÁMKA. Ekvivalentní normy na prostoru X zachovávají konvergenci posloupností. Různé ekvivalentní normy tedy mohou mít různé geometrické vlastnosti (neboť se mění tvar jednotkové koule), ale topologické vlastnosti (tj. vlastnosti závisející jen na konvergenci posloupností) zůstávají nezměněny.

VĚTA 11. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Důkaz bychom mohli provést ihned, nicméně my jej odložíme do Věty 68, kde stejným argumentem dokážeme více věcí najednou.

LEMMA 12. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Vezměme $x \in B_2$. Pak $\|x\|_1 \le b\|x\|_2 \le b$, tedy $x \in B_{(X,\|\cdot\|_1)}(0, b) = bB_1$. Na druhou stranu, nechť $x \in aB_1$. Pak $\|x\|_2 \le \frac{1}{a}\|x\|_1 \le \frac{1}{a}a = 1$, tedy $x \in B_2$.

$\Leftarrow$ Je-li $x \in X$ nenulový vektor, je $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_2 \subset bB_1$, a tedy $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_1 \le b$. Podobně, $a\frac{x}{\|x\|_1} \in aB_1 \subset B_2$, a tedy $a\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \le 1$. Odtud již plynou požadované odhady.

$\square$

TVRZENÍ 13. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

DůKAZ. Ekvivalence (i) a (ii) plyne z Lemmatu 12. Ekvivalence (i) a (iii) plyne z Tvrzení 8. Ekvivalence (iii) a (iv) plyne z definice homeomorfismu a vlastností spojitých zobrazení.

□

DEFINICE 14. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Snadno se dokáže indukcí, že konvexní množina M je uzavřená na konvexní kombinace svých prvků, tj. $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ kdykoli $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Z vlastností normy snadno plyne následující fakt:

FAKT 15. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Připomeňme, že lineární obal množiny $M \subset X$ je definován jako $\bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ podprostor } X\}$. Budeme jej značit span M. Dále připomeňme, že platí

$$\operatorname{span} M = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

DEFINICE 16. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní, a tedy konvexní obal je konvexní množina.

TVRZENÍ 17. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

DůKAZ. Označme $C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}$. Inkluze $C \subset \operatorname{conv} M$ je zjevná, neboť konvexní množina conv M obsahuje všechny konvexní kombinace svých prvků. Na druhou stranu, $M \subset C$. Stačí tedy ukázat, že C je konvexní, protože pak $\operatorname{conv} M \subset C$ dle definice conv M.

Nechť $x, y \in C$ a $\alpha \in [0, 1]$. Pak $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ pro nějaká $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a obdobně $y = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ pro nějaká $y_1, \dots, y_m \in M$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Pak

$$\alpha x + (1 - \alpha) y = \sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^m (1 - \alpha) \mu_i y_i \in C,$$

neboť $\sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i + \sum_{i=1}^m (1 - \alpha) \mu_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \mu_i = \alpha + (1 - \alpha) = 1$.

□

DEFINICE 18. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Všimněme si, že pro symetrii M stačí ověřit $-M \subset M$. Dále si všimněme, že koule B_X a U_X v normovaném lineárním prostoru X jsou symetrické množiny.

FAKT 19. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

DůKAZ. Zvolme libovolné $y \in U(0, r)$ a položme $u = x + y$, $v = x - y$. Pak $u, v \in U(x, r) \subset M$. Ze symetrie M plyne $-v \in M$ a z konvexity M dostáváme $y = \frac{1}{2}(-v + u) \in M$. Pro $B(x, r)$ je důkaz totožný.

□

DEFINICE 20. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedené definice jsou smysluplné, neboť v definujících systémech množin se vždy vyskytuje alespoň celý prostor X. Dále je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor a uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina.

FAKT 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{C}$ a $\lambda \in [0, 1]$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset C$ splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Protože C je konvexní, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C$. Protože sčítání a násobení skalárem jsou spojité operace, máme $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$, a tedy $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$. Důkaz pro podprostor je analogický.

□

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\operatorname{span}}\, M \subset \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M \subset \overline{\operatorname{conv} M}$ plynou z definic a Faktu 21. Pro opačné inkluze si uvědomme, že $\overline{\operatorname{span}}\, M$ je podprostor obsahující M a $\overline{\operatorname{conv}}\, M$ je konvexní množina obsahující M. Tedy $\operatorname{span} M \subset \overline{\operatorname{span}}\, M$ a $\operatorname{conv} M \subset \overline{\operatorname{conv}}\, M$. Protože $\overline{\operatorname{span}}\, M$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M$ jsou uzavřené množiny, dostáváme, že $\overline{\operatorname{span} M} \subset \overline{\operatorname{span}}\, M$ a $\overline{\operatorname{conv} M} \subset \overline{\operatorname{conv}}\, M$.

□

Poznamenejme, že součet uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Stačí uvažovat $A = \left\{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\}$ a $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pak $A + B = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Dokonce ani součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený, vizte Příklad 55. Nicméně platí následující tvrzení:

TVRZENÍ 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.*

DŮKAZ. Nechť $\{z_n\} \subset F + K$ je posloupnost konvergující k nějakému $z \in X$. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Pak $x_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \to z - y$ dle Tvrzení 2(c). Protože F je uzavřená, je $z - y \in F$. Tedy $z = (z - y) + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je uzavřená.

Nechť je nyní navíc F kompaktní a $\{z_n\} \subset F + K$ je libovolná posloupnost. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Protože F je kompaktní, posloupnost $\{x_{n_k}\}$ má podposloupnost $\{x_{n_{k_l}}\}$, která konverguje k nějakému $x \in F$. Tedy $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \to x + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je kompaktní.

□

VĚTA 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $\operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Nechť $\{x_n\} \subset \operatorname{span}(Y \cup \{e\})$ je posloupnost konvergující k $x \in X$. Pak $x_n = y_n + t_n e$ pro nějaká $y_n \in Y$ a $t_n \in \mathbb{K}$. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{t_n\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to +\infty$. Pak ale

$$\left\| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} - (-e) \right\| = \left\| \frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} \right\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \to 0 \cdot \|x\| = 0,$$

tedy $y_{n_k}/t_{n_k} \to -e$. Ale $y_{n_k}/t_{n_k} \in Y$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a Y je uzavřený, tudíž $e \in Y$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy omezená, takže z ní můžeme vybrat podposloupnost $\{t_{m_k}\}$ konvergující k nějakému $t \in \mathbb{K}$. Pak $y_{m_k} \to y = x - te$ a $y \in Y$, neboť Y je uzavřený. Tedy $x = y + te \in \operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$. $\square$

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

VĚTA 26.

(a) Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$ jsou separabilní.
(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.
(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.
(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky[5] měřitelná a $1 \le p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

DŮKAZ. (a) Nechť $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je množina vektorů z c_{00} s racionálními souřadnicemi (v případě komplexního prostoru jsou reálná i imaginární složka racionální). Pak $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je spočetná. Tvrdíme, že je hustá v c_0: Vezměme libovolné $x \in c_0$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_i| < \varepsilon$ pro $i > n$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální") q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \varepsilon$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - q_i| \le \varepsilon$.

Podobně ověříme, že $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je hustá v ℓ_p pro $1 \le p < \infty$. Vezměme libovolné $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální") q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^{1/p}$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) Uvažujme množinu $\mathcal{A} = \{\chi_A;\ A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty$. Pak pro $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \ne B$ platí $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$, neboť existuje $n \in \mathbb{N}$ které leží právě v jedné z množin A, B. Tedy $\mathcal{A}$ je 1-separovaná podmnožina ℓ_∞. Tato množina je ovšem nespočetná (např. pomocí Cantorovy diagonální metody[6]).

(c) Prostor $C(K)$ je podprostorem prostoru $\ell_\infty(K)$ všech omezených funkcí na K. Ukážeme, že existuje spočetná množina $\mathcal{A} \subset \ell_\infty(K)$ taková, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Odtud plyne separabilita $C(K)$, neboť pak $C(K)$ je (metrický) podprostor separabilního metrického prostoru $\overline{\mathcal{A}}$.

Kompakt K je totálně omezený, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečný systém $\mathcal{B}_n$ otevřených koulí o poloměru $\frac{1}{n}$ pokrývající K. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a položme $D_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, kde $\mathcal{B}_n = \{B_1, B_2, \dots\}$. Pak $\mathcal{D}_n = \{D_1, D_2, \dots\}$ je konečný systém disjunktních množin s diametrem nejvýše $\frac{2}{n}$ pokrývající K. Nechť $\mathcal{A}_n$ je množina funkcí konstantních na prvcích $\mathcal{D}_n$ s racionálními (resp. „komplexně racionálními") hodnotami. Pak $\mathcal{A}_n$ je spočetná. Tedy i množina $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ je spočetná. Tvrdíme, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$.

Nechť $f \in C(K)$ a $\varepsilon > 0$. Pak f je stejnoměrně spojitá na K, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta$, kde ρ je metrika prostoru K. Nalezněme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{n} < \delta$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je takové, že $\mathcal{D}_n = \{D_1, \dots, D_k\}$. Bez újmy na obecnosti (po eventuálním přečíslování) můžeme předpokládat, že všechny množiny D_i jsou neprázdné. V každé množině D_i zvolíme prvek x_i a nalezneme q_i racionální (případně „komplexně racionální") tak, aby $|q_i - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně položíme $g = \sum_{i=1}^{k} q_i \chi_{D_i}$. Pak $g \in \mathcal{A}$. Dále, je-li $x \in K$ libovolné, pak $x \in D_j$ pro nějaké j. Máme $\rho(x, x_j) \le \frac{2}{n} < \delta$, a tedy $|f(x) - g(x)| = |f(x) - q_j| \le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - q_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.

(d) Prostor $L_p(\Omega)$ lze přirozeně chápat jako podprostor $L_p(\mathbb{R}^n)$, tedy stačí ukázat separabilitu $L_p(\mathbb{R}^n)$. Pro $j \in \mathbb{N}$ označme $K_j = B_{\mathbb{R}^n}(0, j)$. Pak dle (c) existuje spočetná množina $\mathcal{A}_j$ spojitých funkcí na K_j která je hustá v prostoru $(C(K_j), \|\cdot\|_\infty)$. Rozšiřme funkce z $\mathcal{A}_j$ nulou mimo K_j a chápejme je jako funkce na celém $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že spočetná množina $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j$ je hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Nechť $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ a $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty[7], [R, Věta 3.14], je množina $C_c(\mathbb{R}^n)$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$. Tedy existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je takové, že K_j obsahuje nosič g. Pak existuje $h \in \mathcal{A}_j$ taková, že

[5] Henri Léon Lebesgue

[6] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1891)

[7] Nikolaj Nikolajevič Luzin (Николай Николаевич Лузин) (1912)

$\|g-h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K_j)^{1/p}}$. Máme $\|g-h\|_p^p = \int_{K_j}|g-h|^p \,\mathrm{d}\lambda \le \frac{\varepsilon^p}{2^p\lambda(K_j)}\lambda(K_j) = (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Tedy dohromady $\|f-h\|_p \le \|f-g\|_p + \|g-h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Později uvidíme, že pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Jednou z motivací ke studiu nekonečných řad v normovaných lineárních prostorech je základní nástroj pro práci s Hilbertovými prostory – ortonormální systémy a báze (vizte oddíl 6). Protože ortonormální báze v obecném Hilbertově prostoru může být nespočetná, je nezbytné zabývat se i zobecněnými řadami.

DEFINICE 27. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Uvědomme si, že v normovaných lineárních prostorech platí stejná nutná podmínka konvergence řady jako pro řady reálných čísel: je-li $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergentní, pak $x_n \to 0$. (Důkaz je stejný: $x_n = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$.)

FAKT 28. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

DŮKAZ. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^N\|x_n\| \le \sum_{n=1}^\infty\|x_n\|$ pro každé $N \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti normy (Tvrzení 2(b)) tedy dostáváme $\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\| = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^\infty\|x_n\|$.

□

PŘÍKLAD 29. Vektory $e_n = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě. Vskutku, pro $x \in c_0$ máme $\left\|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right\|_\infty = \|(0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)\|_\infty = \sup_{k>n}|x_k| \to 0$ z definice limity. Podobně pro $x \in \ell_p$ máme $\left\|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right\|_p = \|(0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$.

◇

VĚTA 30 (Test úplnosti). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť je řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ absolutně konvergentní. Označme $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ její částečné součty. Pak pro indexy $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ platí

$$\|s_n - s_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^n x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|.$$

Z platnosti Bolzanovy[8]-Cauchyovy[9] podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ tedy dostáváme platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $\{s_n\}$. Ta je proto konvergentní, neboť X je Banachův.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Nejprve ukážeme, že $\{x_n\}$ má konvergentní podposloupnost. S využitím cauchyovskosti nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ tak, že $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $l \ge n_k$. Speciálně platí $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Řada

[8]Bernard Bolzano (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano)

[9]Augustin-Louis Cauchy

$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ je tedy absolutně konvergentní, takže existuje $z \in X$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}) = z$. To ale znamená, že

$$z = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Tedy $\{x_{n_k}\}$ konverguje k $x = z + x_{n_1}$.

Na závěr zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, tedy existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq m_0$. Pak pro všechna $n, k \geq m_0$ platí $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Zafixujeme-li nyní $n \geq m_0$, pak $\|x_n - x\| = \lim_{k\to\infty}\|x_n - x_{n_k}\| \leq \varepsilon$. Tedy $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq m_0$, což znamená, že $x_n \to x$.

□

DEFINICE 31. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí, že

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Je-li zobecněná řada konvergentní, pak symbolem $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ rozumíme též její součet (který je určen jednoznačně, vizte Větu 33).

DEFINICE 32. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

VĚTA 33. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X konvergující k x. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.
(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(c) $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.
(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.
(e) Je-li $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ libovolná prostá posloupnost taková, že $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\} \subset \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\gamma_n} = x$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$, $x \neq y$ jsou součty naší zobecněné řady. Položme $\varepsilon = \|x - y\| > 0$. Pak dle definice existují konečné množiny $F_x, F_y \subset \Gamma$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_x$ a $\left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_y$. Dále položme $F = F_x \cup F_y$. Pak $\varepsilon = \|x - y\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| + \left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což je spor.

(b) Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ disjunktní s F platí

$$\left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| = \left\|\sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma\right\| + \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Nechť $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$ je permutace. Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Množina $\pi^{-1}(F)$ je konečná a pro

$F' \supset \pi^{-1}(F)$ konečnou platí $\pi(F') \supset F$, a tedy $\left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_{\pi(\gamma)}\right\| = \left\|x - \sum_{\gamma\in\pi(F')} x_\gamma\right\| < \varepsilon$. To znamená, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$.

(d) Dle (b) zobecněná řada splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $F \subset \Gamma$ je příslušná konečná množina z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro toto ε. Je-li $\gamma \notin F$, pak $\{\gamma\} \cap F = \emptyset$, a tedy $\|x_\gamma\| < \varepsilon$. To znamená, že $\{\gamma \in \Gamma;\ \|x_\gamma\| \geq \varepsilon\} \subset F$, tedy speciálně je to množina konečná.

(e) Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\gamma_k}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F \subset \{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\}$ a že $F \neq \emptyset$. Položme $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ \gamma_n \in F\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \supset F$, takže $\|x - s_n\| < \varepsilon$.

□

TVRZENÍ 34. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$. Potom platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $x = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} \in \mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma > x - \varepsilon$. Pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $F' \supset F$ tedy máme $\left|x - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma\right| = x - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma \leq x - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma < \varepsilon$. Odtud plyne $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$.

$\Rightarrow$ Je-li $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$, pak existuje $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left|x - \sum_{\gamma\in H'} a_\gamma\right| < 1$ pro každou $H' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H' \supset H$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ pak máme $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in H\cup F} a_\gamma < x + 1$, tedy $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$.

Závěrečné tvrzení pak bylo dokázáno v první části důkazu.

□

TVRZENÍ 35. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, $\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad $\mathbb{K}$ a nechť $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sum_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma + y_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ a $\sum_{\gamma\in\Gamma} c x_\gamma = c\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$.*

DŮKAZ. Označme $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ a $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existují $F_x, F_y \subset \mathcal{F}(\Gamma)$ takové, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$, resp. $\left\|y - \sum_{\gamma\in H} y_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_y$. Pro libovolnou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x \cup F_y$ je tedy $\left\|x + y - \sum_{\gamma\in H}(x_\gamma + y_\gamma)\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| + \left\|y - \sum_{\gamma\in H} y_\gamma\right\| < 2\varepsilon$. Podobně, $\left\|cx - \sum_{\gamma\in H} c x_\gamma\right\| = |c|\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| \leq |c|\varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$.

□

VĚTA 36. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ plyne z Věty 33(b). $\Leftarrow$ Najdeme množiny $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ v $\mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset\colon \left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \frac{1}{n}.$$

Položme $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost: Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pak pro libovolná $m > n \geq n_0$ máme $\|y_m - y_n\| = \left\|\sum_{\gamma\in F_m} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma\right\| = \left\|\sum_{\gamma\in F_m\setminus F_n} x_\gamma\right\| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy $\{y_n\}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Ukážeme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|y_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F_{n_0} platí

$$\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma\right\| + \left\|\sum_{\gamma\in F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma\right\| = \|x - y_{n_0}\| + \left\|\sum_{\gamma\in F\setminus F_{n_0}} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Tvrzení (b) ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a tvrzení (a). Nechť $s = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\| = \sup\{\sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\|;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\} < +\infty$ (Tvrzení 34). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\| > s - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ neprotínající F platí

$$\Bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\Bigr\| \leq \sum_{\gamma\in F'}\|x_\gamma\| = \sum_{\gamma\in F\cup F'}\|x_\gamma\| - \sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\| < s - (s-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme (c). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme množinu $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \cap F = \emptyset$. Pak $F \cap \Lambda \in \mathcal{F}(\Lambda)$ a každá $F' \in \mathcal{F}(\Lambda)$ neprotínající $F \cap \Lambda$ je též disjunktní s F. Tedy $\bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ a Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněnou řadu $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ je ověřena.

□

Zobecněné řady jsou definovány bez jakékoliv struktury na indexové množině Γ. Ve speciálním případě $\Gamma = \mathbb{N}$ máme na $\mathbb{N}$ strukturu uspořádání, pomocí které jsou definovány „obyčejné“ řady. Nyní se tedy podíváme na vztah řad $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a zobecněných řad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

TVRZENÍ 37.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k x.
(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.
(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

DŮKAZ. (a) Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ neprázdná taková, že $\bigl\|x - \sum_{n\in F'} x_n\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$. Položme $n_0 = \max F$. Pak pro $n \geq n_0$ platí $F \subset F' = \{1,\dots,n\}$, a tedy $\bigl\|x - \sum_{i=1}^n x_i\bigr\| = \bigl\|x - \sum_{i\in F'} x_i\bigr\| < \varepsilon$. To dokazuje, že $\sum_{n=1}^\infty x_n = x$.

(b) Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $F \subset \mathbb{N}$ konečnou neprázdnou takovou, že $\bigl\|\sum_{n\in H} x_n\bigr\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F. Dále nalezneme $n_0 \geq \max F$ takové, že $\bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\bigr\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ platí

$$\begin{aligned}\Bigl\|x - \sum_{n\in F'} x_n\Bigr\| &\leq \Bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n=1}^{n_0} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in F'} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Bigr\| = \\ &= \Bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus F} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in F'\setminus F} x_n\Bigr\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

To znamená, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Platí $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^n a_i$. Je-li $F \subset \mathbb{N}$ konečná neprázdná, pak $\sum_{i\in F} a_i \leq \sum_{i=1}^{\max F} a_i$, a tedy $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup\{\sum_{n\in F} a_n;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}$. Zbytek plyne z Tvrzení 34.

□

DŮSLEDEK 38. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

DEFINICE 39. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

VĚTA 40. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.
(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DůKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Je-li π permutace na $\mathbb{N}$, pak dle Věty 33(c) je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$. Díky Tvrzení 37(a) tedy máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

(ii)⇒(iii) je zjevná.

(iii)⇒(i) Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Není-li tomu tak, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $F \subset \mathbb{N}$ existuje konečná $F' \subset \mathbb{N}$, $F' \cap F = \emptyset$ taková, že $\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\| \geq \varepsilon$. Můžeme tedy indukcí zkonstruovat posloupnost $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ konečných neprázdných podmnožin $\mathbb{N}$ splňující $\max F_k < \min F_{k+1}$ a $\left\|\sum_{n\in F_k} x_n\right\| \geq \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Položme ještě $F_0 = \{0\}$ a $D_k = \{\max F_{k-1} + 1, \dots, \max F_k\} \setminus F_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nechť nyní π je permutace $\mathbb{N}$, která postupně v rostoucím pořadí vyjmenovává prvky množin D_1, F_1, D_2, F_2, atd. Pak existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a posloupnost $\{p_k\} \subset \mathbb{N}_0$ tak, že $\pi\big(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}\big) = F_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $\left\|\sum_{n=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(n)}\right\| = \left\|\sum_{n\in F_k} x_n\right\| \geq \varepsilon$, což znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. To je spor s předpokladem.

□

VĚTA 41. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní. Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

DůKAZ. První tvrzení plyne z Důsledku 38 a Věty 36(b). V $\mathbb{R}$ plyne opačná implikace z Věty 40 a z Riemannovy[10] věty o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad.

□

PŘÍKLAD 42. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, platí, že řada v jeho vyjádření $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje dokonce bezpodmínečně. Vskutku, mějme dáno $x \in c_0$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus F'}|x_n| \leq \sup_{n\geq n_0}|x_n| \leq \varepsilon$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

Podobně pro $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon^p$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\|^p \leq \sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon^p$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

◇

Dle předchozího příkladu tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ v prostoru c_0 konverguje bezpodmínečně, ale nikoli absolutně.

PŘÍKLAD 43. Pro každý vektor $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ v $\ell_p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, platí, že $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$. Vskutku, nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\|x\|^p = \sum_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|^p$, dle Věty 33(b) existuje konečná $F \subset \Gamma$ taková, že $\sum_{\gamma\in F'}|x_\gamma|^p < \varepsilon^p$ kdykoli $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \cap F = \emptyset$. Je-li nyní $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$, pak $x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma e_\gamma = (y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, kde $y_\gamma = 0$ pro $\gamma \in H$ a $y_\gamma = x_\gamma$ jinak. Pro libovolnou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ pak je $\sum_{\gamma\in F'}|y_\gamma|^p = \sum_{\gamma\in F'\setminus H}|x_\gamma|^p < \varepsilon^p$, odkud plyne, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma e_\gamma\right\| \leq \varepsilon$.

Okamžitým důsledkem je fakt, že množina všech vektorů v $\ell_p(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic, je hustá v $\ell_p(\Gamma)$.

◇

3. Lineární operátory a funkcionály

Z lineární algebry víme, že základním nástrojem při studiu vektorových prostorů jsou lineární zobrazení. V analýze přirozeně pracujeme se zobrazeními kompatibilními s metrickou strukturou, tedy zejména se zobrazeními spojitými. Ve funkcionální analýze tedy ústřední roli hrají spojitá lineární zobrazení.

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Dále $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann

a $\operatorname{Rng} T = T(X)$ jsou podprostory X, resp. Y. Zobrazení T je prosté, právě když $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Lineární zobrazení z X do $\mathbb{K}$ se nazývá lineární forma na X.

Snadno si lze rozmyslet následující fakt.

FAKT 44. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.*

TVRZENÍ 45. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *T je spojité.*
(ii) *T je spojité v jednom bodě.*
(iii) *T je spojité v 0.*
(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*
(v) *T je lipschitzovské.*
(vi) *T je stejnoměrně spojité.*
(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*
(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*
(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

DŮKAZ. Zjevně (i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii) Nechť T je spojité v $x \in X$ a nechť $x_n \to 0$. Pak $x_n + x \to x$, a tedy $T(x_n + x) \to T(x)$. Odtud $T(x_n) = T(x_n + x - x) = T(x_n + x) - T(x) \to T(x) - T(x) = 0 = T(0)$.

(iii)⇒(iv) Existuje $\delta > 0$ takové, že $\|T(y)\| = \|T(y) - T(0)\| \leq 1$, kdykoli $\|y\| = \|y - 0\| \leq \delta$. Pak pro $x \in X$ nenulové platí, že

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\delta\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

Nerovnost ve (iv) tedy platí pro $C = \frac{1}{\delta}$.

(iv)⇒(v) Pro libovolná $x, y \in X$ platí $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|$, tedy T je C-lipschitzovské.

(v)⇒(vi)⇒(i) a (iv)⇒(vii)⇒(viii)⇒(ix) jsou zřejmé.

(viii)⇒(iv) Nechť $C \geq 0$ je takové, že $\|T(x)\| \leq C$ kdykoli $x \in B_X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ platí $\|T(x)\| = \|x\|\big\|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\big\| \leq C\|x\|$.

(ix)⇒(viii) Nechť $\delta > 0$ a $C \geq 0$ jsou taková, že $\|T(x)\| \leq C$ kdykoli $x \in U(0,\delta)$. Pak pro $x \in B_X$ platí, že $\|T(x)\| = \frac{2}{\delta}\big\|T\big(\frac{\delta}{2}x\big)\big\| \leq \frac{2C}{\delta}$.

□

Zobrazením splňujícím (vii) se někdy říká omezená. Tedy lineární zobrazení je spojité, pravě když je omezené.

V kontextu funkcionální analýzy se lineárním zobrazením říká též lineární *operátory* a lineárním formám lineární *funkcionály*. Nás budou především zajímat spojité lineární operátory a spojité lineární funkcionály. Všimněme si, že je-li $T\colon X \to Y$ spojitý lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory X a Y, pak $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor X. Na druhou stranu, $\operatorname{Rng} T$ nemusí být uzavřený, vizte Příklad 47 a též Větu 4.12(e).

Připomeňme, že množina všech lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y tvoří vektorový prostor s operacemi uvažovanými bodově. Jsou-li nyní X, Y normované lineární prostory, pak součet spojitých lineárních zobrazení z X do Y je opět spojité lineární zobrazení a podobně pro násobek skalárem (Tvrzení 2). Tedy množina všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y tvoří vektorový prostor, který značíme $\mathcal{L}(X,Y)$. Dále pro každé $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ položíme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X}\|T(x)\|.$$

Díky Tvrzení 45 je $\|T\|$ konečné nezáporné číslo. Nyní si rozmyslíme, že $T \mapsto \|T\|$ je norma na $\mathcal{L}(X,Y)$:

(i) Je-li $T \neq 0$, pak existuje $x \in X$, $x \neq 0$ takové, že $T(x) \neq 0$. Tedy $T(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|}T(x) \neq 0$, takže $\|T\| > 0$.

(ii) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\|S+T\| = \sup_{x \in B_X} \|(S+T)(x)\| = \sup_{x \in B_X} \|S(x) + T(x)\| \leq \sup_{x \in B_X} \|S(x)\| + \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \|S\| + \|T\|$.

(iii) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $\|\alpha T\| = \sup_{x \in B_X} \|(\alpha T)(x)\| = \sup_{x \in B_X} \|\alpha(T(x))\| = \sup_{x \in B_X} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s výše uvedenou normou je tedy normovaný lineární prostor.

LEMMA 46. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$. Je-li X netriviální, pak též $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak $\|T(x)\| = \|x\| \cdot \|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| \leq \|T\|\|x\|$, neboť $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$.

(b) Zjevně $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$. Na druhou stranu, je-li $x \in B_X$, pak $(1 - \frac{1}{n})x \in U_X$ a $\big\|T\big((1-\frac{1}{n})x\big)\big\| \to \|T(x)\|$. Tedy $\sup_{x \in U_X} \|T(x)\| \geq \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \|T\|$.

Předpokládejme dále, že X je netriviální. Je-li $x \in X \setminus \{0\}$, je $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ a

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup_{y \in S_X} \|T(y)\|.$$

Tedy $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \leq \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \|T\|$. Na druhou stranu, je-li $x \in B_X \setminus \{0\}$, pak $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Tedy

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in B_X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in B_X \setminus \{0\}} \|T(x)\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| = \|T\|.$$

(c) Označme $A = \{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$. Díky (a) platí $\|T\| \in A$ a tedy $\inf A \leq \|T\|$. Dokažme nyní opačnou nerovnost. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice infima najdeme $C \in A$, $C < \inf A + \varepsilon$. Pak

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{x \in B_X} C\|x\| = C < \inf A + \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, je $\|T\| \leq \inf A$.

□

PŘÍKLAD 47. Definujme zobrazení $T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ předpisem $T(x) = \big(\frac{1}{n^2}x_n\big)_{n=1}^\infty$ pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$. Snadno nahlédneme, že T je lineární. Dále $\|T(x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\frac{1}{n^2}x_n\right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|$ pro každé $x \in \ell_\infty$. Podle Tvrzení 45 je tedy T spojité a dle Lemmatu 46(c) je $\|T\| \leq 1$. Označme $e_1 = (1,0,0,0,\dots) \in \ell_\infty$. Pak $\|e_1\| = 1$ a $T(e_1) = e_1$, takže $\|T\| = 1$.

Tvrdíme, že $\operatorname{Rng} T$ je podprostor ℓ_∞, který není uzavřený. Vskutku, položme $y_n = (1,2,3,\dots,n,0,0,\dots) \in \ell_\infty$. Pak $T(y_n) = \big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\big)$. Platí, že $T(y_n) \to z \in \ell_\infty$, kde $z = \big(\frac{1}{k}\big)_{k=1}^\infty$, neboť $\|z - T(y_n)\| = \big\|\big(0,\dots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\dots\big)\big\| = \frac{1}{n+1}$. Nicméně $z \notin \operatorname{Rng} T$. Jinak by existoval prvek $u = (u_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ takový, že $T(u) = z$. Pro takový prvek ale musí nutně platit, že $u_k = k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, což není možné.

◇

FAKT 48. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ díky Lemmatu 46 platí $\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\|\|x\| \to 0$.

□

FAKT 49. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ platí $\|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$. Tedy $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$. □

VĚTA 50. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

DŮKAZ. Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí $\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Máme tak definované zobrazení $T: X \to Y$.

Ukažme, že T je lineární. Mějme $x, y \in X$. Pak

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} \big(T_n(x) + T_n(y)\big) = T(x) + T(y)$$

dle Tvrzení 2. Podobně, $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim\big(\alpha T_n(x)\big) = \alpha T(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dále pro $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Protože $\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leq \|T_n - T_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, je číselná posloupnost $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Tudíž $\sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$, tj. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Zbývá dokázat, že $T_n \to T$ v normě prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \to T$. □

DEFINICE 51. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Prvky X^* jsou tedy spojité lineární funkcionály na X. Prostor X^* je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \sup_{x\in B_X} |f(x)|$. Uvědomme si, že je-li X reálný, pak ze symetrie jednotkové koule plyne, že $\|f\| = \sup_{x\in B_X} f(x)$.

Protože jak $\mathbb{R}$, tak $\mathbb{C}$ jsou úplné prostory, důsledkem Věty 50 je následující věta.

VĚTA 52. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

PŘÍKLAD 53. Nechť $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, nebo $X = c_0$, nebo $X = c$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n: X \to \mathbb{K}$ danou předpisem $f_n(x) = x_n$ pro $x = (x_k) \in X$. Pak je snadno vidět, že f_n je lineární forma a $|f_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy $f_n \in X^*$ a $\|f\| \leq 1$. Protože $f_n((0,\dots,0,1,0,0,\dots)) = 1$, kde 1 je pouze na n-té souřadnici, je $\|f_n\| = 1$. Funkcionálům f_n budeme říkat kanonické souřadnicové funkcionály. ◇

LEMMA 54. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Zvolme $x \in X$ pevné. Je-li $y \in \operatorname{Ker} f$ libovolné, pak $|f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|\|x-y\|$. Tedy $|f(x)| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolme $0 < \varepsilon < \|f\|$ libovolně. Najděme $y \in S_X$ tak, že $|f(y)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Pak $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$, a tedy

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leq \left\| x - \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right) \right\| = \frac{|f(x)|}{|f(y)|} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Jelikož bylo ε libovolné, je důkaz dokončen.

□

Následující příklad ukazuje, že součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený (srv. Tvrzení 23 a poznámka před).

PŘÍKLAD 55. Uvažujme prostor ℓ_2 a jeho následující dva podprostory: $Y = \{x \in \ell_2;\ x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\operatorname{span}}\{e_{2n} + n e_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory. Pak $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_{2n}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, tedy Y i Z jsou uzavřené podprostory ℓ_2. Tvrdíme, že $Y + Z$ je hustý podprostor ℓ_2, který není uzavřený.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_{2n-1} \in Y$ a $e_{2n} = (e_{2n} + n e_{2n-1}) - n e_{2n-1} \in Z + Y$. Tedy podprostor $Y + Z$ obsahuje všechny kanonické bázové vektory i jejich lineární kombinace, tudíž je hustý v ℓ_2 (Příklad 29). Dále si všimněme, že je-li $z \in Z$, pak $z_{2n-1} = f_{2n-1}(z) = n f_{2n}(z) = n z_{2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vskutku, pro $z \in \operatorname{span}\{e_{2n} + n e_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ je $z = \sum_{j=1}^{k} c_j(e_{2j} + j e_{2j-1})$, a tedy $f_{2j-1}(z) = j c_j = j f_{2j}(z)$ pro $1 \leq j \leq k$ a $f_{2j-1}(z) = 0 = j f_{2j}(z)$ pro $j > k$. Je tedy $f_{2n-1}(z) - n f_{2n}(z) = 0$ pro všechna z z husté podmnožiny Z, a protože funkce $f_{2n-1} - n f_{2n}$ je spojitá na Z, je nutně nulová na celém Z.

Položme konečně $x = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n}$. Předpokládejme, že $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} = x_{2n} = y_{2n} + z_{2n} = z_{2n}$, a tedy $z_{2n-1} = 1$. To ovšem nelze, neboť $z \in \ell_2$. Tedy $x \notin Y + Z$.

◇

Připomeňme, že je-li T lineární bijekce mezi vektorovými prostory X a Y, pak inverzní zobrazení T^{-1} je též lineární.

DEFINICE 56. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

POZNÁMKA 57. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$. Pro libovolná $x, y \in X$ pak totiž máme $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|$.

PŘÍKLAD 58. Prostor c je izomorfní prostoru c_0. Definujme zobrazení $T\colon c_0 \to c$ předpisem

$$(x_1, x_2, x_3 \dots) \mapsto (x_2 + x_1, x_3 + x_1, x_4 + x_1, \dots).$$

Pak T je dobře definováno, neboť $\lim(x_n + x_1) = x_1$. Snadno je vidět, že T je lineární. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + x_1| \leq |x_n| + |x_1| \leq \|x\|_{c_0} + \|x\|_{c_0} = 2\|x\|_{c_0}$, a tedy $\|T(x)\|_c = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_{c_0}$. Zobrazení T je tedy spojité lineární zobrazení.

Dále definujme zobrazení $S\colon c \to c_0$ předpisem

$$(y_1, y_2, y_3, \dots) \mapsto (\lim y_n, y_1 - \lim y_n, y_2 - \lim y_n, y_3 - \lim y_n, \dots).$$

Pak S je dobře definováno, neboť $\lim_{k\to\infty}(y_k - \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{k\to\infty} y_k - \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Snadno je vidět, že $T \circ S = Id_c$ a $S \circ T = Id_{c_0}$. Odtud plyne, že T je bijekce a S je lineární zobrazení inverzní k T. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $|y_k - \lim y_n| \leq |y_k| + |\lim y_n| = |y_k| + \lim|y_n| \leq |y_k| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| \leq 2\|y\|_c$ a také $|\lim y_n| \leq \|y\|_c \leq 2\|y\|_c$. Tedy $\|S(y)\|_{c_0} \leq 2\|y\|_c$, takže zobrazení S je spojité.

Na závěr si ještě všimněme, že c_0 je vlastní podprostor c, který je izomorfní c.

◇

PŘÍKLAD 59. Prostor $L_1 = L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, tj. prostor ℓ_1 je izometricky vnořen do L_1. Vskutku, označme $f_n = n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})} \in L_1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\|f_n\|_{L_1} = 1$. Definujme zobrazení $T\colon \ell_1 \to L_1$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Pak zjevně $T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je měřitelná, neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí. Podle věty o záměně integrálu a řady pro nezáporné funkce máme

$$\int_0^1 |T(x)| = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

tedy $T(x) \in L_1$ a zároveň vidíme, že $\|T(x)\|_{L_1} = \|x\|_{\ell_1}$. Zobrazení T je zjevně lineární, takže dle Poznámky 57 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 60. Prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0, tj. prostor c_0 je izometricky vnořen do $C([0,1])$. Vskutku, pro $n \in \mathbb{N}$ označme f_n funkci, která je rovna 0 na $[0,1] \setminus \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right)$, je afinní na $\left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right)$ a na $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ a splňuje $f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1$. Pak $\|f_n\|_{C([0,1])} = 1$. Definujme zobrazení $T\colon c_0 \to C([0,1])$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Nechť $x \in c_0$. Pak zjevně $f = T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je afinní na každém intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ a splňuje $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = x_n$. Je tedy spojitá na $(0,1]$. Abychom ukázali spojitost v 0 zprava, všimněme si, že $f(0) = 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Položme $\delta = \frac{1}{2n_0}$. Nechť $t \in (0,\delta)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ takové, že $t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right]$. Tedy $|f(t)| \leq |x_n| < \varepsilon$. Ukázali jsme, že $f \in C([0,1])$, neboli zobrazení T vskutku zobrazuje do prostoru $C([0,1])$. Dále T je zjevně lineární a platí $\|T(x)\|_{C([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |T(x)(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_{c_0}$, takže dle Poznámky 57 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 61. Prostor $\mathcal{L}(\ell_2,\ell_2)$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_∞, a není tedy separabilní. Toto vnoření $I\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2,\ell_2)$ je dáno předpisem $I(y) = T_y$, kde $T_y(x) = (y_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \ell_2$.

Vskutku je-li $y \in \ell_\infty$, pak pro $x \in \ell_2$ je $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n|^2 \leq \|y\|_\infty^2 \|x\|_2^2$, tedy T_y zobrazuje do ℓ_2. Snadno nahlédneme, že T_y je lineární a z předchozího odhadu plyne, že je spojité a $\|T_y\| \leq \|y\|$. Pro opačný odhad stačí vzít kanonické bázové vektory $e_n \in S_{\ell_2}$, neboť $\|T_y\| \geq \sup_n \|T_y(e_n)\| = \sup_n \|y_n e_n\| = \sup_n |y_n| = \|y\|$. Linearitu zobrazení I si lze snadno rozmyslet. Protože $\|I(y)\| = \|T_y\| = \|y\|$, je I izometrie do. Neseparabilita $\mathcal{L}(\ell_2,\ell_2)$ pak plyne z Věty 26(b).

◇

TVRZENÍ 62. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.
(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.
(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ Máme $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$ je spojité, platí tedy pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$. Tudíž $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \neq \{0\}$, a tedy $\|T^{-1}\| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ a $C_2 = \|T\|$.

$\Leftarrow$ Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté: Je-li $T(x) = 0$, pak $\|x\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(x)\| = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \operatorname{Rng} T$ pak máme $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1}\|y\|$. Tedy i T^{-1} je spojité.

(b) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus na. Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \le \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ platnému pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \to T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

(c) Podle (b) je $\operatorname{Rng} T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle Tvrzení 5(a).

$\square$

FAKT 63. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*
(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.
(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

DŮKAZ. (a) Podle Tvrzení 62(a) existují konstanty $C > 0$ a $D > 0$ takové, že $C\|x\| \le \|T(x)\|$ pro každé $x \in X$ a $D\|y\| \le \|S(y)\|$ pro každé $y \in Y$. Pro každé $x \in X$ tedy máme $CD\|x\| \le D\|T(x)\| \le \big\|S\big(T(x)\big)\big\| = \|S \circ T(x)\| \le \|S\|\|T\|\|x\|$. Podle Tvrzení 62(a) to znamená, že $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Pro každé $x \in X$ máme $\|S \circ T(x)\| = \big\|S\big(T(x)\big)\big\| = \|T(x)\| = \|x\|$ a aplikujeme Poznámku 57.

$\square$

VĚTA 64. *Nechť X, $\widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak $\widehat{T}$ je též izometrie do.*

DŮKAZ. Dle Věty 15.8 existuje jednoznačně určené spojité zobrazení $\widehat{T} \colon \widehat{X} \to Y$, které rozšiřuje T. Ukážeme, že $\widehat{T}$ je lineární. Nechť $x, y \in \widehat{X}$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. $\widehat{T}$ je spojité, tudíž $\widehat{T}(x_n) \to \widehat{T}(x)$ a $\widehat{T}(y_n) \to \widehat{T}(y)$. Ze spojitosti sčítání (Tvrzení 2) plyne, že $x_n + y_n \to x + y$. Využijeme-li znovu spojitost $\widehat{T}$, máme $\widehat{T}(x + y) = \lim \widehat{T}(x_n + y_n) = \lim T(x_n + y_n) = \lim\big(T(x_n) + T(y_n)\big) = \lim\big(\widehat{T}(x_n) + \widehat{T}(y_n)\big) = \widehat{T}(x) + \widehat{T}(y)$, kde poslední rovnost plyne opět z Tvrzení 2. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x_n \to \alpha x$ a tedy $\widehat{T}(\alpha x) = \lim \widehat{T}(\alpha x_n) = \lim T(\alpha x_n) = \lim \alpha T(x_n) = \lim \alpha \widehat{T}(x_n) = \alpha \widehat{T}(x)$.

Konečně, $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|\widehat{T}(x_n)\| = \lim\|T(x_n)\| \le \lim\|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$. Odtud plyne $\|\widehat{T}\| \le \|T\|$. Jelikož obrácená nerovnost platí díky tomu, že $\widehat{T}$ je rozšířením T, máme $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak předchozí výpočet dává, že $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|T(x_n)\| = \lim\|x_n\| = \|x\|$, tedy i $\widehat{T}$ je izometrie do.

$\square$

4. Konečněrozměrné prostory

Zásadním problémem při práci s nekonečněrozměrnými normovanými lineárním prostory je to, že uzavřené omezené množiny obecně nejsou kompaktní. Ve skutečnosti je tato vlastnost pro nekonečněrozměrné prostory charakteristická, jak uvidíme ve Větě 68.

LEMMA 65 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

DŮKAZ. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u, Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| \le d + \eta$. Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u - v\|y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \left\|\frac{u - v}{\|u - v\|} - y\right\| = \frac{\big\|u - \big(v + \|u - v\|y\big)\big\|}{\|u - v\|} \ge \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y}\|x - y\| \ge \frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$.

$\square$

POZNÁMKA. Není-li Y uzavřený, nemusí předchozí tvrzení platit: podprostor c_{00} je hustý v c_0 a tedy pro každé $x \in c_0$ platí $\operatorname{dist}(x, c_{00}) = 0$. Pokud je Y uzavřený, nemusí existovat $x \in S_X$ s vlastností $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. To ukážeme v Příkladu 67.

LEMMA 66. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$.
(ii) Existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.
(iii) Existují $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ a $v \in \operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.
(iv) Pro každé $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ existuje $v \in \operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) ihned plyne z Lemmatu 54 a zjevně (iv)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(ii) Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Ker} f$ platí

$$\|x - y\| = \frac{\big\|u - \big(v + \|u - v\|y\big)\big\|}{\|u - v\|} \geq \frac{\operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)}{\|u - v\|} = 1.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leq \|x\| = 1$, platí $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.

(i)$\Rightarrow$(iv) Nechť $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Položme $v = u - \frac{f(u)}{f(x)}x$. Pak $v \in \operatorname{Ker} f$ a $\|u - v\| = \left\|\frac{f(u)}{f(x)}x\right\| = |f(u)| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$ dle Lemmatu 54.

□

PŘÍKLAD 67. Nechť $Y = \left\{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\right\}$. Ukážeme, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x \in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále pro žádné $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Pak zřejmě f je lineární forma na c_0 a $Y = \operatorname{Ker} f$. Dále pro každé $x \in B_{c_0}$ máme $|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, tedy f je spojitý lineární funkcionál. Navíc pro $x = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$ máme $x \in B_{c_0}$ a $f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k}$, tedy $\|f\| = 1$.

K důkazu tvrzení nyní stačí podle Lemmatu 66 ověřit, že neexistuje $x \in S_{c_0}$ s vlastností $|f(x)| = 1$. Ale to je ihned vidět z pozorování, že pro každé $x \in S_{c_0}$ existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $|x_j| < 1$. Pak totiž

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

◇

VĚTA 68. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) B_X je kompaktní.
(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.
(v) Každá lineární forma na X je spojitá.
(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení, a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená (vizte Větu 15.2). Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $\|\cdot\|_X$ je spojitá na X, a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$, takže $C \leq \left\| T\left(\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2}\right)\right\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$, odkud $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C}\|y\|_X$.

(ii)⇒(iii) Je-li $T : \mathbb{K}^n \to X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

(iii)⇒(i) Nechť X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: V prvním kroku najdeme libovolné $x_1 \in S_X$. Máme-li $x_1, \dots, x_n$, je $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ vlastní a uzavřený podprostor X (Důsledek 25). Tedy dle Lemmatu 65 existuje x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$. Tím je konstrukce dokončena. Zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}$ pak nemá konvergentní podposloupnost, neboť jsou všechny její prvky od sebe navzájem vzdáleny alespoň o $\frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

(i)⇒(vi) Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Zafixujme nějakou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X. Označme eukleidovskou[11] normu na $\mathbb{K}^n$ jako $\|\cdot\|_e$. Nechť $T_1 : (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ a $T_2 : (X, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ jsou izomorfismy jako v důkazu (i)⇒(ii). Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = Id_X$, a tedy $Id_X : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus (Fakt 63), tj. normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní dle Tvrzení 13.

(vi)⇒(v) Předpokládejme, že na $(X, \|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $\|\cdot\|_0$ je norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X,\|\cdot\|)}$. Tedy normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_0$ nejsou ekvivalentní.

(v)⇒(i) Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ a položme $f(e_{\gamma_n}) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem není omezená na B_X.

(i)⇒(iv) Nechť Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T : (X, \|\cdot\|) \to Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Díky tvrzení (vi) stačí dokázat, že $T : (X, \|\cdot\|_1) \to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i T(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| \leq \max\big\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\big\} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

(iv)⇒(v) je triviální.

□

Všimněme si, že podle předchozí věty jsou všechny uzavřené omezené množiny v konečněrozměrném prostoru X kompaktní. Vskutku, každá taková množina je uzavřenou podmnožinou nějaké koule $B(0, r)$, která je kompaktní, neboť je to spojitý obraz kompaktní koule B_X při zobrazení $x \mapsto rx$ (Tvrzení 2(c)).

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Stejně jako u každé abstraktní matematické struktury, tak i u normovaných lineárních prostorů potřebujeme znát základní operace, které tato struktura připouští. V případě normovaných lineárních prostorů studujeme jejich součiny, faktorprostory a algebraické a topologické doplňky podprostorů.

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$. Na kartézském součinu $X \times Y = \{(x, y);\ x \in X, y \in Y\}$ se zavádí struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ tak, že operace se provádějí po složkách. Identifikujeme-li prostor X, resp. Y s podprostorem $\{(x, 0);\ x \in X\}$, resp. $\{(0, y);\ x \in Y\}$, pak vektorový prostor $X \times Y$ je direktním součtem $X \oplus Y$.

Jsou-li nyní $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

[11] Eukleides (Ευκλείδης)

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$: Nechť $|\cdot|_p$ značí příslušnou kanonickou normu na $\mathbb{R}^2$. Pak zjevně $\|(x,y)\|_p = \big|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p$. Nechť (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou prvky $X \times Y$. Pak $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_p = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|_p = \big|\big(\|x_1+x_2\|_X, \|y_1+y_2\|_Y\big)\big|_p$. Protože $\|x_1+x_2\|_X \leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$ a $\|y_1+y_2\|_Y \leq \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y$, je snadno vidět z definice $|\cdot|_p$, že

$$\begin{aligned}\big|\big(\|x_1 + x_2\|_X, \|y_1 + y_2\|_Y\big)\big|_p &\leq \big|\big(\|x_1\|_X + \|x_2\|_X, \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y\big)\big|_p = \\ &= \big|\big(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\big) + \big(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\big)\big|_p.\end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|_p$ pak dostaneme

$$\big|\big(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\big) + \big(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\big)\big|_p \leq \big|\big(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\big)\big|_p + \big|\big(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\big)\big|_p.$$

Tedy dohromady $\|(x_1, y_1)+(x_2, y_2)\|_p \leq \|(x_1, y_1)\|_p + \|(x_2, y_2)\|_p$. Pro $\alpha \in \mathbb{K}$ a $(x, y) \in X \times Y$ pak máme $\|\alpha(x,y)\|_p = \|(\alpha x, \alpha y)\|_p = \big|\big(\|\alpha x\|_X, \|\alpha y\|_Y\big)\big|_p = \big|\big(|\alpha|\|x\|_X, |\alpha|\|y\|_Y\big)\big|_p = \big||\alpha|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p = |\alpha|\big|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p = |\alpha|\|(x,y)\|_p$.

Definice 69. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Je vidět, že prostor X je izometrický podprostoru $\{(x, 0) \in X \oplus_p Y;\ x \in X\}$ a prostor Y je izometrický podprostoru $\{(0, y) \in X \oplus_p Y;\ y \in Y\}$.

Protože $\|(x,y)\|_p = \big|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p$ a všechny normy na $\mathbb{R}^2$ jsou ekvivalentní (Věta 11), plyne odtud snadno, že normy $\|\cdot\|_p$ na $X \times Y$ jsou ekvivalentní, neboli prostory $X \oplus_p Y$ a $X \oplus_q Y$ jsou izomorfní pro libovolná $1 \leq p, q \leq \infty$ (Tvrzení 13).

Všimněme si, že metrika indukovaná normou $X \oplus_\infty Y$ odpovídá součinové metrice na metrickém prostoru $X \times Y$. Protože součin úplných metrických prostorů je úplný (Věta 15.6), plyne odtud, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_\infty Y$ je Banachův prostor. Vzhledem k výše zmíněné ekvivalenci norem tedy z Tvrzení 62(b) plyne, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_p Y$ je Banachův prostor pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Jako nulový vektor slouží prvek $\widehat{0} = Y$. Uvědomme si, že operace jsou dobře definovány, neboť nezáleží na výběru reprezentantů příslušných tříd: Jsou-li totiž $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ takové, že $\widehat{x_1} = \widehat{x_2}$ a $\widehat{y_1} = \widehat{y_2}$, pak $x_1 - x_2 \in Y$ a $y_1 - y_2 \in Y$. Proto $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in Y$, což znamená, že $\widehat{x_1 + y_1} = \widehat{x_2 + y_2}$. Podobně, $\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \in Y$, a tedy $\widehat{\alpha x_1} = \widehat{\alpha x_2}$.

S výše zmíněnými operacemi tvoří X/Y vektorový prostor.

Definice 70. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Snadno je z definice vidět, že kanonické kvocientové zobrazení je lineární a na.

Nechť nyní X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Položíme-li

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

je $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ normovaný lineární prostor: Je-li $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, máme

$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{x}\|_{X/Y} = \|\widehat{\alpha x}\|_{X/Y} &= \inf_{z\in Y}\|\alpha x + z\| = \inf_{z\in Y}\|\alpha x + \alpha z\| = \\ &= \inf_{z\in Y}|\alpha|\|x + z\| = |\alpha| \inf_{z\in Y}\|x + z\| = |\alpha|\|\widehat{x}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\|\widehat{x} + \widehat{y}\|_{X/Y} = \|\widehat{x + y}\|_{X/Y} &= \inf_{z\in Y}\|x + y + z\| = \inf_{z_1,z_2\in Y}\|x + y + z_1 + z_2\| \leq \\ &\leq \inf_{z_1,z_2\in Y}\big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \inf_{z_1\in Y}\inf_{z_2\in Y}\big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \\ &= \inf_{z_1\in Y}\|x + z_1\| + \inf_{z_2\in Y}\|y + z_2\| = \|\widehat{x}\|_{X/Y} + \|\widehat{y}\|_{X/Y}.\end{aligned}$$

Konečně, pro $x \in X$ platí, že $\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \operatorname{dist}(x, Y) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{Y} = Y$, tedy právě když $\widehat{x} = 0$. (Všimněme si, že kvůli poslední vlastnosti je nutná uzavřenost Y.)

Výše zmíněná norma se nazývá kanonická kvocientová norma a v kontextu normovaných lineárních prostorů budeme vždy chápat faktorprostor X/Y jako normovaný lineární prostor opatřený touto normou.

TVRZENÍ 71. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

DŮKAZ. Již víme, že q je lineární a na. Dále $\|q(x)\|_{X/Y} = \|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x + y\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$, tedy q je spojité. Odtud také dostáváme, že $q(U_X) \subset U_{X/Y}$. Obráceně, je-li $\widehat{x} \in U_{X/Y}$ libovolné, pak $1 > \|\widehat{x}\|_{X/Y}$, a tedy z definice normy existuje $y \in \widehat{x}$ splňující $\|y\| < 1$. Toto y splňuje $q(y) = \widehat{x}$. Odtud plyne $U_{X/Y} \subset q(U_X)$ a dohromady dostáváme $q(U_X) = U_{X/Y}$. Konečně, je-li Y vlastní, pak je X/Y netriviální a $\sup_{z\in U_{X/Y}}\|z\| = 1$. Aplikací Lemmatu 46(b) tak dostaneme $\|q\| = 1$.

□

VĚTA 72. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

DŮKAZ. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Věty 30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je absolutně konvergentní řada v X/Y. Z definice normy najdeme prvky $y_n \in \widehat{x_n}$ splňující $\|y_n\| \leq \|\widehat{x_n}\| + \frac{1}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ je absolutně konvergentní řada v X, a tedy je konvergentní (Věta 30). Ze spojitosti kanonického kvocientového zobrazení q dostáváme $q\big(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} q(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je konvergentní.

□

DEFINICE 73. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Připomeňme, že $X = A \oplus B$, právě když pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené vektory $x_A \in A$ a $x_B \in B$ splňující $x = x_A + x_B$.

DEFINICE 74. Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

FAKT 75. *Nechť X je množina.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.
(b) Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

DŮKAZ. (a) Pro $y \in \operatorname{Rng} P$ existuje $x \in X$ splňující $y = P(x)$, a tedy $P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$.

(b) Pro $x \in X$ je $P(x) \in Y$, a tedy $P(P(x)) = P\restriction_Y(P(x)) = P(x)$.

□

Zásadní význam mají projekce lineární (tj. projekce, které jsou zároveň lineárními zobrazeními). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $X = A \oplus B$, pak můžeme definovat zobrazení $P_A\colon X \to X$ a $P_B\colon X \to X$ pomocí $P_A(x) = x_A \in A$ a $P_B(x) = x_B \in B$, kde $x = x_A + x_B$ je výše zmíněný jednoznačný rozklad. Pak P_A i P_B jsou lineární projekce: Nechť $x, y \in X$ a $x = x_A + x_B$, $y = y_A + y_B$ jsou příslušné rozklady. Pak $x + y = (x_A + x_B) + (y_A + y_B) = (x_A + y_A) + (x_B + y_B)$. Jelikož $x_A + y_A \in A$ a $x_B + y_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(x + y) = x_A + y_A = P_A(x) + P_A(y)$ a $P_B(x + y) = x_B + y_B = P_B(x) + P_B(y)$. Podobně, pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x = \alpha(x_A + x_B) = \alpha x_A + \alpha x_B$. Protože $\alpha x_A \in A$ a $\alpha x_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(\alpha x) = \alpha x_A = \alpha P_A(x)$ a $P_B(\alpha x) = \alpha x_B = \alpha P_B(x)$. Konečně, $P_A(P_A(x)) = P_A(x_A) = x_A = P_A(x)$, neboť $x_A = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad x_A. Analogicky dostaneme, že i P_B je projekce.

Projekce P_A a P_B nazýváme projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$. Vzhledem k následujícímu tvrzení se též projekce P_A nazývá projekce na A rovnoběžná s B (a analogicky pro projekci P_B).

TVRZENÍ 76. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$,* $\operatorname{Rng} P_A = A$*,* $\operatorname{Ker} P_A = B$*,* $\operatorname{Rng} P_B = B$ *a* $\operatorname{Ker} P_B = A$*. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

DŮKAZ. Je $(P_A + P_B)(x) = P_A(x) + P_B(x) = x_A + x_B = x$. Dále zjevně platí $\operatorname{Rng} P_A \subset A$. Na druhou stranu, je-li $x \in A$, pak $x = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad a tedy $P_A(x) = x$ a $P_B(x) = 0$. To znamená, že $\operatorname{Rng} P_A = A$ a $A \subset \operatorname{Ker} P_B$. Konečně, je-li $P_B(x) = 0$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $x \in A$. Ostatní dvě rovnosti se dokážou analogicky.

Nechť nyní $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak pro každé $x \in X$ platí $x = P(x) + \bigl(x - P(x)\bigr)$, kde $P(x) \in \operatorname{Rng} P$ a $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$, a tedy $A + B = X$. Je-li $x \in A \cap B$, pak $x = P(y)$ pro nějaké $y \in X$ a zároveň $0 = P(x) = P \circ P(y) = P(y) = x$, tj. $A \cap B = \{0\}$. Proto $X = A \oplus B$. Z rozkladu $x = P(x) + \bigl(x - P(x)\bigr)$ je pak ihned vidět, že $P = P_A$.

□

VĚTA 77. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.
(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $B \subset Y$ je báze Y. Pak B lze doplnit na bázi celého prostoru, existuje tedy lineárně nezávislá množina $C \subset X \setminus B$ taková, že $B \cup C$ je báze X. Položme $Z = \operatorname{span} C$. Pak je ihned vidět, že $X = Y + Z$. Pokud by $Y \cap Z$ obsahoval nenulový prvek x, pak x je netriviální lineární kombinací prvků B a zároveň netriviální lineární kombinací prvků C. To je spor s jednoznačností vyjádření pomocí lineární kombinace prvků $B \cup C$.

(b) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Ukažme, že $q\restriction_A$ je algebraický izomorfismus A na X/Y. Ověřme nejprve prostotu: Je-li $q\restriction_A(a) = q(a) = \widehat{a} = 0$ pro nějaké $a \in A$, pak $a \in Y$, a tedy $a = 0$. K důkazu surjektivity vezměme $\widehat{x} \in X/Y$ a rozložme $x = x_Y + x_A$, kde $x_Y \in Y$ a $x_A \in A$. Pak $x - x_A = x_Y \in Y$, a tedy $q\restriction_A(x_A) = q(x_A) = q(x) = \widehat{x}$.

□

DEFINICE 78. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y v X (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

DEFINICE 79. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

POZNÁMKA. Protože $P_B = Id - P_A$ (Tvrzení 76), k tomu, aby platilo $X = A \oplus_t B$, stačí spojitost jen jedné z projekcí (druhá je pak spojitá automaticky). Díky Tvrzení 76 je tedy podprostor A komplementovaný v X, právě když existuje spojitá lineární projekce z X na A.

Všimněme si také, že pro nenulovou spojitou lineární projekci P v normovaném lineárním prostoru X vždy platí, že $\|P\| \geq 1$, neboť existuje $x \in X$ takový, že $y = P(x) \neq 0$, a protože $P(y) = P(x) = y$, je $\left\|P\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|P(y)\|}{\|y\|} = 1$.

VĚTA 80. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*
(a) Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.
(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$.

DŮKAZ. (a) $Y = \operatorname{Ker} P_Z$ a $Z = \operatorname{Ker} P_Y$ (Tvrzení 76), jejich uzavřenost tedy plyne ze spojitostí projekcí P_Y a P_Z. (b) bude dokázáno později, konkrétně na str. 58.

□

Díky předchozí větě a Větě 77 vidíme, že neuzavřené podprostory mají algebraický, ale nemají topologický doplněk (tj. nejsou komplementované).

VĚTA 81. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $(y, z) \in Y \oplus_1 Z$, pak $T(y + z) = (y, z)$, tedy T je na. Dále pro každé $x \in X$ máme

$$\|x\| = \|P_Y(x) + P_Z(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|\big(P_Y(x), P_Z(x)\big)\|_1 = \|T(x)\|_1 \leq$$
$$\leq \big(\|P_Y\| + \|P_Z\|\big)\|x\|,$$

tedy T je izomorfismus dle Tvrzení 62(a).

$\Leftarrow$ Pro každé $x \in X$ platí $\|P_Y(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|T(x)\|_1 \leq \|T\|\|x\|$, což znamená, že P_Y je spojitá projekce.

□

6. Hilbertovy prostory

Význačnou třídou normovaných lineárních prostorů jsou ty, jejichž norma je generována skalárním součinem. Skalární součin je struktura, která „lineárním“ způsobem definuje kolmost vektorů v prostoru a v důsledku generuje strukturu normovaného lineárního prostoru (Definice 82 a 92). V prostorech se skalárním součinem pak platí základní geometrické poučky, na které jsme zvyklí z eukleidovské roviny (Tvrzení 88). Nekonečněrozměrné prostory se skalárním součinem jsou tak nekonečněrozměrnou variantou klasických eukleidovských prostorů $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$. Klíčovým rysem úplných prostorů se skalárním součinem, tzv. Hilbertových prostorů (Definice 84), je možnost vyjádřit jejich prvky pomocí rozvoje do ortonormální báze (Důsledek 116).

DEFINICE 82. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Uvědomme si, že z (i) a (ii) plyne, že $\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$ pro každé $y \in X$. Dále si uvědomme, že ve druhé proměnné je skalární součin „sdruženě lineární“, tj. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$ pro libovolná $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. V reálném případě je to tedy bilineární forma na X.

TVRZENÍ 83 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost[12]). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*
(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.
(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

DŮKAZ. K důkazu (i) zvolme $x, y \in X$. Pokud $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$, tj. $\langle y, y\rangle > 0$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, x - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle &= \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - t\big(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\big) + t^2\langle y, y\rangle = \\ &= t^2\langle y, y\rangle - 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle. \end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj. $4(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. Dostáváme tak

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

pro každou dvojici $x, y \in X$.

Mějme nyní opět dány vektory $x, y \in X$ a vezměme $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Pak z právě dokázané nerovnosti použité pro αx a y máme

$$\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \geq |\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

(ii) Vlastnosti normy plynou z vlastností skalárního součinu a tvrzení (i), neboť trojúhelníkovou nerovnost odvodíme pomocí výpočtu

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

□

Na prostoru skalárním součinem je dle předchozího tvrzení přirozeně indukována norma. Pokud nebude řečeno jinak, budeme tedy vždy chápat prostor se skalárním součinem zároveň jako normovaný lineární prostor s touto kanonickou normou.

DEFINICE 84. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá Hilbertův[13] prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

PŘÍKLAD 85. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

◇

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kde uvažujeme restrikci skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $Y \times Y$, je zjevně též prostor se skalárním součinem. Je-li navíc X Hilbertův a Y je uzavřený, pak dle Tvrzení 5 je Y též Hilbertův prostor.

TVRZENÍ 86. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*
(a) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.
(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

DŮKAZ. (a) Protože skalární součin je lineární v první souřadnici a $|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ pro každé $x \in X$ (Cauchyova-Schwarzova nerovnost, Tvrzení 83), je $f_y \in X^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|$. Je-li navíc $y \neq 0$, pak $\frac{y}{\|y\|} \in S_X$ a $f_y\big(\frac{y}{\|y\|}\big) = \big\langle \frac{y}{\|y\|}, y\big\rangle = \|y\|$, a tedy $\|f_y\| = \|y\|$.

[12]Verzi v eukleidovských prostorech používali Joseph-Louis Lagrange (roz. Giuseppe Luigi Lagrangia) a Augustin-Louis Cauchy, integrální verzi dokázal Cauchyův žák Viktor Jakovlevič Buňakovskij (Виктор Яковлевич Буняковский) (1859) a též Karl Hermann Amandus Schwarz (1885), obecnou verzi dokázal John von Neumann (János Lajos Neumann) (1930).

[13]David Hilbert

(b) Připomeňme, že na $X \times X$ uvažujeme součinovou metriku $\rho((x,y),(u,v)) = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\}$. Zvolme $R > 0$ a $(x,y),(u,v) \in X \times X$ splňující $\rho((x,y),0) \le R$, $\rho((u,v),0) \le R$. Pak díky Tvrzení 83 máme

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| &\le |\langle x,y\rangle - \langle x,v\rangle| + |\langle x,v\rangle - \langle u,v\rangle| = |\langle x,y-v\rangle| + |\langle x-u,v\rangle| \le \\ &\le \|x\|\|y-v\| + \|v\|\|x-u\| \le R\big(\|x-u\| + \|y-v\|\big) \le 2R\rho\big((x,y),(u,v)\big). \end{aligned}$$

□

Při počítání s normou v prostorech se skalárním součinem budeme často používat výpočet z (2), zformulujme jej proto explicitně:

FAKT 87. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y \in X$. Pak*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.$$

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem tohoto faktu.

TVRZENÍ 88 (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y \in X$ platí*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Je-li norma indukovaná skalárním součinem, pak tento skalární součin lze vyjádřit pouze pomocí normy:

TVRZENÍ 89 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y \in X$ platí*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

DŮKAZ. Vzorec pro reálný prostor plyne ihned z Faktu 87. V komplexním případě máme

$$\begin{aligned} &\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = \\ &\quad = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + i\big(\|x\|^2 + \|iy\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle\big) - i\big(\|x\|^2 + \|-iy\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,-iy\rangle\big) = \\ &\quad = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 4i\,\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 4i\,\mathrm{Re}\big(-i\langle x,y\rangle\big) = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 4i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 4\langle x,y\rangle, \end{aligned}$$

neboť pro $a,b \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{Re}\big(-i(a+ib)\big) = \mathrm{Re}(b-ia) = b = \mathrm{Im}(a+ib)$.

□

DŮSLEDEK 90. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x),T(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ pro každé $x,y \in X$.*

DŮKAZ. Díky polarizačnímu vzorci je $\langle T(x),T(y)\rangle_Y = \frac{1}{4}\big(\|T(x)+T(y)\|_Y^2 - \|T(x)-T(y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|T(x+y)\|_Y^2 - \|T(x-y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|_X^2 - \|x-y\|_X^2\big) = \langle x,y\rangle_X$, pokud jsou prostory reálné. V komplexním případě je výpočet analogický.

□

VĚTA 91. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

DŮKAZ. Pro $(x, y),\ (u, v) \in X \times Y$ definujme $\langle (x, y), (u, v)\rangle = \langle x, u\rangle_X + \langle y, v\rangle_Y$. (Poznamenejme, že chceme-li, aby náš skalární součin indukoval normu $\|\cdot\|_2$, pak je již tento vzorec určen jednoznačně díky Tvrzení 89.) Tento vzorec definuje skalární součin na $X \times Y$: Pro $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (u, v) \in X \times Y$ máme

$$\begin{aligned}\big\langle (x_1, y_1) + (x_2, y_2), (u, v)\big\rangle &= \big\langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (u, v)\big\rangle = \langle x_1 + x_2, u\rangle_X + \langle y_1 + y_2, v\rangle_Y = \\ &= \langle x_1, u\rangle_X + \langle x_2, u\rangle_X + \langle y_1, v\rangle_Y + \langle y_2, v\rangle_Y = \\ &= \langle (x_1, y_1), (u, v)\rangle + \langle (x_2, y_2), (u, v)\rangle.\end{aligned}$$

Dále pro $(x, y),\ (u, v) \in X \times Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ máme

$$\langle \alpha(x, y), (u, v)\rangle = \langle (\alpha x, \alpha y), (u, v)\rangle = \langle \alpha x, u\rangle_X + \langle \alpha y, v\rangle_Y = \alpha\langle x, u\rangle_X + \alpha\langle y, v\rangle_Y = \alpha\langle (u, v), (x, y)\rangle,$$

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle = \langle x, u\rangle_X + \langle y, v\rangle_Y = \overline{\langle u, x\rangle_X} + \overline{\langle v, y\rangle_Y} = \overline{\langle u, x\rangle_X + \langle v, y\rangle_Y} = \overline{\langle (u, v), (x, y)\rangle}.$$

Konečně, $\langle (x, y), (x, y)\rangle = \langle x, x\rangle_X + \langle y, y\rangle_Y = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 = \|(x, y)\|_2^2$, což dokazuje i poslední dvě vlastnosti skalárního součinu a též to, že výše uvedený skalární součin na $X \times Y$ indukuje normu $X \oplus_2 Y$.

□

DEFINICE 92. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

FAKT 93 (Pythagorova[14] věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

DŮKAZ. První vzorec ihned plyne z Faktu 87. Druhý vzorec plyne z prvního snadno indukcí, uvědomíme-li si, že $x_{i+1} \perp (x_1 + \ldots + x_i)$ pro $i = 1, \dots, n - 1$.

□

TVRZENÍ 94. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*
(a) Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.
(b) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.
(c) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.
(d) Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor X.
(e) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in Y \cap Y^\perp$, pak $\langle x, x\rangle = 0$, tedy $x = 0$.

(b) První rovnost je zřejmá, druhá plyne z (a), neboť $X^\perp = X \cap X^\perp$.

(c) Zjevně $A^\perp \supset (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$. Na druhou stranu nechť $y \in A^\perp$. Pak $f_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojitý lineární funkcionál na X (Tvrzení 86(a)) a $A \subset \operatorname{Ker} f_y$. Tedy $\overline{\operatorname{span}} A \subset \operatorname{Ker} f_y$, což znamená, že $\langle x, y\rangle = 0$ pro každé $x \in \overline{\operatorname{span}} A$.

(d) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X. Tedy $A^\perp = \bigcap_{y \in A}\{y\}^\perp = \bigcap_{y \in A} \operatorname{Ker} f_y$ je uzavřený podprostor X.

(e) Dle předpokladu je $Z \subset Y^\perp$. Na druhou stranu, je-li $x \in Y^\perp$, pak $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z \subset Y^\perp$. Tedy $y = x - z \in Y^\perp$, což znamená, že $y \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $x = z \in Z$. Tudíž $Y^\perp = Z$. Záměnou rolí Y a Z obdržíme rovnost $Z^\perp = Y$. Konečně, poslední tvrzení plyne z (a).

□

[14] Pythagoras ze Samu (Πυθαγόρας ο Σάμιος)

LEMMA 95. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

DŮKAZ. Máme $\langle x - z, y\rangle = 0$ pro každé $y \in X$, takže speciálně $\|x - z\|^2 = \langle x - z, x - z\rangle = 0$.

□

VĚTA 96 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je neprázdná uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in C$, stačí volit $y = x$. Není-li x v C, užijeme rovnost $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(0, C - x)$ k pozorování, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x = 0 \notin C$. Označme $d = \operatorname{dist}(0, C)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v C splňující $\|y_n\| \to d$. Tato posloupnost je cauchyovská: Nechť $0 < \varepsilon \leq 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|y_n\| < d + \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Pro libovolná $n, k \geq n_0$ pak z rovnoběžníkového pravidla plyne, že

$$\begin{aligned}\|y_n - y_k\|^2 &= 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - \|y_n + y_k\|^2 = 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4\left\|\frac{y_n + y_k}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4d^2 < 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8d\varepsilon \leq (4 + 8d)\varepsilon.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili fakt, že C je konvexní, a tedy $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in C$.) Posloupnost $\{y_n\}$ tudíž konverguje k nějakému prvku $y \in H$, který však leží v C díky uzavřenosti C. Pak $\|y\| = \lim\|y_n\| = d$.

Předpokládejme nyní, že $y_1, y_2 \in C$ splňují $\|y_1\| = \|y_2\| = d$. Z rovnoběžníkového pravidla a faktu $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ dostáváme

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\big(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\big) - \|y_1 + y_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen.

□

PŘÍKLAD 97. Není-li H Hilbertův pak, Věta 96 nemusí platit: Nechť C je jednotková koule v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ a $x = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pak pro každé $t \in [-1, 1]$ je $\|x - (1, t)\|_\infty = 1 = \operatorname{dist}(x, C)$, tedy nejbližší prvek není určen jednoznačně. Dokonce nejbližší prvek nemusí ani existovat, vizte Příklad 67.

◇

LEMMA 98 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každé $z \in Y$ platí $y - z \in Y$, a tedy $x - y \perp y - z$. Z Pythagorovy věty (Fakt 93) tak máme $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$. Odtud $\|x - y\| = \min\{\|x - z\|;\ z \in Y\} = \operatorname{dist}(x, Y)$.

$\Rightarrow$ Nechť $z \in Y$ je libovolné. Chceme dokázat, že $\langle x - y, z\rangle = 0$. Zřejmě lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|z\| = 1$. Položme $\alpha = \langle x - y, z\rangle$. Pak $y + \alpha z \in Y$, a tedy

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &\leq \|x - (y + \alpha z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|\alpha z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - y, \alpha z\rangle = \\ &= \|x - y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\overline{\alpha}\langle x - y, z\rangle\big) = \|x - y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\alpha) = \|x - y\|^2 - |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|\alpha|^2 \leq 0$, a tedy $\alpha = 0$.

□

DEFINICE 99. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

TVRZENÍ 100. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.*

DŮKAZ. Položme $Y = \operatorname{span} \operatorname{Rng} P$. Je-li $z \in \operatorname{Rng} P$, pak $z - P(z) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, a tedy $P(z) = z$. Dle Faktu 75(b) to znamená, že P je projekce. Dále nechť $x, y \in X$. Pak $x - P(x) \in Y^\perp$ a $y - P(y) \in Y^\perp$. Tedy $x + y - P(x) - P(y) \in Y^\perp$. Protože podle předpokladu je i $x + y - P(x + y) \in Y^\perp$, dostáváme, že $P(x+y)-P(x)-P(y)=x+y-P(x)-P(y)-\big(x+y-P(x+y)\big)\in Y^\perp$. Tedy $P(x+y)-P(x)-P(y)\in Y\cap Y^\perp=\{0\}$, neboli $P(x+y)=P(x)+P(y)$. Analogicky pro $\alpha\in\mathbb{K}$ je $\alpha(x-P(x))\in Y^\perp$ a $\alpha x-P(\alpha x)\in Y^\perp$, a tedy $P(\alpha x)-\alpha P(x)\in Y\cap Y^\perp=\{0\}$.

□

VĚTA 101. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X\to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) P *je ortogonální.*
(ii) $\operatorname{Ker} P\perp\operatorname{Rng} P$.
(iii) $\operatorname{Ker} P=(\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P=(\operatorname{Ker} P)^\perp$.
(iv) $\|x-P(x)\|=\operatorname{dist}(x,\operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x\in X$.
(v) $x-P(x)\perp P(x)$ *pro každé* $x\in X$.
(vi) $\|P(x)\|^2=\langle P(x),x\rangle$ *pro každé* $x\in X$.
(vii) P *je spojitá a* $\|P\|\le 1$ *(tj.* $P=0$*, nebo* $\|P\|=1$*).*

DŮKAZ. (i)⇒(ii) plyne z toho, že pro $x\in\operatorname{Ker} P$ je $x=x-P(x)$, (ii)⇒(i) plyne z toho, že $x-P(x)\in\operatorname{Ker} P$.

(ii)⇒(iii) plyne z Tvrzení 76 a 94(e), (iii)⇒(ii) je triviální.

(i)⇔(iv) plyne z Lemmatu 98.

(i)⇒(v) je triviální.

(v)⇒(vi) $\|P(x)\|^2=\langle P(x),P(x)\rangle=\langle P(x),x\rangle-\langle P(x),x-P(x)\rangle=\langle P(x),x\rangle$.

(vi)⇒(vii) Pro libovolné $x\in X$ je $\|P(x)\|^2=\langle P(x),x\rangle=|\langle P(x),x\rangle|\le\|P(x)\|\|x\|$. Odtud plyne, že $\|P(x)\|\le\|x\|$.

(vii)⇒(ii) Zvolme libovolně $x\in\operatorname{Rng} P$ a $z\in\operatorname{Ker} P$ a položme $Y=\operatorname{span}\{z\}$. Pro každé $\alpha\in\mathbb{K}$ je $\|x\|=\|P(x)\|=\|P(x-\alpha z)\|\le\|x-\alpha z\|$, což znamená, že $\|x\|=\operatorname{dist}(x,Y)$. Podle Lemmatu 98 je tedy $x\perp z$.

□

VĚTA 102 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H=Y\oplus_t Y^\perp$ a H je izometrický prostoru $Y\oplus_2 Y^\perp$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x\mapsto\big(P_Y(x),P_{Y^\perp}(x)\big)$.*

Druhou část tvrzení srovnejte s Větou 81.

DŮKAZ. Již víme, že $Y\cap Y^\perp=\{0\}$. Dále, pro každé $x\in H$ existuje dle Věty 96 prvek $y\in Y$ splňující $\|x-y\|=\operatorname{dist}(x,Y)$, což dle Lemmatu 98 znamená, že $x-y\in Y^\perp$. Protože $x=y+(x-y)$, plyne odtud, že $H=Y+Y^\perp$. Tudíž $H=Y\oplus Y^\perp$. Konečně, dle Tvrzení 76 projekce $P_Y\colon H\to Y$ příslušná tomuto rozkladu splňuje $\operatorname{Ker} P_Y\perp\operatorname{Rng} P_Y$, tedy je spojitá dle Věty 101. Díky Pythagorově větě pak obdržíme, že

$$\|T(x)\|^2_{Y\oplus_2 Y^\perp}=\|P_Y(x)\|^2+\|P_{Y^\perp}(x)\|^2=\|P_Y(x)+P_{Y^\perp}(x)\|^2=\|x\|^2$$

pro libovolné $x\in H$. A protože pro $u\in Y$ a $v\in Y^\perp$ je $T(u+v)=(u,v)$, je T na.

□

Poznamenejme, že není-li H úplný, pak předchozí věta nemusí platit (vizte Příklad 119).

DŮSLEDEK 103. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A\subset H$. Pak $(A^\perp)^\perp=\overline{\operatorname{span}}\,A$.*

DŮKAZ. Položme $Y=\overline{\operatorname{span}}\,A$. Dle Tvrzení 94(c) je $(A^\perp)^\perp=(Y^\perp)^\perp$. Dle Věty 102 existuje ortogonální projekce $P\colon H\to Y$ s $\operatorname{Rng} P=Y$. Věta 101 pak dává, že $(Y^\perp)^\perp=(\operatorname{Ker} P)^\perp=Y$.

□

DŮSLEDEK 104. *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak H/Y je izometricky izomorfní s $Y^\perp$ pomocí kanonického kvocientového zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $q\colon H\to H/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Z Vět 102 a 77 plyne, že $q\restriction_{Y^\perp}$ zobrazuje $Y^\perp$ na H/Y. Dále pro $y\in Y^\perp$ díky Faktu 93 platí, že

$$\|q(y)\|^2_{H/Y}=(\inf\{\|y+z\|;\ z\in Y\})^2=\inf\{\|y+z\|^2;\ z\in Y\}=\inf\{\|y\|^2+\|z\|^2;\ z\in Y\}=\|y\|^2,$$

a tedy $q\restriction_{Y^\perp}$ je izometrie.

□

VĚTA 105. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 37(a).

$\Leftarrow$ Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Mějme tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\| < \varepsilon$ pro libovolná $l \geq k \geq n_0$. Položme $F = \{1, \ldots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná, neprázdná a disjunktní s F. Položme dále $k = \min F'$, $l = \max F'$. Pak $l \geq k > n_0$, a tedy s pomocí Pythagorovy věty (Fakt 93) máme

$$\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\|^2 = \sum_{n\in F'} \|x_n\|^2 \leq \sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 = \left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

□

DEFINICE 106. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Ortonormální množině se též někdy říká ortonormální soustava či ortonormální systém. Všimněme si, že A je ortonormální, právě když pro všechna $x, y \in A$ platí

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \neq y, \\ 1 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dále si uvědomme, že ortonormální A je maximální, právě když $A^\perp = \{0\}$.

POZNÁMKA (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 105 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

FAKT 107. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

DŮKAZ. Podle Pythagorovy věty máme $\|x - y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = 2$.

□

VĚTA 108. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Vezměme množinu

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ je ortonormální množina}\}$$

uspořádanou inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje prázdnou množinu). Navíc má každý řetězec horní závoru, totiž sjednocení všech prvků daného řetězce: Nechť $\mathcal{B}$ je řetězec v $\mathcal{A}$ a $B = \bigcup_{A\in\mathcal{B}} A$. Pak zjevně $B \subset S_X$. Jsou-li $x, y \in B$, $x \neq y$, pak $x \in A_1 \in \mathcal{B}$ a $y \in A_2 \in \mathcal{B}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_1 \subset A_2$. Pak ovšem $x, y \in A_2$, což je ortonormální množina, a tedy $x \perp y$. To dokazuje, že B je ortonormální, takže patří do $\mathcal{A}$. Podle Zornova lemmatu[15] tedy v $\mathcal{A}$ existuje maximální prvek.

□

[15]Zornovo lemma dokázal Kazimierz Kuratowski (1922) a nezávisle Max August Zorn (1935).

POZNÁMKA 109. Je-li prostor se skalárním součinem separabilní, pak neobsahuje nespočetnou ortonormální množinu, jelikož separabilní metrický prostor neobsahuje nespočetnou diskrétní množinu (vizte Fakt 107). Tedy každý maximální ortonormální systém je v něm (nejvýše) spočetný.

LEMMA 110. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

DŮKAZ. Nechť $\alpha \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F. Pak pro $F' = F \cup \{\alpha\}$ platí

$$\varepsilon \geq \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| \cdot \|e_\alpha\| \geq \left| \left\langle x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma, e_\alpha \right\rangle \right| = \left| \langle x, e_\alpha\rangle - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \langle e_\gamma, e_\alpha\rangle \right| = |\langle x, e_\alpha\rangle - x_\alpha|.$$

Tedy $x_\alpha = \langle x, e_\alpha\rangle$.

□

Jako důsledek dostáváme, že je-li $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ ortonormální báze v X a $x \in X$, pak koeficienty x_γ ve vyjádření $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ jsou určeny jednoznačně (a platí $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$).

Snadným důsledkem Pythagorovy věty (Fakt 93) je následující fakt:

FAKT 111. *Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\| \sum_{i\in F} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i\in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Okamžitým důsledkem předchozího faktu je následující pozorování:

DŮSLEDEK 112. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

LEMMA 113. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i \in Y^\perp$.*

DŮKAZ. Označme $x_Y = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i$. Pro každé $j \in F$ máme $\langle x_Y, e_j\rangle = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$, tj. $\langle x - x_Y, e_j\rangle = 0$. Odtud snadno plyne, že $x - x_Y \perp Y$.

□

VĚTA 114 (Besselova nerovnost[16]). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, pak pro každé $x \in X$ platí, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

DŮKAZ. Mějme dánu libovolnou konečnou množinu $F \subset \Gamma$. Položme $x_F = \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$. Podle Lemmatu 113 je $x - x_F \perp \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$ a speciálně $x - x_F \perp x_F$. Z Pythagorovy věty a Faktu 111 tedy dostaneme $\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$. Podle Tvrzení 34 tak obdržíme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 = \sup\left\{ \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} \leq \|x\|^2.$$

□

VĚTA 115. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$ *(tzv. Parsevalova rovnost[17]).*
(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$.
(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*
(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.
(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

[16]Pro trigonometrické funkce používal podobnou nerovnost Friedrich Wilhelm Bessel (1828).
[17]Marc-Antoine Parseval des Chênes (1799)

Poznamenejme, že řadě v (ii) se říká abstraktní Fourierova[18] řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ se nazývají abstraktní Fourierovy koeficienty. Proč, bude osvětleno v Příkladu 118.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x \in X$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \supset F$. Pak pro takovouto F' dostáváme s pomocí Faktů 87 a 111, že

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{\gamma\in F'} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{\gamma\in F'} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{\gamma\in F'} \overline{\langle x, e_\gamma\rangle}\langle x, e_\gamma\rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$.

(ii)⇒(iii) je zřejmá a (iii)⇒(iv) plyne snadno z definic.

(iv)⇒(i) Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ a skaláry x_γ, $\gamma \in F$ tak, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Položme $Y = \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$. Pak $\operatorname{dist}(x, Y) \le \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Z Lemmatu 113 plyne, že $x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma \in Y^\perp$, a tedy podle Lemmatu 98 platí $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\| = \operatorname{dist}(x, Y) < \varepsilon$. Z toho pomocí stejného výpočtu jako v důkazu (i)⇒(ii) dostáváme

$$\varepsilon^2 > \left\|x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2,$$

a tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \|x\|^2 - \varepsilon^2$. Protože tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \|x\|^2$. Opačná nerovnost je přímo Besselova nerovnost (Věta 114).

(ii)⇒(v) Nechť $\{e_\gamma\}$ není maximální, tj. existuje nenulový vektor x splňující $\langle x, e_\gamma\rangle = 0$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Ale $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma = 0$, což je spor.

Konečně, je-li X Hilbertův, ukážeme, že (v)⇒(iv). Není-li splněna (iv), pak je $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ vlastní uzavřený podprostor X. Podle Věty 102 je $Y^\perp$ netriviální, což je spor s maximalitou $\{e_\gamma\}$.

□

Z Vět 108 a 115 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 116. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

DŮSLEDEK 117. *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H, pak zobrazení $P: H \to H$, $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ je ortogonální lineární projekce na $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Dále je $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. Označme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ a nechť $P: H \to Y$ je ortogonální lineární projekce na Y z Věty 102. Nechť $x \in H$. Pak $x = P(x) + z$, kde $z \in Y^\perp$. Odtud plyne, že $\langle x, e_\gamma\rangle = \langle P(x), e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Použijeme-li Větu 115 na prostor Y, pak obdržíme, že $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle P(x), e_\gamma\rangle e_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ a $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle P(x), e_\gamma\rangle|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$.

□

PŘÍKLAD 118.

- Kanonické bázové vektory $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru ℓ_2 (Příklad 29).
- Obecněji, je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak kanonické bázové vektory $e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$, $\gamma \in \Gamma$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru $\ell_2(\Gamma)$. (Snadno to plyne např. z Věty 115, neboť je z definice splněna Parsevalova rovnost.)
- Pro Hilbertův prostor $L_2([0, 2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický

[18] Jean-Baptiste Joseph Fourier

[19] Lipót Fejér, roz. Leopold Weisz

ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0,2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0,2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0,2\pi])$.

Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 115 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0,2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

◇

PŘÍKLAD 119. Není-li ve Větě 115 prostor X úplný, pak tvrzení (v) nemusí být ekvivalentní ostatním tvrzením. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Dále položme $e = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \in \ell_2$, $A = \{e_n;\ n \geq 2\}$ a $X = \operatorname{span}(\{e\} \cup A)$. Pak A je maximální ortonormální množina v X: Je-li $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ splňující $x \perp A$, pak $0 = \langle x, e_n\rangle = x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je-li tedy $x = \alpha e + \sum_{i=2}^k \alpha_i e_i$, pak $0 = x_{k+1} = \alpha\frac{1}{k+1}$, tj. $\alpha = 0$. Proto i $\alpha_i = x_i = 0$ pro $i = 2,\dots,k$, neboli $x = 0$. Nicméně není pravda, že $X = \overline{\operatorname{span}}\, A$, neboť pro každý $x \in \operatorname{span} A$ je $x_1 = 0$, tedy i pro každý $x \in \overline{\operatorname{span}}\, A$ je $x_1 = 0$, což znamená, že $e \notin \overline{\operatorname{span}}\, A$.

Všimněme si též, že pro $Y = \overline{\operatorname{span}}\, A$ je $Y^\perp = \{0\}$, neboť A je maximální ortonormální, a tedy neplatí, že $X = Y \oplus Y^\perp$ (srovnejte s Větou 102).

◇

VĚTA 120 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ lineární izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

DŮKAZ. Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti (Věta 115) plyne, že $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in H$, a tedy T je izometrie do $\ell_2(\Gamma)$. Všimněme si, že $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ je množina kanonických bázových vektorů v $\ell_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\operatorname{Rng} T$ obsahuje všechny vektory v $\ell_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $\ell_2(\Gamma)$ (Příklad 43). Podle Tvrzení 62(c) je ovšem $\operatorname{Rng} T$ uzavřený, tudíž je roven celému $\ell_2(\Gamma)$.

□

TVRZENÍ 121. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$, *pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

DŮKAZ. Nechť A je nějaká ortonormální báze X. Je-li $\dim X = n$, pak z Důsledku 112 a z definice ortonormální báze plyne, že A je (algebraickou) bází vektorového prostoru X. Tedy A má n prvků.

Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak A je spočetná podle Poznámky 109. Kdyby A byla konečná, pak dle definice ortonormální báze $\operatorname{span} A = X$, což je spor s $\dim X = \infty$.

□

Později uvidíme, že pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

VĚTA 122 (Heinrich Löwig[20] (1934), F. Riesz (1934)[21]). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

K důkazu se nám bude hodit následující pozorování:

LEMMA 123. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus$* $\operatorname{Ker} f$. *Pak* $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. *Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

[20] roz. Jindřich František Josef Löwi

[21] Reprezentaci dokázal pro ℓ_2 D. Hilbert (1906), pro $L_2([0,1])$ Maurice Fréchet (1907) a F. Riesz (1907). Proto se tato věta někdy nazývá Fréchetova-Rieszova.

DŮKAZ. Zjevně $\operatorname{span}\{x\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ a každý vektor $y \in X$ lze rozepsat jako

$$y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x,$$

kde $y - \frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f$ a $\frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{span}\{x\}$.

□

DŮKAZ VĚTY 122. Nechť H je nad $\mathbb{K}$ a $y \in H$. Dle Tvrzení 86(a) je $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| = \|y\|$. Protože skalární součin je sdruženě lineární ve druhé souřadnici, je i zobrazení I sdruženě lineární. Rovnost $\|I(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$ tedy říká, že I je izometrie do, neboť $I(u) - I(v) = I(u - v)$. Ukažme, že je na. Je-li $f \in H^*$ nenulové dáno, pak $\operatorname{Ker} f$ je vlastní uzavřený podprostor H. Tedy dle Věty 102 platí, že $H = \operatorname{Ker} f \oplus Z$, kde $Z \perp \operatorname{Ker} f$. Ovšem $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ (Lemma 123), tedy $\dim Z = 1$. To znamená, že $Z = \operatorname{span}\{z\}$ pro nějaké $z \in S_H$. Položme $y = \overline{f(z)}z$. Pak pro každé $x \in H$ máme $x = u + \alpha z$, kde $u \in \operatorname{Ker} f$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, takže

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle = \big\langle u + \alpha z, \overline{f(z)}z\big\rangle = f(z)\big(\langle u, z\rangle + \alpha\langle z, z\rangle\big) = \alpha f(z)\|z\|^2 = f(u + \alpha z) = f(x).$$

Tedy $I(y) = f_y = f$.

□

Kapitola 2

Hahnova-Banachova věta a dualita

Jedním z důležitých objektů, se kterými se pracuje v lineární algebře, jsou lineární formy. Ve funkcionální analýze se budeme zabývat především lineárními formami spojitými. A priori však není zřejmé, že jsou na daném prostoru vůbec nějaké netriviální spojité lineární formy k dispozici. Úhelným kamenem funkcionální analýzy je tak věta o jejich existenci, totiž Hahnova-Banachova věta. Ta má celou řadu důležitých a dalekosáhlých důsledků a lze tak ji a její varianty právem pokládat za nejzásadnější nástroj funkcionální analýzy.

1. Hahnova-Banachova věta

Nejprve se podíváme blíže na to, jak vypadají komplexní lineární funkcionály. Připomeňme si, že pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(t\alpha) = t\operatorname{Re}\alpha$ a podobně $\operatorname{Im}(\alpha + \beta) = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Im}(t\alpha) = t\operatorname{Im}\alpha$. Pro funkci $f: A \to \mathbb{C}$ označíme $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ její reálnou, resp. imaginární složku, tj. $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ pro $x \in A$ a podobně pro $\operatorname{Im} f$.

TVRZENÍ 1. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f: X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Fakt, že $\operatorname{Re} f$ je reálně-lineární je snadno vidět. Pro libovolné $x \in X$ máme $\operatorname{Re} f(ix) + i\operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x)$, a tedy $\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že $\operatorname{Im} f$ je také reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$, odkud ihned plyne aditivita f. Dále, pro libovolné $x \in X$ je

$$f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) + i\operatorname{Im} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x) - i\operatorname{Re} f(i^2x) = i\big(\operatorname{Re} f(x) + i\operatorname{Im} f(x)\big) = if(x).$$

Konečně, pro $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, a $x \in X$ pak máme $f(\alpha x) = f(ax + ibx) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = \alpha f(x)$.

□

DEFINICE 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p: X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p: X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zřejmě každá pseudonorma je sublineárním funkcionálem a pro každý sublineární funkcionál je $p(0) = 0$. Všimněme si, že pseudonorma se od normy liší pouze v jedné vlastnosti, a to, že mohou existovat nenulové vektory, na nichž je pseudonorma nulová.

VĚTA 3 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) *1. krok.* Nejprve ukážeme, že f lze rozšířit na podprostor $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$, kde $x \in X \setminus Y$. Uvědomme si, že vzorec $F(y + tx) = f(y) + t\alpha$ dobře definuje lineární rozšíření formy f na Z a že každé lineární rozšíření je tohoto tvaru a je jednoznačně určeno hodnotou $\alpha = F(x) \in \mathbb{R}$. Naším cílem je tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f(y) + t\alpha \leq p(y + tx)$ pro každé $y \in Y$ a $t \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentní tomu, že α musí splňovat $\alpha \leq \frac{1}{t}\bigl(p(y + tx) - f(y)\bigr) = p(\frac{y}{t} + x) - f(\frac{y}{t})$ pro každé $y \in Y$ a $t > 0$ a zároveň $\alpha \geq \frac{1}{t}\bigl(p(y+tx) - f(y)\bigr) = f(-\frac{y}{t}) - p(-\frac{y}{t} - x)$ pro každé $y \in Y$ a $t < 0$. Snadno je vidět, že to nastane, právě když

$$\sup_{z\in Y}\bigl(f(z) - p(z - x)\bigr) \leq \alpha \leq \inf_{y\in Y}\bigl(p(y + x) - f(y)\bigr).$$

Existence požadovaného $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy bude zřejmá, jakmile ukážeme, že supremum na levé straně je nejvýše rovno infimu na straně pravé. K tomuto účelu zvolme pevně libovolné $z \in Y$. Pak pro každé $y \in Y$ platí $f(z) + f(y) = f(z + y) \leq p(z + y) = p(z - x + y + x) \leq p(z - x) + p(y + x)$ (zde jsme opět podstatně využili linearitu f), neboli $f(z) - p(z - x) \leq p(y + x) - f(y)$. Máme tedy $f(z) - p(z - x) \leq \inf_{y\in Y}\bigl(p(y + x) - f(y)\bigr)$ pro každé $z \in Y$, odkud již požadovaná nerovnost ihned plyne.

2. krok. Vezměme množinu

$$\mathcal{P} = \bigl\{(Z, g);\ Y \subset Z \subset X \text{ je podprostor } X, g \text{ je lineární forma na } Z \text{ rozšiřující } f \text{ a } g \leq p \text{ na } Z\bigr\}.$$

Definujme na $\mathcal{P}$ uspořádání takto: $(Z, g) \leq (W, h)$, pokud $Z \subset W$ a $g = h$ na Z. Pak $(\mathcal{P}, \leq)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná, neboť $(Y, f) \in \mathcal{P}$. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R} = \{(Y_\gamma, f_\gamma);\ \gamma \in \Gamma\}$ řetězec v $\mathcal{P}$, pak je snadno vidět, že $Z = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ je podprostor X obsahující Y. Funkce g na Z daná předpisem $g(x) = f_\gamma(x)$ pro $x \in Y_\gamma$ je zřejmě dobře definována, je lineární a splňuje $g \leq p$ na Z. Navíc (Z, g) majorizuje všechny prvky $\mathcal{R}$. Tedy (Z, g) je horní závora $\mathcal{R}$.

Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $(W, F) \in \mathcal{P}$. Pak nutně $W = X$, jinak bychom mohli F rozšířit na větší podprostor pomocí prvního kroku, což by byl spor s maximalitou (W, F). Tedy F je hledané rozšíření.

(b) Je-li X reálný, nalezneme rozšíření pomocí tvrzení (a). Pak ovšem $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, a tedy $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Je-li X komplexní, pak podle Tvrzení 1 je $f(x) = g(x) - ig(ix)$, kde $g = \operatorname{Re} f\colon Y_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálně-lineární forma. Protože $|g(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, můžeme použít předchozí případ na formu g a rozšířit ji na reálně-lineární formu $G\colon X_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $|G(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$. Položíme-li $F(x) = G(x) - iG(ix)$, pak F je lineární forma na X (Tvrzení 1), která zjevně rozšiřuje f. Dále, nechť $x \in X$. Najdeme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|F(x)| = \alpha F(x)$. Pak $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = G(\alpha x) - iG(i\alpha x)$, což je reálné číslo, a proto $G(i\alpha x) = 0$. Tedy $|F(x)| = G(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 4 (Hahnova-Banachova). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

DŮKAZ. Položme $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro $x \in X$. Pak p je pseudonorma na X splňující $|f| \leq p$ na Y. Dle Věty 3(b) existuje lineární forma F na X rozšiřující f taková, že $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy F je spojitý lineární funkcionál na X a $\|F\| \leq \|f\|$. Protože F rozšiřuje f, platí $\|F\| = \sup_{x\in B_X} |F(x)| \geq \sup_{x\in B_Y} |F(x)| = \sup_{x\in B_Y} |f(x)| = \|f\|$, tedy $\|F\| = \|f\|$.

□

Hahnova-Banachova věta je jedním z nejzásadnějších tvrzení funkcionální analýzy. Dále uvedeme několik z jejích mnoha přímých důsledků. Velkou důležitost mají zejména různé oddělovací věty.

DŮSLEDEK 5. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

DŮKAZ. Dokažme první část. Nechť nejprve $x \neq 0$. Uvažujme podprostor $Y = \operatorname{span}\{x\}$ a funkcionál na Y daný vzorcem $g(tx) = t\|x\|$ pro $t \in \mathbb{K}$. Pak zjevně $g \in Y^*$ a $\|g\| = 1$ (Lemma 1.46(b)). Dle Věty 4 existuje funkcionál $f \in X^*$ o normě 1, který rozšiřuje g. Tedy $f(x) = g(x) = \|x\|$.

Je-li $x = 0$, pak vezměme libovolné $y \in X$, $y \neq 0$. Podle předchozího existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(y) = \|y\|$. Samozřejmě, $f(x) = f(0) = 0 = \|x\|$.

Pro důkaz druhé části použijeme první část na vektor $x - y$.

□

DŮSLEDEK 6 (Duální vyjádření normy). *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

DŮKAZ. Pro $f \in B_{X^*}$ máme $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$. Na duhou stranu, dle Důsledku 5 existuje $f \in B_{X^*}$ takový, že $f(x) = \|x\|$, a tedy $|f(x)| = f(x) = \|x\|$.

□

VĚTA 7 (Oddělování bodu a podprostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$ a $d = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$ a definujme $g\colon Z \to \mathbb{K}$ předpisem $g(y + \alpha x) = \alpha d$ pro $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak g je lineární forma na Z a pro každé $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ máme

$$|g(y + \alpha x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| x - \left(-\frac{y}{\alpha} \right) \right\| = \|y + \alpha x\|$$

a $|g(y)| = 0 \leq \|y\|$. Tedy $g \in Z^*$ a $\|g\| \leq 1$. Vezměme nyní posloupnost $\{y_n\}$ v Y splňující $\|x - y_n\| \to d$. Pak $g\big(\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|}\big) = \frac{d}{\|x - y_n\|} \to 1$, a tedy $\|g\| = 1$. Podle Věty 4 existuje $f \in X^*$ rozšiřující g a splňující $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f = 0$ na Y a $f(x) = g(x) = d$.

□

VĚTA 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je konečněrozměrný podprostor X a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho báze. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(e_i) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(e_i) = 1$. Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y (Věta 1.68). Lze je tedy podle Hahnovy-Banachovy věty rozšířit na spojité lineární funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X (Věta 4). Pak zobrazení $P\colon X \to Y$ dané předpisem

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$$

je spojitá lineární projekce X na Y: Spojitost a linearita jsou zřejmé. Pro $y \in Y$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ máme $P(y) = P\big(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} y_i P(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y$, tedy P je projekce dle Faktu 1.75(b).

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na X/Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(q(e_i)) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(q(e_i)) = 1$. Všimněme si, že je-li $z = \sum_{i=1}^{n} z_i q(e_i) \in X/Y$, pak $f_j(z) = z_j$ pro $j = 1, \dots, n$. Protože X/Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na X/Y (Věta 1.68). Položme $g_j = f_j \circ q$, $j = 1, \dots, n$. Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité lineární funkcionály na X a zobrazení dané předpisem $P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$ pro $x \in X$ je spojitá lineární projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. (Fakt, že je to projekce, plyne z $P(e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_j(e_i) e_j = e_i$ jako v případě (a).) Naopak, je-li $P(x) = 0$, pak $0 = g_i(P(x)) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) g_i(e_j) = g_i(x)$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy $f_i(q(x)) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$, neboli $q(x) = 0$, tj. $x \in Y$. Dohromady tedy máme $Y = \operatorname{Ker} P$, což dle Tvrzení 1.76 znamená, že $Id_X - P$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

VĚTA 9. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li X^* separabilní, pak i X je separabilní.*

DŮKAZ. Množina S_{X^*} je metrický podprostor metrického prostoru X^*, tedy je separabilní. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá podmnožina S_{X^*}. Z vlastností duální normy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in S_X$ splňující $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$ (Lemma 1.46(b)). Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní, neboť lineární kombinace s racionálními koeficienty jsou husté v Y. Tvrdíme, že $X = Y$. Pokud tomu tak není, pak podle Věty 7 existuje $f \in S_{X^*}$ takový, že $f\restriction_Y = 0$. Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\|f - f_n\| < \frac{1}{4}$. Pak $0 = |f(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(x_n) + f(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - \|f - f_n\|\|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, což je spor.

□

DEFINICE 10. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

POZNÁMKA 11. Pro prostor X se skalárním součinem zde máme kolizi ve značení, neboť symbolem $A^{\perp}$ značíme též ortogonální doplněk, což je podmnožina X (zatímco anihilátor $A^{\perp}$ je podmnožina X^*). Díky identifikaci z Věty 1.122 jsou tato tradiční značení naštěstí v případě Hilbertova prostoru relativně konzistentní a ve skutečnosti jsou anihilátory v jistém smyslu zobecněním ortogonálních doplňků: Je-li H Hilbertův prostor, $A \subset H$ a $I\colon H \to H^*$ identifikace z Věty 1.122, pak

$$\begin{aligned} I^{-1}(A^{\perp}) &= \{y \in H;\ I(y) \in A^{\perp}\} = \{y \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\} = \\ &= \{y \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } x \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I^{-1}(A^{\perp})$ je roven ortogonálnímu doplňku A. Podobně,

$$\begin{aligned} I(A)_{\perp} &= \{x \in H;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in I(A)\} = \{x \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } y \in A\} = \\ &= \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I(A)_{\perp}$ je též roven ortogonálnímu doplňku A.

Uvědomme si, že z definice snadno plynou následující vztahy: $\{0\}^{\perp} = X^*$, $X^{\perp} = \{0\}$ a $\{0\}_{\perp} = X$. Pomocí Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 5) pak odvodíme, že $(X^*)_{\perp} = \{0\}$.

LEMMA 12. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_{\perp}$ je uzavřený podprostor X,
(c) $(A^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}}\, A$,
(d) $(B_{\perp})^{\perp} \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

DŮKAZ. (a) Snadno je vidět, že $A^{\perp}$ je podprostor X^*. Jestliže $\{f_n\}$ je posloupnost v $A^{\perp}$ konvergující k $f \in X^*$ a $x \in A$, pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (Fakt 1.48). Tedy $f \in A^{\perp}$.

(b) Zde si stačí uvědomit, že $B_{\perp} = \bigcap_{f \in B} \operatorname{Ker} f$.

(c) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^{\perp}$ máme $f(x) = 0$, a tedy $x \in (A^{\perp})_{\perp}$. To znamená, že $A \subset (A^{\perp})_{\perp}$. Protože je $B_{\perp}$ uzavřený podprostor X pro každou $B \subset X^*$ dle (b), platí $\overline{\operatorname{span}}\, A \subset (A^{\perp})_{\perp}$. Je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{span}}\, A$, existuje $f \in X^*$ splňující $f(x) > 0$ a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{span}}\, A$ (Věta 7). Tedy $f \in A^{\perp}$ a $f(x) \neq 0$. Proto $x \notin (A^{\perp})_{\perp}$.

(d) Je-li $f \in B$, pak pro každé $x \in B_{\perp}$ máme $f(x) = 0$, a tedy $f \in (B_{\perp})^{\perp}$. To znamená, že $B \subset (B_{\perp})^{\perp}$. Protože je $A^{\perp}$ uzavřený podprostor X^* pro každou $A \subset X$ dle (a), platí $\overline{\operatorname{span}}\, B \subset (B_{\perp})^{\perp}$.

□

V Příkladu 23 ukážeme, že v (d) v lemmatu výše nemusí nastat rovnost. „Správné znění“ lemmatu uvedeme v oddílu 6.9 (Lemma 6.111).

2. Reprezentace duálů

V tomto oddílu si ukážeme, jakým způsobem lze interpretovat duální prostory k některým prostorům. Nejdůležitější jsou zejména konkrétní reprezentace duálů ke klasickým Banachovým prostorům.

TVRZENÍ 13. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Důkaz odložíme až do oddílu 4.1, kde jej provedeme přirozeně pomocí tam zavedených pojmů. Tvrzení je pak přímým důsledkem Věty 4.6.

DEFINICE 14. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Sdruženým exponentem k 1 je ∞, sdruženým exponentem k ∞ je 1 a sdruženým exponentem ke 2 je 2. Všimněme si ještě následujících vztahů: Jsou-li p, q sdružené exponenty, $1 \leq p < \infty$, pak $pq = p + q$, $q = \frac{p}{p-1}$ a $q = (q-1)p$.

POZNÁMKA. Připomeňme, že prostor všech lineárních forem na $\mathbb{K}^n$ je algebraicky izomorfní opět prostoru $\mathbb{K}^n$. Protože všechny lineární formy na $\mathbb{K}^n$ jsou spojité (Věta 1.68), je prostor $(\mathbb{K}^n)^*$ algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{K}^n$ a tento algebraický izomorfismus je dán lineárním zobrazením $I : \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$, $I(y)(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Protože každé lineární zobrazení z konečněrozměrného prostoru je spojité (Věta 1.68), je zobrazení I izomorfismus normovaných lineárních prostorů, a to ať bereme na $\mathbb{K}^n$ jakoukoli normu. Způsobem stejným jako v důkazu Věty 15(a), (b) níže lze ukázat, že I je izometrie prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ na prostor $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)^*$, kde p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$.

VĚTA 15 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům[1]).

(a) *Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I : \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I : \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Všimněme si, že ve skutečnosti je tvrzení (b) speciálním případem tvrzení (c) a (d). Nicméně z pedagogických důvodů je vhodné tvrzení (b) zformulovat i dokazovat zvlášť, neboť je výrazně jednodušší.

Obvykle se funkce sgn rozšiřuje na komplexní čísla vzorcem $\operatorname{sgn} \alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Je tedy $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn} \alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Nám se ovšem v následujícím důkazu bude hodit převrácená hodnota $\operatorname{sgn} \alpha$, což je shodou okolností též komplexně sdružené číslo $\overline{\operatorname{sgn} \alpha}$, proto budeme používat označení cgn.

[1]Pro ℓ_p, $1 < p < \infty$ Edmund Georg Hermann Landau (1907), pro $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$ F. Riesz (1909), pro $L_1([0,1])$ Hugo Dyonizy Steinhaus (1919).

Definujeme tedy $\operatorname{cgn}\alpha = \frac{|\alpha|}{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{cgn} 0 = 0$. Platí $|\alpha| = \alpha \operatorname{cgn}\alpha$ a $|\operatorname{cgn}\alpha| \leq 1$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Všimněme si též, že je-li f měřitelná funkce (vzhledem k nějaké míře), pak funkce $\operatorname{sgn} f$ i $\operatorname{cgn} f$ jsou měřitelné.

DŮKAZ. (a) Nechť $y \in \ell_1$ je dáno. Pro každé $x \in c_0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|_\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in c_0^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. Pro opačnou nerovnost uvažujme vektory

$$x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^n \in B_{c_0}$ a platí

$$f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n}|y_k| \to \|y\|_1.$$

Tedy $\|f_y\| = \|y\|_{\ell_1}$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in c_0^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v c_0. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vektor $x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots)$ je v B_{c_0} pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k| = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \operatorname{cgn} y_k = f\left(\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{cgn} y_k)e_k\right) = f(x^n) \leq \|f\|\|x^n\| \leq \|f\|.$$

Jelikož je $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_1$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in c_0$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(b) Nejprve předpokládejme, že $1 < p < \infty$. Nechť $y \in \ell_q$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ platí z Hölderovy nerovnosti[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_p^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y \neq 0$. Uvažujme vektor

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{-1/p}\big(|y_1|^{q-1} \operatorname{cgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{cgn} y_2, \dots\big).$$

Je

$$\|x\|_p = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $x \in B_{\ell_p}$. Proto

$$\|f_y\| \geq |f_y(x)| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{q-1}(\operatorname{cgn} y_n) y_n\right| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q = \|y\|_q,$$

což znamená, že $\|f_y\| = \|y\|_q$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

[2] Nerovnost dokázali v jiné formě Leonard James Rogers (1888) a Otto Ludwig Hölder (1889), který dokonce cituje Rogerse; v současné formě jak pro sumy, tak pro integrály ji pak zformuloval F. Riesz (1910).

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_p^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_p. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) e_k.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) f(e_k) = |f(x^n)| \leq \|f\| \|x^n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}.$$

Odtud dostáváme $\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_q$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_p$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

Zbývá případ $p = 1$. Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_1^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_\infty$. Pro opačnou nerovnost uvažujme kanonické bázové vektory $e_n, n \in \mathbb{N}$ v ℓ_1. Máme $\|f_y\| \geq |f_y(e_n)| = |y_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\|f_y\| \geq \|y\|_\infty$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_1^*$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $|y_n| \leq \|f\| \|e_n\| = \|f\|$, tedy $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_1$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(c), (d) Nechť $g \in L_q(\mu)$ je dáno. Pro každé $f \in L_p(\mu)$ platí z Hölderovy nerovnosti (pro $p > 1$), případně jednoduchým odhadem (pro $p = 1$)

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Odtud plyne, že φ_g je dobře definovaná funkce. Dále φ_g je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $\varphi_g \in L_p(\mu)^*$ a $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $g \neq 0$. V případě $p > 1$ uvažujme funkci

$$f = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} |g|^{q-1} \operatorname{cgn} g.$$

Je

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p(q-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $f \in B_{L_p(\mu)}$. Proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left| \int_\Omega |g|^{q-1} (\operatorname{cgn} g) g \, \mathrm{d}\mu \right| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_q,$$

což znamená, že $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$. V případě, že $p = 1$ (a μ je tak dle předpokladu σ-konečná) vezměme $\varepsilon > 0$ libovolné a uvažujme množinu $A = \{x \in \Omega;\ |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak A je kladné míry, a tedy díky σ-konečnosti μ existuje $B \subset A$ splňující $0 < \mu(B) < +\infty$. Je $f = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B \operatorname{cgn} g \in B_{L_1(\mu)}$, a proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \frac{1}{\mu(B)}\left|\int_B (\operatorname{cgn} g) g \,\mathrm{d}\mu\right| = \frac{1}{\mu(B)}\int_B |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \big(\|g\|_\infty - \varepsilon\big) \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Odtud plyne $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Předpokládejme nejprve, že $\mu(\Omega) < +\infty$. Nechť je dán $\varphi \in L_p(\mu)^*$. Pro každou $A \in \mathcal{S}$ položme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A).$$

Poznamenejme, že díky předpokladu konečnosti míry je ν dobře definována. Funkce ν je komplexní (případně znaménková) míra na Ω. Vskutku, je-li $\{A_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$ systém po dvou disjunktních měřitelných množin a označíme-li $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, pak $\big\|\chi_A - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big\|_p = \mu\big(A \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\big)^{1/p} \to 0$ (zde opět využíváme faktu, že μ je konečná). Tedy díky spojitosti φ máme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Zřejmě je ν absolutně spojitá vzhledem k μ (tj. $\nu(A) = 0$ pro každou $A \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(A) = 0$), dle Radonovy-Nikodymovy věty[3] tedy existuje $g \in L_1(\mu)$ splňující $\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. To znamená, že $\varphi(\chi_A) = \nu(A) = \int_\Omega \chi_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Z linearity φ a z linearity integrálu tedy ihned plyne, že

$$\varphi(s) = \int_\Omega sg \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω.

Ukážeme, že platí $g \in L_q(\mu)$. Je-li $p > 1$, zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$ a položme $A_n = \{x \in \Omega;\ |g(x)| \leq n\}$ a $f = \chi_{A_n}|g|^{q-1} \operatorname{cgn} g$. Existuje posloupnost $\{s_k\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na Ω takových, že $s_k \to f$ bodově a navíc $|s_k(x)| \leq 4|f(x)|$ pro každé $x \in \Omega$ a $k \in \mathbb{N}$ (použijeme větu [R, Věta 1.17] na rozklad $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$). Protože $|s_k - f|^p \leq 5^p|f|^p$, funkce $|f|$ je omezená a μ je konečná, máme podle Lebesgueovy věty $\|s_k - f\|_p \to 0$. Podobně, $|s_k g| \leq 4|f||g| \leq 4n^q$, tedy dle Lebesgueovy věty $\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Zkombinujeme-li oba tyto fakty se spojitostí φ a platností (1), dostaneme

$$\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \varphi(s_k) = \varphi(f) \leq \|\varphi\|\|f\|_p = \|\varphi\|\left(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Úpravou obdržíme $\int_\Omega \chi_{A_n}|g|^q \,\mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|^q$, a to platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Leviovy věty[4] o monotónní konvergenci tedy dostáváme $\|g\|_q \leq \|\varphi\|$.

V případě $p = 1$ díky (1) máme $\left|\int_A g \,\mathrm{d}\mu\right| = |\varphi(\chi_A)| \leq \|\varphi\|\|\chi_A\|_1 = \|\varphi\|\mu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Podle věty [R, Věta 1.40] tedy platí $|g(x)| \leq \|\varphi\|$ pro s. v. $x \in \Omega$, odkud $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Protože $g \in L_q(\mu)$, je podle první části důkazu φ_g spojitý lineární funkcionál na $L_p(\mu)$. Protože $\varphi(s) = \varphi_g(s)$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω (vizte (1)) a protože množina všech jednoduchých měřitelných funkcí na Ω je hustá v prostoru $L_p(\mu)$ ([R, Věta 3.13]), platí $\varphi = \varphi_g$ (Věta 15.3).

Dále uvažujme případ, kdy Ω má nekonečnou, ale σ-konečnou míru. Nechť $w \in L_1(\mu)$ je funkce splňující $0 < w(x) < 1$ pro všechna $x \in \Omega$ ([R, Lemma 6.9]). Definujme míru μ_1 na $\mathcal{S}$ vztahem $\mu_1(A) = \int_A w \,\mathrm{d}\mu$ pro $A \in \mathcal{S}$. Pak μ_1 je konečná míra. Definujme nyní funkcionál $\psi \in L_p(\mu_1)^*$ předpisem $\psi(h) = \varphi(w^{1/p}h)$ pro $h \in L_p(\mu_1)$. Funkcionál ψ je dobře definovaný, neboť

$$\int_\Omega |w^{1/p}h|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty \tag{2}$$

[3] V $\mathbb{R}^n$ větu dokázal Johann Karl August Radon (1913), obecný případ pak Otton Marcin Nikodym (1930).

[4] Beppo Levi

pro každou $h \in L_p(\mu_1)$, a dále ψ je zjevně lineární a dle (2) máme $|\psi(h)| = |\varphi(w^{1/p}h)| \leq \|\varphi\| \|w^{1/p}h\|_{L_p(\mu)} = \|\varphi\| \|h\|_{L_p(\mu_1)}$. Podle první části důkazu tedy existuje funkce $g_1 \in L_q(\mu_1)$ taková, že $\psi(f) = \int_\Omega f g_1 \, \mathrm{d}\mu_1$ pro každou $f \in L_p(\mu_1)$. Položme $g = w^{1/q} g_1$, pokud $p > 1$, resp. $g = g_1$, pokud $p = 1$. Pak pro $p > 1$ máme $\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q w \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q \, \mathrm{d}\mu_1 < +\infty$, zatímco pro $p = 1$ máme $\operatorname{ess\,sup}_\mu |g| = \operatorname{ess\,sup}_\mu |g_1| = \operatorname{ess\,sup}_{\mu_1} |g_1| < +\infty$, neboť míry μ a μ_1 mají přesně stejné nulové množiny. Tedy $g \in L_q(\mu)$. Konečně, pro každé $f \in L_p(\mu)$ máme $h = w^{-1/p} f \in L_p(\mu_1)$ (vizte (2)), takže

$$\varphi(f) = \psi(h) = \int_\Omega h g_1 \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_\Omega w^{-1/p} f g_1 w \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu = \varphi_g(f).$$

Nyní se budeme věnovat případu, kdy $\mu(\Omega)$ není σ-konečná a $1 < p < \infty$. Pro $A \in \mathcal{S}$ lze prostor $L_p(A)$ přirozeným způsobem chápat jako podprostor $L_p(\Omega)$ sestávající z funkcí rovných 0 mimo A. Označme φ^A restrikci funkcionálu φ na podprostor $L_p(A)$. Zřejmě $\|\varphi^B\| \leq \|\varphi^A\| \leq \|\varphi\|$ pro každé $A, B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. Označme $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S};\ A \text{ má } \sigma\text{-konečnou míru}\}$. Položme $\gamma = \sup_{A \in \mathcal{A}} \|\varphi^A\| \leq \|\varphi\|$, nalezněme posloupnost množin $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|\varphi^{E_n}\| = \gamma$ a položme $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Pak $E \in \mathcal{A}$ a $\gamma \geq \|\varphi^E\| \geq \|\varphi^{E_n}\| \to \gamma$, tedy $\|\varphi^E\| = \gamma$. Poznamenejme, že nakonec se ukáže, že platí $\varphi(f) = \varphi^E(f\restriction_E)$ pro každé $f \in L_p(\Omega)$.

Podle předchozí části důkazu existuje pro každé $A \in \mathcal{A}$ jednoznačně určená funkce $g_A \in L_q(A)$ splňující $\varphi^A = \varphi_{g_A}$ a $\|\varphi^A\| = \|g_A\|_q$. Jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, pak snadno vidíme, že $\varphi_{g_B}(f) = \varphi^B(f) = \varphi(f) = \varphi^A(f) = \varphi_{g_A}(f) = \varphi_{g_A\restriction_B}(f)$ pro každou $f \in L_p(B)$, přičemž $g_A\restriction_B \in L_q(B)$. Tedy z jednoznačnosti vyjádření funkcionálu φ^B dostáváme $g_A = g_B$ s. v. na B. Položme $g = g_E$ a rozšiřme ji nulou na doplňku E. Pak $g \in L_q(\Omega)$. Ukážeme, že $\varphi = \varphi_g$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $A \cap E = \emptyset$. Protože $A \cup E \in \mathcal{A}$ a dále $g_{E\cup A} = g_E$ s. v. na E a $g_{E\cup A} = g_A$ s. v. na A, dostáváme

$$\begin{aligned}\gamma^q \geq \|\varphi^{E\cup A}\|^q = \|g_{E\cup A}\|_q^q = \int_{E\cup A} |g_{E\cup A}|^q \, \mathrm{d}\mu = \int_E |g_{E\cup A}|^q \, \mathrm{d}\mu + \int_A |g_{E\cup A}|^q \, \mathrm{d}\mu = \\ = \int_E |g_E|^q \, \mathrm{d}\mu + \int_A |g_A|^q \, \mathrm{d}\mu = \|\varphi^E\|^q + \|g_A\|_q^q = \gamma^q + \|g_A\|_q^q,\end{aligned}$$

což znamená, že $g_A = 0$. (Poznamenejme, že toto je klíčové místo důkazu, a jediné, kde využíváme fakt $q < \infty$.) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $f \in L_p(A)$ tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi^A(f) = \int_A f g_A \, \mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_A \, \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_A \, \mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_{A\setminus E} \, \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_{A\cap E} \, \mathrm{d}\mu = \\ = \int_{A\cap E} f g_E \, \mathrm{d}\mu = \int_{A\cap E} f g \, \mathrm{d}\mu = \int_A f g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu = \varphi_g(f),\end{aligned}$$

přičemž předposlední dvě rovnosti platí proto, že $g = 0$ mimo E a $f = 0$ mimo A. Rovnost $\varphi(f) = \varphi_g(f)$ tedy speciálně platí pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f na Ω splňující $\mu\big(\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}\big) < +\infty$. Množina všech těchto funkcí je ovšem hustá v $L_p(\Omega)$ ([R, Věta 3.13]), odkud plyne $\varphi = \varphi_g$ (Věta 15.3).

□

Poznámka. Všimněme si, že pro prostor ℓ_2 (nebo obecněji $L_2(\mu)$) máme dvě reprezentace duálu: „hilbertovskou" reprezentaci pomocí sdruženě lineárního zobrazení $I_H \colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 1.122 a „banachovskou" reprezentaci pomocí lineárního zobrazení $I \colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 15(b). Rozdíl je v tom, jak vypadá akce prvku $y \in \ell_2$ reprezentujícího funkcionál na prvek $x \in \ell_2$:

$$I_H(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n},$$

$$I(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

V případě reálného prostoru obě reprezentace splývají, v případě komplexního prostoru platí $I_H(y) = I(\overline{y})$, kde $\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots)$. Pro prostor $L_2(\mu)$ je interpretace obou reprezentací analogická.

Důkaz následujícího tvrzení je podobný důkazu Věty 15(a), (b).

VĚTA 16. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

DŮKAZ. Nechť X, Y jsou nad $\mathbb{K}$. Označme $Z = X \oplus_p Y$. Zobrazení $Q_X\colon Z \to X$, $Q_X(x,y) = x$ a $Q_Y\colon Z \to Y$, $Q_Y(x,y) = y$ jsou zjevně spojité lineární operátory. Proto $I(f,g) = f \circ Q_X + g \circ Q_Y$ je spojitý lineární funkcionál na Z, a tedy I je dobře definováno. Zjevně I je lineární. Ukážeme, že I je na: Je-li $h \in Z^*$, pak položíme $f(x) = h(x,0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0,y)$ pro $y \in Y$. Snadno je vidět, že $f \in X^*$ a $g \in Y^*$. Máme $I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y) = h(x,0) + h(0,y) = h(x,y)$ pro každé $(x,y) \in Z$, tedy $I(f,g) = h$.

Nakonec ukažme, že I je izometrie. Nechť $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Předpokládejme nejprve, že $1 < p < \infty$. Pak s využitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |I(f,g)(x,y)| = \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} \big(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $(f,g) \neq 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $c = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}}$ a $\eta = \frac{c}{\|f\|^{q-1}+\|g\|^{q-1}}\varepsilon$. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \eta$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \eta$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y\big) \in Z$. Pak

$$\|u\| = \frac{1}{c}\big(\|f\|^q\|x\|^p + \|g\|^q\|y\|^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{c}\big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}I(f,g)(u) &= \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}f(\alpha x) + \|g\|^{q-1}g(\beta y)\big) = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}|f(x)| + \|g\|^{q-1}|g(y)|\big) > \\ &> \frac{\|f\|^q + \|g\|^q}{c} - \frac{\|f\|^{q-1} + \|g\|^{q-1}}{c}\eta = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Je-li $p = 1$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|f\|_{X^*}, \|g\|_{Y^*}\big\}\big(\|x\|_X + \|y\|_Y\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\|f\| \geq \|g\|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$. Pak $\|I(f,g)\| \geq |I(f,g)(x,0)| = |f(x)| > \|f\| - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Konečně, je-li $p = \infty$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|x\|_X, \|y\|_Y\big\}\big(\|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \varepsilon$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = (\alpha x, \beta y) \in Z$. Pak $\|u\| = \max\big\{|\alpha|\|x\|, |\beta|\|y\|\big\} \leq 1$ a

$$I(f,g)(u) = f(\alpha x) + g(\beta y) = |f(x)| + |g(y)| > \|f\| + \|g\| - 2\varepsilon = \|(f,g)\| - 2\varepsilon.$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

□

Několik následujících tvrzení se bude týkat prostoru $C(K)$. Zformulujeme je v obecnější verzi pro kompaktní topologické prostory. Čtenář, který není obeznámen se základy topologie, si všude místo topologického prostoru může představovat metrický prostor.

DEFINICE 17. Nechť K je kompaktní topologický prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

FAKT 18. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak $\Lambda(f) \in \mathbb{R}$ pro $f \in C(K)$ reálnou a Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

DŮKAZ. Je-li $f \in C(K)$ reálná, pak $\Lambda(f) = \Lambda(f^+ - f^-) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-) \in \mathbb{R}$, neboť f^+ i f^- jsou nezáporné. Dále pro $f, g \in C(K)$ reálné, $f \leq g$, máme $\Lambda(g) - \Lambda(f) = \Lambda(g - f) \geq 0$, neboť $g - f \geq 0$. Odtud $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$, neboť $\Lambda(f), \Lambda(g) \in \mathbb{R}$. Pro reálnou $f \in C(K)$ platí $f \leq |f|$ a $-f \leq |f|$, odkud s použitím monotonie dostaneme $\Lambda(f) \leq \Lambda(|f|)$ a $-\Lambda(f) = \Lambda(-f) \leq \Lambda(|f|)$, což dohromady dává odhad $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Odtud v reálném případě platí, že $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(1)$ pro $f \in B_{C(K)}$. V komplexním případě pak $|\Lambda(f)| = |\Lambda(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)| \leq |\Lambda(\operatorname{Re} f)| + |\Lambda(\operatorname{Im} f)| \leq \Lambda(|\operatorname{Re} f|) + \Lambda(|\operatorname{Im} f|) \leq 2\Lambda(|f|)$, a tedy $\|\Lambda\| \leq 2\Lambda(1)$.

□

Poznamenejme, že ve skutečnosti výše uvedená nerovnost $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$ platí i v komplexním případě, což ihned plyne z reprezentace níže.

VĚTA 19 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Všimněme si, že předchozí věta říká, že existuje bijekce mezi množinou všech regulárních borelovských *nezáporných* měr na K a množinou všech spojitých lineárních *nezáporných* funkcionálů na $C(K)$.

K důkazu budeme potřebovat Lemma 15.13 a Větu 15.14.

DŮKAZ. Důkaz je poměrně technický, proto nejprve nastíníme základní strategii. Předpokládejme, že míra μ má požadované vlastnosti. Z regularity plyne, že μ je jednoznačně určena svými hodnotami na otevřených, případně uzavřených, množinách. Zvolme například otevřené množiny. Pro každou otevřenou množinu $G \subset K$ platí $\mu(G) = \int_K \chi_G \, \mathrm{d}\mu$, kde na pravé straně je „evaluace funkcionálu Λ na funkci χ_G“. Zdálo by se tedy vhodné definovat $\mu(G) = \Lambda(\chi_G)$, ovšem hodnota $\Lambda(\chi_G)$ obvykle není definována, neboť χ_G není spojitá funkce (pokud G není obojetná). Přirozeným nápadem tedy je funkci χ_G aproximovat pomocí spojitých funkcí. Pro každou $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$ se $\operatorname{supp} f \subset G$ platí $\Lambda(f) = \int_G f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_G 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(G)$. Na druhou stranu, zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, pak z vnitřní regularity plyne existence uzavřené $F \subset G$ takové, že $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Dle Lemmatu 15.13 existuje $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$, která je rovna 1 na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak $\Lambda(f) = \int_G f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_F f \, \mathrm{d}\mu = \mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Platí tedy

$$\mu(G) = \sup\left\{\Lambda(f);\ f \in C(K), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subset G\right\}. \tag{3}$$

Vztah (3) je tedy nutnou podmínkou, kterou musí míra μ splňovat, a proto je přirozené vyjít při konstrukci μ právě z tohoto vzorce. Hodnoty μ na borelovských množinách jsou pak jednoznačně určeny pomocí vnější regularity. Konstrukci lze tedy vést tak, že definujeme μ na otevřených množinách vzorcem (3) a na borelovských množinách vzorcem

$$\mu(E) = \inf\left\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\right\}, \tag{4}$$

ukážeme, že definice je konzistentní a že takto definovaná μ je regulární míra, a že tato míra reprezentuje funkcionál Λ. Kvůli technickým obtížím nicméně zkonstruujeme nejprve vnější míru tak, že definujeme hodnoty μ vzorcem (4) na *všech* podmnožinách K, a pak pomocí Carathéodoryovy[5] konstrukce ukážeme, že restrikce μ na borelovské množiny je míra. Konstrukce bude rozdělena do několika technických kroků:

1. krok: Konstrukce vnější míry μ na K pomocí vzorců (3) a (4).
2. krok: Ukážeme, že borelovské množiny jsou carathéodoryovsky měřitelné vzhledem k μ, a tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.
3. krok: Ukážeme, že μ reprezentuje funkcionál Λ.
4. krok: Ukážeme jednoznačnost μ.

1. krok. Pro každou otevřenou $G \subset K$ definujme $\mu(G)$ pomocí vzorce (3). Dále pro každou $E \subset K$, která není otevřená, definujme $\mu(E)$ pomocí vzorce (4). Je ihned vidět, že jsou-li $U, V \subset K$ otevřené a $U \subset V$, pak $\mu(U) \leq \mu(V)$. Odtud plyne, že vzorec (4) platí pro všechny $E \subset K$. Dále je zřejmé, že μ je nezáporná, konečná (Fakt 18), $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(E) \leq \mu(F)$ pro libovolné $E, F \subset K$, $E \subset F$. Zbývá ukázat σ-subaditivitu.

Nechť je dána posloupnost množin $\{E_n\}$ v K. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle (4) existují otevřené množiny $G_n \supset E_n$ splňující $\mu(G_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak G je otevřená množina a podle (3) existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset G$ a $\Lambda(f) > \mu(G) - \varepsilon$. Množina $\operatorname{supp} f$ je uzavřená podmnožina K, tedy je kompaktní. Proto existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Položme $U_{m+1} = K \setminus \operatorname{supp} f$ a $U_i = G_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ je otevřené pokrytí K, a tedy dle Věty 15.14 existují $g_1, \dots, g_{m+1} \in C(K)$ splňující $0 \leq g_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, m+1$ a $\sum_{i=1}^{m+1} g_i = 1$. Protože $g_{m+1} = 0$ na $\operatorname{supp} f$, platí $\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$ na $\operatorname{supp} f$. Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $h_i \in C(K)$, $0 \leq h_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} h_i \subset U_i = G_i$ pro $i = 1, \dots, m$ a $f = \sum_{i=1}^{m} h_i$. Tedy

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \mu(G) < \Lambda(f) + \varepsilon = \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \mu(G_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \leq \\ &\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).\end{aligned}$$

Protože nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, je μ σ-subaditivní. Tedy μ je vnější míra na K.

2.krok. Nechť $\mathcal{S}$ je množina všech carathéodoryovsky měřitelných podmnožin K vzhledem k μ, tj. množin $E \subset K$ splňujících $\mu(T) = \mu(T \cap E) + \mu(T \setminus E)$ pro každou testovací $T \subset K$. Pak dle Caratheódoryovy věty je $\mathcal{S}$ σ-algebra a μ zúžená na $\mathcal{S}$ je míra (dokonce úplná). Je třeba ukázat, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny borelovské podmnožiny K. K tomu stačí ověřit, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny otevřené množiny.

Nejprve ukážeme, že μ je aditivní na otevřených množinách. Nechť tedy $U, V \subset K$ jsou disjunktní otevřené množiny. Díky subaditivitě μ stačí ukázat, že $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle (3) existují $f, g \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \geq \mu(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \geq \mu(V) - \varepsilon$. Protože U a V jsou disjunktní, platí $0 \leq f + g \leq 1$ a $\operatorname{supp}(f+g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu(U \cup V) \geq \Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \geq \mu(U) + \mu(V) - 2\varepsilon.$$

Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$.

Nyní již relativně snadno dostaneme, že každá otevřená podmnožina K je carathéodoryovsky měřitelná vzhledem k μ. Nechť tedy $G \subset K$ je otevřená a $T \subset K$ je libovolná. Díky subaditivitě stačí ukázat, že $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle (4) existuje $U \supset T$ otevřená splňující $\mu(U) < \mu(T) + \varepsilon$. Ze (3) najdeme $f \in C(K)$ takovou, že $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U \cap G$ a $\Lambda(f) > \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 15.13 existuje otevřená množina V splňující $\operatorname{supp} f \subset V \subset \overline{V} \subset U \cap G$. Pak $\mu(V) \geq \Lambda(f) \geq \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Množiny V a $U \setminus \overline{V}$ jsou disjunktní a otevřené. Z aditivity μ na otevřených množinách tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\mu(T) &> \mu(U) - \varepsilon \geq \mu\big(V \cup (U \setminus \overline{V})\big) - \varepsilon = \mu(V) + \mu(U \setminus \overline{V}) - \varepsilon \geq \\ &\geq \mu(U \cap G) - \varepsilon + \mu(U \setminus G) - \varepsilon \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

[5]Constantin Carathéodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) (1914)

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$.

Na závěr tohoto kroku si uvědomme, že z monotonie Λ plyne $\mu(K) = \Lambda(1) < +\infty$, speciálně μ je konečná na kompaktních podmnožinách K. Dále μ je zevně regulární přímo podle (4). Ovšem každá konečná zevně regulární míra je automaticky regulární i zevnitř. Tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.

3. krok. Ukážeme, že $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $f \in C(K)$. S využitím rozkladu na reálnou a imaginární část a díky linearitě Λ a integrálu stačí dokázat reprezentaci pro reálné funkce. Dále si všimněme, že stačí dokázat nerovnost $\Lambda(f) \leq \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou reálnou $f \in C(K)$. Pak totiž aplikací této nerovnosti na $-f$ obdržíme opačnou nerovnost pro f.

Nechť je tedy dána reálná $f \in C(K)$ a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $a \leq f \leq b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Vskutku, máme-li požadovanou nerovnost dokázánu pro všechny nezáporné $g \in C(K)$, pak díky rovnosti $\Lambda(1) = \mu(K) = \int_K \chi_K \,\mathrm{d}\mu$ máme $\Lambda(f) = \Lambda(f - a\chi_K + a\chi_K) = \Lambda(f - a\chi_K) + a\Lambda(\chi_K) \leq \int_K (f - a\chi_K) \,\mathrm{d}\mu + a \int_K \chi_K \,\mathrm{d}\mu = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$. Zvolme libovolné $0 < \varepsilon < 1$ a reálná čísla $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leq b < y_n$ splňující $y_i - y_{i-1} \leq \varepsilon$ pro $i = 1, \ldots, n$. Protože f je spojitá, množiny

$$E_i = \{x \in K;\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

tvoří borelovský rozklad K. Dále množiny $\{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$ jsou otevřené. Díky regularitě μ tedy existují otevřené množiny U_i, $i = 1, \ldots, n$ splňující $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ a $E_i \subset U_i \subset \{x \in K; f(x) < y_i + \varepsilon\}$. Systém $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí K, a tedy podle Věty 15.14 existují funkce $g_1, \ldots, g_n \in C(K)$ splňující $0 \leq g_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$. Pak máme $g_i f \leq (y_i + \varepsilon) g_i$ na K a $f \geq y_{i-1} \geq y_i - \varepsilon$ na E_i pro $i = 1, \ldots, n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f \sum_{i=1}^n g_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda(g_i) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(U_i) \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon) \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} n(b + 2\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\varepsilon\big) \\
&= \int_K f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\big),
\end{aligned}$$

přičemž první nerovnost plyne z monotonie Λ a druhá plyne z (3). Protože nerovnost platí pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$, je tím důkaz 3. kroku dokončen.

4. krok. Nechť μ, ν jsou dvě regulární borelovské míry reprezentující funkcionál Λ. Vzhledem k vnější regularitě stačí ukázat, že se shodují na otevřených množinách. Nechť $G \subset K$ je otevřená množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Díky vnitřní regularitě existuje uzavřená množina $F \subset U$ splňující $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 15.13 existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak

$$\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon \leq \int_K f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon = \int_K f \,\mathrm{d}\nu + \varepsilon \leq \nu(G) + \varepsilon.$$

Toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy $\mu(G) \leq \nu(G)$. Prohozením rolí μ a ν dostaneme opačnou nerovnost.

□

Před studiem následující věty je nezbytné se seznámit s integrací vzhledem ke komplexním mírám, vizte např. Dodatek, pododdíl 15.4.4.

VĚTA 20 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^{*6}$). *Je-li K kompaktní Hausdorffův topologický prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I : M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tuto reprezentační větu dokážeme s pomocí Věty 19 a následujícího lemmatu.

LEMMA 21. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.*

DŮKAZ. Nechť $C^+(K)$ značí nezáporné spojité funkce na K. Pro $f \in C^+(K)$ a $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f$ platí $|\varphi(h)| \le \|\varphi\|\|h\| \le \|\varphi\|\|f\|$. Můžeme tedy definovat nezápornou funkci $\Lambda\colon C^+(K) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Lambda(f) = \sup\big\{|\varphi(h)|;\ h \in C(K), |h| \le f\big\}.$$

Snadno je vidět, že $\Lambda(f) \le \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C^+(K)$ splňují $f \le g$, a dále $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ kdykoli $f \in C^+(K)$ a $c \ge 0$. Též ihned vidíme, že Λ splňuje náš požadavek $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Zbývá nám ukázat, že Λ lze rozšířit na všechny funkce z $C(K)$ tak, aby to byl lineární funkcionál.

Ukažme nejprve, že Λ je aditivní na $C^+(K)$, tj. $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$ pro libovolné $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Nechť $f_1, f_2 \in C^+(K)$ jsou dány. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle definice existují $h_1, h_2 \in C(K)$ takové, že $|h_j| \le f_j$ a $|\varphi(h_j)| > \Lambda(f_j) - \varepsilon$, $j = 1, 2$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ splňují $|\alpha_j| = 1$ a $\alpha_j\varphi(h_j) = |\varphi(h_j)|$, $j = 1, 2$. Pak $|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \le |h_1| + |h_2| \le f_1 + f_2$, takže

$$\Lambda(f_1)+\Lambda(f_2) < |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)|+2\varepsilon = \varphi(\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)+2\varepsilon \le \Lambda(|h_1|+|h_2|)+2\varepsilon \le \Lambda(f_1+f_2)+2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \le \Lambda(f_1 + f_2)$.

Pro opačnou nerovnost uvažujme libovolnou funkci $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$. Položme $V = \{x \in K;\ f_1(x) + f_2(x) > 0\}$ a pro $j = 1, 2$ definujme

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{f_j(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & \text{pro } x \in V, \\ 0 & \text{pro } x \in K \setminus V. \end{cases}$$

Funkce h_j jsou zjevně spojité v bodech množiny V. Je-li $x \in K \setminus V$, pak $h(x) = 0$, a protože h je spojitá a platí $0 \le |h_j| \le |h|$, jsou i h_j spojité v x. Tedy $h_j \in C(K)$, $j = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_j| \le f_j$, máme

$$|\varphi(h)| = |\varphi(h_1) + \varphi(h_2)| \le |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)| \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2).$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$, dostáváme, že $\Lambda(f_1 + f_2) \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Na závěr dodefinujeme $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ pro reálnou $f \in C(K)$ a v komplexním případě dále $\Lambda(f) = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)$ pro obecnou $f \in C(K)$. (Poznamenejme, že definice jsou konzistentní, neboť $\Lambda(0) = 0$.) Zbývá nám ověřit linearitu Λ. Nechť nejprve $f, g \in C(K)$ jsou reálné. Položme $h = f + g$. Pak $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, neboli $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Z aditivity Λ pro nezáporné funkce tak dostáváme $\Lambda(h^+) + \Lambda(f^-) + \Lambda(g^-) = \Lambda(h^-) + \Lambda(f^+) + \Lambda(g^+)$, odkud již snadno obdržíme $\Lambda(h) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Komplexní případ pak snadno plyne z reálného a z aditivity Re a Im.

Konečně, snadno je vidět, že pro každou $f \in C(K)$ je $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ pro $c \ge 0$ a $\Lambda(-f) = -\Lambda(f)$. V komplexním případě pak $\Lambda(if) = \Lambda(-\operatorname{Im} f) + i\Lambda(\operatorname{Re} f) = i\big(\Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)\big) = i\Lambda(f)$. Tím je dokázáno, že Λ je lineární funkcionál na $C(K)$.

□

DŮKAZ VĚTY 20. Nechť $\mu \in M(K)$ je dáno. Pro každé $f \in C(K)$ platí

$$\int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|f\||\mu|(K) = \|\mu\|\|f\|.$$

Odtud plyne, že φ_μ je dobře definovaná funkce a platí $|\varphi_\mu(f)| \le \int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|\mu\|\|f\|$. Dále φ_μ je zjevně lineární, a tedy $\varphi_\mu \in C(K)^*$ a $\|\varphi_\mu\| \le \|\mu\|$.

Na druhou stranu, dle Tvrzení 15.94 existuje borelovská funkce $h\colon K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ a $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \int_K fh\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $f \in L_1(|\mu|)$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, str. 71]

[6]F. Riesz větu ukázal pro $C([a, b])$ pomocí Stieltjesova integrálu (1909-11), J. Radon zavedl míru a zobecnil větu na $\mathbb{R}^n$ (1913), pro kompaktní metrické prostory reprezentaci dokázal S. Banach (1937).

nebo Důsledek 15.85) existuje posloupnost $\{f_n\} \subset B_{C(K)}$ taková, že $f_n(x) \to \overline{h}(x)$ pro $|\mu|$-s. v. $x \in K$. Pak z Lebesgueovy věty plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_\mu(f_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \int_K f_n h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \left| \int_K \overline{h} h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \int_K 1 \, \mathrm{d}|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$. Linearita zobrazení I je zřejmá, takže je to lineární izometrie do.

Ukažme, že I je na. Nechť $\varphi \in C(K)^*$. Dle Lemmatu 21 existuje nezáporný lineární funkcionál Λ na $C(K)$ splňující $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Dle Věty 19 existuje na K (konečná) regulární borelovská nezáporná míra λ splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in C(K)$. Máme tedy

$$|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda = \|f\|_{L_1(\lambda)}$$

pro každou $f \in C(K)$. Odtud plyne, že jsou-li $f, g \in C(K)$ takové, že $f = g$ λ-s. v. na K, pak $|\varphi(f) - \varphi(g)| \le \|f - g\|_{L_1(\lambda)} = 0$, neboli $\varphi(f) = \varphi(g)$. Můžeme tedy chápat funkcionál φ jako lineární funkcionál $\tilde{\varphi}$ na prostoru $(C(K), \|\cdot\|_{L_1(\lambda)})$ jakožto podprostoru $L_1(\lambda)$. Navíc nerovnost výše ukazuje, že $\tilde{\varphi}$ je spojitý a $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$. Protože $C(K)$ je hustý podprostor $L_1(\lambda)$ v normě prostoru $L_1(\lambda)$ ([R, Věta 3.14]), existuje jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi}$ na funkcionál $\psi \in L_1(\lambda)^*$ (Věta 1.64). Tedy dle Věty 15(d) existuje $g \in L_\infty(\lambda)$ taková, že $\psi(f) = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in L_1(\lambda)$. Definujme komplexní borelovskou míru μ předpisem

$$\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $E \subset K$ borelovskou. Dle Věty 15.91 je μ regulární. Pak díky Větě 15.93 máme $\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda = \psi(f) = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$ pro každou $f \in C(K)$.

□

VĚTA 22 (Felix Hausdorff). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

DŮKAZ. (a) Je-li $f \in Y^\perp$ a jsou-li $x, y \in X$ takové, že $\widehat{x} = \widehat{y}$ v X/Y, pak $x - y \in Y$, a tedy $f(x) = f(y)$. Zobrazení I je tedy dobře definované. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in Y^\perp$. Pak $\|I(f)\| = \sup_{\widehat{x}\in U_{X/Y}} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x\in U_X} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x\in U_X} |f(x)| = \|f\|$, přičemž druhá rovnost plyne z faktu $U_{X/Y} = q(U_X)$, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení (Tvrzení 1.71). Konečně, je-li $g \in (X/Y)^*$, pak $g \circ q \in X^*$ a navíc $g \circ q \in Y^\perp$. Zjevně $I(g \circ q) = g$, tedy I je na.

(b) Nejprve si uvědomme, že $Y^\perp$ je uzavřený podprostor X^* (Lemma 12(a)), a tedy $X^*/Y^\perp$ je normovaný lineární prostor. Dále I je dobře definováno, neboť jsou-li $f, g \in X^*$ takové, že $\widehat{f} = \widehat{g}$ v $X^*/Y^\perp$, pak $f - g \in Y^\perp$, neboli $f = g$ na Y. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in X^*$. Je-li $h \in \widehat{f}$, pak $h\restriction_Y = f\restriction_Y$, tedy $\|h\| \ge \|f\restriction_Y\|$, odkud plyne $\|\widehat{f}\| = \inf_{h\in\widehat{f}} \|h\| \ge \|f\restriction_Y\| = \|I(\widehat{f})\|$. Na druhou stranu, dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 4) existuje rozšíření $g \in X^*$ funkcionálu $f\restriction_Y \in Y^*$ splňující $\|g\| = \|f\restriction_Y\|$. Pak $g - f \in Y^\perp$, tj. $g \in \widehat{f}$. Proto $\|I(\widehat{f})\| = \|f\restriction_Y\| = \|g\| \ge \|\widehat{f}\|$. Konečně, je-li $g \in Y^*$ a $f \in X^*$ je rozšíření g z Hahnovy-Banachovy věty, pak $I(\widehat{f}) = f\restriction_Y = g$, a tedy I je na.

□

POZNÁMKA. Reprezentační věty z tohoto oddílu hovoří o tom, jak lze reprezentovat duální prostor pro konkrétní Banachovy prostory X v tom smyslu, že existuje lineární izometrie mezi nějakým Banachovým prostorem Y a duálem X^*. Nejdůležitější částí těchto reprezentačních vět jsou ovšem popisy toho, jakým způsobem prvek Y, který reprezentuje funkcionál na X, působí na prvky prostoru X.

Obvykle se prostory X^* a Y ztotožňují, říkáme tedy například „ℓ_1 je duálem k c_0“. Vždy je ovšem třeba mít na paměti, že toto ztotožnění je realizováno pomocí příslušné izometrie, a je důležité vědět, jak vypadá příslušná „akce“ konkrétního prvku prostoru Y na daný prvek prostoru X.

PŘÍKLAD 23. Uvažujme $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Pak B je uzavřený podprostor ℓ_1^* a $B_\perp = \{0\} \subset \ell_1$. Označíme-li totiž f_n kanonické bázové vektory v c_0, pak pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in B_\perp$ máme $x_n = f_n(x) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(B_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell_1^* = \ell_\infty \supsetneq c_0 = B$.

◇

3. Druhý duál a reflexivita

Reflexivní prostory jsou významnou třídou Banachových prostorů. Jejich důležitost spočívá především v tom, že v nich funguje jistá náhražka kompaktnosti jednotkové koule, jak uvidíme v oddílu 6.9. Definice reflexivního prostoru pracuje s druhým duálním prostorem. Význam této definice se lépe vyjasní opět až v oddílu 6.9

DEFINICE 24. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, spojitost pak plyne z odhadu $|f(x)| \leq \|x\|\|f\|$.

DEFINICE 25. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$, $f \in X^*$ a skalár α máme $\varepsilon_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varepsilon_x(f) + \varepsilon_y(f) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(f)$ a podobně $\varepsilon_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\varepsilon_x(f)) = (\alpha\varepsilon_x)(f)$. Tedy zobrazení ε je lineární. Dále $\|\varepsilon(x)\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \|x\|$ dle duálního vyjádření normy (Důsledek 6). Tedy ε je izometrie do. Je-li X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený dle Tvrzení 1.62(c).

□

Pomocí vnoření do druhého duálu snadno dokážeme následující pozorování.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$, *a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

DŮKAZ. Je-li $\dim X = n < \infty$, pak dimenze prostoru všech lineárních forem na X je rovna n. Podle Věty 1.68 je ovšem každá lineární forma na X spojitá, a tedy $\dim X^* = n$.

Nechť nyní $\dim X = \infty$. Ukážeme, že pak také $\dim X^* = \infty$. Předpokládejme, že to není pravda, tj. $\dim X^* < \infty$. Pak dle předchozí části je $\dim X^{**} < \infty$. Prostor X je ovšem izomorfní podprostoru X^{**}, a tedy $\dim X = \dim \varepsilon(X) \leq \dim X^{**} < \infty$, což je spor.

□

VĚTA 28. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 29. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak existují normovaný lineární prostor Z a lineární izometrie $S\colon Z \to Y$ na tak, že X je podprostor Z a $S\restriction_X = T$.*

DŮKAZ. Nechť e je taková množina, že uspořádaná dvojice $[e, y] \notin X$ pro každé $y \in Y$. Definujme množinu $Z = X \cup \{[e, y];\ y \in Y \setminus T(X)\}$ a zobrazení $S\colon Z \to Y$ předpisem $S(x) = T(x)$ pro $x \in X$ a $S([e, y]) = y$ pro $y \in Y \setminus T(X)$. Dle předpokladu na e je S dobře definováno. Snadno je vidět, že S je bijekce a zjevně $S\restriction_X = T$. Na množinu Z přesuneme vektorové operace z prostoru Y pomocí zobrazení S: Pro $x, y \in Z$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $x + y = S^{-1}\big(S(x) + S(y)\big)$ a $\alpha \cdot x = S^{-1}\big(\alpha S(x)\big)$. Snadno lze ověřit, že Z s takto definovanými operacemi je vektorový prostor. Protože $S\restriction_X = T$ je lineární vzhledem k původním operacím na X, plyne odtud, že nově definované operace na X jakožto podmnožině Z souhlasí s původními vektorovými operacemi na X, a tedy X je vektorový podprostor Z. Definice vektorových operací na Z též přímo dává, že S je lineární zobrazení.

Podobně na Z přesuneme normu z Y: Pro $x \in Z$ definujeme $\|x\| = \|S(x)\|$. Linearita S snadno implikuje, že $\|\cdot\|$ je norma na Z. Protože $S\restriction_X = T$ je izometrie vzhledem k původní normě na X, plyne odtud, že nově definovaná norma na X jakožto podmnožině Z souhlasí s původními normou na X, a tedy X je podprostor Z jakožto normovaného lineárního prostoru. Konečně, z definice normy je přímo vidět, že S je izometrie.

□

DŮKAZ VĚTY 28. Podle Tvrzení 26 je ε lineární izometrie, tedy dle Lemmatu 29 použitého na zobrazení $T = \varepsilon$ a $Y = \overline{\varepsilon(X)}$ existují normovaný lineární prostor $\widehat{X}$ obsahující X a lineární izometrie $S\colon \widehat{X} \to Y$ na taková, že $S\restriction_X = \varepsilon$. Protože X^{**} je úplný (Věta 1.52), je i Y úplný (Tvrzení 1.5(b)), a tedy i $\widehat{X}$ je úplný (Věta 1.62(b)). Protože $S(X) = \varepsilon(X)$ je hustý v Y a S je homeomorfismus, plyne odtud, že X je hustý v $\widehat{X}$.

Nechť nyní X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Podle první části existuje jeho zúplnění $\widehat{X}$ jakožto normovaného lineárního prostoru. Pak metrický prostor $\widehat{X} \times \widehat{X}$ je též úplný (Věta 15.6) a snadno je vidět, že $X \times X$ je v něm hustý. Funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je dle Tvrzení 1.86(b) stejnoměrně spojitá na omezených podmnožinách $X \times X$, tedy existuje její spojité rozšíření $s\colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ (Věta 15.9). Funkce $(x, y, z) \mapsto s(x + y, z)$ a $(x, y, z) \mapsto s(x, z) + s(y, z)$ jsou spojité na prostoru $\widehat{X} \times \widehat{X} \times \widehat{X}$ a jsou si rovny na jeho husté podmnožině $X \times X \times X$ (z linearity skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Tedy dle Věty 15.3 platí $s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z)$ pro každé $x, y, z \in \widehat{X}$. Analogicky ověříme i ostatní vlastnosti skalárního součinu a též rovnost $s(x, x) = \|x\|^2_{\widehat{X}}$ pro každé $x \in \widehat{X}$. Tedy s je skalární součin na $\widehat{X}$ indukující úplnou normu na $\widehat{X}$.

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že X_1 a X_2 jsou zúplnění X. Pak zobrazení Id_X chápané jako prvek $\mathcal{L}(X, X_2)$ lze rozšířit na spojitý lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, který je izometrií do (Věta 1.64). Podle Tvrzení 1.62(c) je $T(X_1)$ uzavřený v X_2. Tedy $X_2 = \overline{X}^{X_2} \subset T(X_1) \subset X_2$, takže $T(X_1) = X_2$.

□

DEFINICE 30. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Povšimněme si, že je-li $X^{**} = \varepsilon(X)$ pro normovaný lineární prostor X, pak X je izometrický úplnému prostoru X^{**}. Tedy je úplný dle Věty 1.62(b). Podmínka $X^{**} = \varepsilon(X)$ ve výše zmíněné definici tedy nemůže být splněna pro prostory, které nejsou Banachovy.

VĚTA 31. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

DŮKAZ. Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Mějme $F \in H^{**}$ dáno. Položme $f(x) = \overline{F(I(x))}$ pro $x \in H$, kde $I\colon H \to H^*$ je identifikace z Věty 1.122. Snadno je vidět, že $f \in H^*$, čili dle Věty 1.122 existuje $y \in H$ takové, že $f(x) = \langle x, y \rangle$ pro každé $x \in H$. Vezměme libovolné $g \in H^*$ a nalezněme $x \in H$ splňující $I(x) = g$. Pak

$$F(g) = F(I(x)) = \overline{\overline{F(I(x))}} = \overline{f(x)} = \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle = g(y) = \varepsilon_y(g).$$

Tedy $F = \varepsilon_y = \varepsilon(y)$, odkud plyne, že ε je na.

Alternativně můžeme argumentovat následovně: Dle Věty 1.120 je H lineárně izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$, který je reflexivní podle Příkladu 34(b). Tedy je H reflexivní dle Věty 32(a).

□

VĚTA 32. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.
(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.
(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.
(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.
(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je reflexivní Banachův prostor, $T : X \to Y$ je lineární izomorfismus a je dán $F \in X^{**}$. Všimněme si, že $g \circ T \in X^*$ pro každé $g \in Y^*$, takže můžeme definovat

$$G(g) = F(g \circ T) \quad \text{pro } g \in Y^*.$$

Snadno je vidět, že G je lineární a $|G(g)| \leq \|F\|\|g \circ T\| \leq \|F\|\|T\|\|g\|$ (Fakt 1.49), tedy $G \in Y^{**}$. Protože Y je reflexivní, existuje $y \in Y$ splňující $\varepsilon_y = G$. Tvrdíme, že $x = T^{-1}(y)$ splňuje $\varepsilon_x = F$. Zvolme $f \in X^*$ libovolně. Pak $g = f \circ T^{-1} \in Y^*$, a tedy

$$F(f) = F(f \circ T^{-1} \circ T) = F(g \circ T) = G(g) = \varepsilon_y(g) = g(y) = f \circ T^{-1}(T(x)) = f(x) = \varepsilon_x(f).$$

Tedy kanonické vnoření ε je na.

Poznamenejme, že pokud již máme k dispozici teorii duálních operátorů, pak tvrzení (a) je přímočarým důsledkem jejich vlastností: Dle Věty 4.6(b) je T^{**} izomorfismus, tedy dle Tvrzení 4.5 je $\varepsilon_X = (T^{**})^{-1} \circ \varepsilon_Y \circ T$, přičemž všechny tři operátory vpravo jsou na.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor reflexivního prostoru X a nechť $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Zafixujme $G \in Y^{**}$ a položme

$$F(f) = G(f \restriction_Y) \quad \text{pro } f \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \leq \|G\|\|f \restriction_Y\| \leq \|G\|\|f\|$, a tedy existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = F$. Dokonce $x \in Y$, protože v opačném případě by existoval funkcionál $f \in X^*$ splňující $f = 0$ na Y a $f(x) > 0$ (Věta 7), což by znamenalo, že

$$0 < f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f \restriction_Y) = G(0) = 0.$$

Nakonec ukažme, že $\varepsilon_2(x) = G$. Dané $g \in Y^*$ rozšiřme pomocí Hahnovy-Banachovy věty na $f \in X^*$ a počítejme

$$\varepsilon_2(x)(g) = g(x) = f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f \restriction_Y) = G(g).$$

(c) Nechť $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : X^* \to X^{***}$ jsou příslušná kanonická vnoření.

$\Rightarrow$ Je-li $\Phi \in X^{***}$ dáno, je $f = \Phi \circ \varepsilon_1 \in X^*$. Tvrdíme, že platí $\varepsilon_2(f) = \Phi$. Pro libovolné $F \in X^{**}$ totiž z reflexivity X najdeme $y \in X$ splňující $\varepsilon_1(y) = F$. Pak

$$\Phi(F) = \Phi(\varepsilon_1(y)) = f(y) = \varepsilon_1(y)(f) = F(f) = \varepsilon_2(f)(F).$$

Tedy ε_2 je na, což znamená, že X^* je reflexivní.

$\Leftarrow$ Z předchozí implikace plyne, že X^{**} je reflexivní. Podle Tvrzení 26 je $\varepsilon_1(X)$ uzavřený podprostor X^{**}, a tedy je reflexivní podle (b). Prostor X je izometrický prostoru $\varepsilon_1(X)$ (opět Tvrzení 26), a tedy je reflexivní podle (a).

(d) Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Označme $\varepsilon : X \oplus_p Y \to (X \oplus_p Y)^{**}$, $\varepsilon_1 : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2 : Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření a $I : X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ identifikaci z Věty 16. Nechť $H \in (X \oplus Y)^{**}$ je dáno. Položme $F(f) = H(I(f, 0))$ pro $f \in X^*$ a $G(g) = H(I(0, g))$ pro $g \in Y^*$. Potom $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \leq \|H\|\|(f, 0)\| \leq \|H\|\|f\|$, a podobně $G \in Y^{**}$. Protože X a Y jsou reflexivní, existují prvky $x \in X$ a $y \in Y$ tak, že $\varepsilon_1(x) = F$ a $\varepsilon_2(y) = G$. Tvrdíme, že $\varepsilon(x, y) = H$. Je-li totiž $h \in (X \oplus_p Y)^*$, pak položíme $f(x) = h(x,0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0,y)$ pro $y \in Y$. Pak $h = I(f,0) + I(0,g)$, a dostáváme tedy

$$H(h) = H\big(I(f,0) + I(0,g)\big) = F(f) + G(g) = \varepsilon_1(x)(f) + \varepsilon_2(y)(g) = \\ = f(x) + g(y) = h(x,y) = \varepsilon_{(x,y)}(h).$$

Odtud plyne $\varepsilon_{(x,y)} = H$, čili ε je na.

(e) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení a $I: Y^\perp \to (X/Y)^*$ je identifikace z Věty 22. Nechť $\Phi \in (X/Y)^{**}$ je dáno. Položme $G(f) = \Phi(I(f))$ pro $f \in Y^\perp$. Pak $G \in (Y^\perp)^*$ a dle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho spojité rozšíření $F \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_x = F$. Chceme ukázat, že $\varepsilon_{\widehat{x}} = \Phi$. Nechť tedy $\varphi \in (X/Y)^*$ je libovolné. Pak $f = \varphi \circ q \in Y^\perp$ a $I(f) = \varphi$, neboť $I(f)(\widehat{y}) = f(y) = \varphi \circ q(y) = \varphi(\widehat{y})$ pro každé $y \in X$. Tedy

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(f)) = G(f) = F(f) = \varepsilon_x(f) = f(x) = \varphi(\widehat{x}) = \varepsilon_{\widehat{x}}(\varphi).$$

□

TVRZENÍ 33. *Je-li X separabilní reflexivní Banachův prostor, pak i X^* je separabilní.*

DŮKAZ. Prostor X^{**} je izometrický separabilnímu X, tedy je separabilní. Pak X^* je separabilní dle Věty 9.

□

PŘÍKLADY 34.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.
(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.
(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.
(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor[7]), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

DŮKAZ. (a) Dle Věty 1.68 je každý konečněrozměrný prostor izomorfní prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, který je reflexivní, neboť je Hilbertův (Věta 31). Izomorfismus ovšem zachovává reflexivitu (Věta 32(a)).

(b) Nechť $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$ označuje identifikaci z Věty 15(c). Je-li $\Phi \in L_p(\mu)^{**}$ dáno, je $\Phi \circ I \in L_q(\mu)^*$. Opět podle Věty 15(c) tedy existuje $f \in L_p(\mu)$ splňující

$$\int gf \,\mathrm{d}\mu = \Phi \circ I(g) \quad \text{pro každé } g \in L_q(\mu).$$

Pak $\Phi = \varepsilon_f$, protože pro libovolné $\varphi \in L_p(\mu)^*$ nalezneme $g \in L_q(\mu)$ s vlastností $I(g) = \varphi$ a spočteme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(g)) = \Phi \circ I(g) = \int gf \,\mathrm{d}\mu = \int fg \,\mathrm{d}\mu = I(g)(f) = \varepsilon_f(I(g)) = \varepsilon_f(\varphi).$$

(c) Prostor c_0^{**} je izometrický prostoru ℓ_∞ (Věta 15(a), Tvrzení 13 a Věta 15(b)). Prostor c_0 je ovšem separabilní, zatímco prostor ℓ_∞ je neseparabilní (Věta 1.26). Tedy c_0^{**} není izomorfní c_0, proto c_0 není reflexivní.

Prostor ℓ_1 není reflexivní podle Věty 32(a) a (c), neboť je izometrický c_0^*. Podobně, prostor ℓ_∞ není reflexivní, neboť je izometrický ℓ_1^* (případně proto, že nereflexivní c_0 je jeho uzavřeným podprostorem (Věta 32(b))). Prostor $L_1([0,1])$ není reflexivní podle Věty 32(b), neboť podle Příkladu 1.59 obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, který není reflexivní. Prostor $L_\infty([0,1])$ není reflexivní, neboť je izometrický duálu k nereflexivnímu prostoru $L_1([0,1])$ (Věta 15(d)).

Prostor $C([0,1])$ není reflexivní dle Tvrzení 33, neboť je separabilní (Věta 1.26(c)), zatímco jeho duál není separabilní. Vskutku, všimněme si, že duál obsahuje nespočetnou množinu Diracových[8] měr $\{\delta_x;\, x \in [0,1]\}$. Tato množina je ovšem 2-separovaná: Jsou-li $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, pak snadno vyrobíme spojitou funkci $f\colon [0,1] \to [-1,1]$, která splňuje $f(x) = 1$, $f(y) = -1$. Pak $f \in B_{C([0,1])}$, a tedy $\|\delta_x - \delta_y\| \geq (\delta_x - \delta_y)(f) = \delta_x(f) - \delta_y(f) = f(x) - f(y) = 2$.

[7] Robert Clarke James (1951)
[8] Paul Adrien Maurice Dirac

Alternativně lze argumentovat tím, že $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický nereflexivnímu prostoru c_0 (Příklad 1.60).

(d) Konstrukce Jamesova prostoru je mimo rámec těchto skript.

□

Kapitola 3

Úplnost v Banachových prostorech

Tato kapitola studuje roli úplnosti v Banachových prostorech. Ukazuje se, že kombinace lineární a úplné metrické struktury má netriviální důsledky, jako jsou Princip stejnoměrné omezenosti (Věta 1) a Věta o otevřeném zobrazení (Věta 5).

VĚTA 1 (Princip stejnoměrné omezenosti[1]). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

DŮKAZ[2]. (i)$\Rightarrow$(ii) je zřejmá.

(ii)$\Rightarrow$(i) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X;\ \|T(x)\| \leq n \text{ pro každé } T \in \mathcal{A}\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající díky (ii) celé X. Podle Baireovy věty[3] (Důsledek 15.11) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{A}$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \leq \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \leq 2n_0$. Odtud $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n_0}{r}$.

□

DŮSLEDEK 2. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí $T(x+y) = \lim T_n(x+y) = \lim\bigl(T_n(x) + T_n(y)\bigr) = \lim T_n(x) + \lim T_n(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim \alpha T_n(x) = \alpha \lim T_n(x) = \alpha T(x)$. Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim\|T_n(x)\| = \|T(x)\|$, speciálně posloupnost $\{\|T_n(x)\|\}$ je omezená. Z Principu stejnoměrné omezenosti (Věta 1) plyne, že posloupnost $\{\|T_n\|\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\| = \liminf_{n\to\infty}\|T_n(x)\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\| \in \mathbb{R}$. Tedy T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \liminf\|T_n\|$.

□

Následující příklad ukazuje, že bez úplnosti Princip stejnoměrné omezenosti neplatí.

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = c_{00}$ a $\mathcal{A} = \{nf_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály. Pak pro každé $x \in X$ je množina $\{n \in N;\ f_n(x) \neq 0\}$ konečná, a tedy $\sup\{|nf_n(x)|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Nicméně $\sup\{\|nf_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n;\ n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

◇

DEFINICE 4. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

[1] Větu dokázal pro $C([0,1])$ Eduard Helly (1912). Jeho důkaz funguje i v obecném případě. Obecné verze podali S. Banach (1922), H. Hahn (1922) a Theophil Henry Hildebrandt (1923). Nejznámější verzi publikovali S. Banach a H. Steinhaus (1927), proto se věta často nazývá Banachova-Steinhausova.

[2] Důkaz využívající Baireovu větu pochází od Stanisława Sakse (1927).

[3] René-Louis Baire ji zformuloval pro $\mathbb{R}$ (1899), základní myšlenka pochází ovšem už od Williama Fogga Osgooda (1897).

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení (ne nutně spojité), které je otevřené. Pak T je na. Vskutku, $T(X)$ je otevřená množina obsahující 0, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U(0,\delta) \subset T(X)$. Protože $T(X)$ je podprostor Y, obsahuje speciálně všechny násobky $U(0,\delta)$, a tedy $T(X) = Y$. Jedním z nejzákladnějších výsledků teorie Banachových prostorů je fakt, že pro spojité lineární operátory platí i věta obrácená. Zásadní roli zde ovšem hraje úplnost.

VĚTA 5 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

K důkazu použijeme následující lemma.

LEMMA 6 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku, máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $U(0,1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(U(0,1))}$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $U(0,1) \subset (\frac{r}{s}T)(U(0,1))$, odkud $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0,1)$ takové, že $\|z\| < 1 - \delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right)$. Pak totiž $z = (1-\delta)y \in (1-\delta)T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right) = T(U_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $y_0, y_1, y_2 \ldots \in Y$ takové, že

(i) $y_0 = 0$,
(ii) $\|y - y_n\| < \delta^n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iii) $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je $\|y\| < 1$, a tedy je volbou $y_0 = 0$ podmínka (ii) splněna. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ splňující $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce završena.

Nyní pro každé $n \in \mathbb{N}$ ze (iii) zvolíme $x_n \in \delta^{n-1}U_X$ takové, že $y_n - y_{n-1} = T(x_n)$. Protože $\delta < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní, a díky úplnosti X je tedy konvergentní (Věta 1.30). Označme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Pak dle Faktu 1.28 máme $\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty}\delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$. Tedy $x \in \frac{1}{1-\delta}U_X$. Ukážeme, že $T(x) = y$, čímž bude důkaz završen:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} y_N = y,$$

přičemž poslední rovnost platí díky (ii).

□

DŮKAZ VĚTY 5. Stačí ukázat, že $T(U_X)$ obsahuje kouli $U(0,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Vskutku, nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in T(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ splňuje $y = T(x)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $U(x,r) \subset G$. Máme tedy $U(y,\delta r) = y + rU(0,\delta) \subset y + rT(U_X) = T(x + rU_X) = T(U(x,r)) \subset T(G)$.

Protože T je na, platí

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_X\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU_X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{T(nU_X)}.$$

Z Baireovy věty (Důsledek 15.11) plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $\overline{T(nU_X)}$ má neprázdný vnitřek, tedy obsahuje nějakou kouli $U(x,r)$. Množina $\overline{T(nU_X)}$ je konvexní a symetrická (Fakty 1.44 a 1.21), proto je $U(0,r) \subset \overline{T(nU_X)}$ (Fakt 1.19). Podle Lemmatu 6 ovšem platí $U(0,r) \subset T(nU_X)$, a tedy $U(0,\frac{r}{n}) \subset T(U_X)$.

□

DŮSLEDEK 7 (S. Banach, 1929). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Spojitost T^{-1} plyne z otevřenosti T, tedy z Věty 5.

□

FAKT 8. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Definujme $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$. Pak $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, $\widehat{T}$ je prosté a $T = \widehat{T} \circ q$, kde $q\colon X \to X/\operatorname{Ker} T$ je kanonické kvocientové zobrazení.*

DŮKAZ. Je-li $\widehat{x} = \widehat{y}$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} T$, a tedy $T(x) = T(y)$. Proto je $\widehat{T}$ dobře definované lineární zobrazení. Vzorec $T = \widehat{T} \circ q$ je jen přeformulovaná definice $\widehat{T}$. Díky Tvrzení 1.71 a Lemmatu 1.46(b) je $\sup_{z \in U_{X/\operatorname{Ker} T}} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{z \in q(U_X)} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{x \in U_X} \|\widehat{T} \circ q(x)\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| = \|T\|$. Tedy $\widehat{T}$ je spojité (Tvrzení 1.45) a $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ (Lemma 1.46(b)). Konečně, je-li $\widehat{x} \in \operatorname{Ker} \widehat{T}$, pak $x \in \operatorname{Ker} T$, což znamená, že $\widehat{x} = 0$, a tedy $\widehat{T}$ je prosté.

□

DŮSLEDEK 9. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

(b) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \le c\|y\|$.

DŮKAZ. (a) Zjevně $\widehat{T}$ je na. Tvrzení tedy plyne z Faktu 8 a Důsledku 7.

(b) Dle (a) je $\widehat{T}^{-1}$ spojitý. Stačí vzít $c = 2\|\widehat{T}^{-1}\|$. Vskutku, nechť $y \in Y$. Protože $\widehat{T}^{-1}(y) \in X/\operatorname{Ker} T$, existuje dle definice kvocientové normy $x \in \widehat{T}^{-1}(y)$ takové, že $\|x\| \le 2\|\widehat{T}^{-1}(y)\| \le 2\|\widehat{T}^{-1}\|\|y\|$. Jelikož $T(x) = \widehat{T}(\widehat{x}) = y$, důkaz je hotov.

□

Jak ukazují následující příklady, předpoklady na úplnost zdrojového i cílového prostoru ve větě o otevřeném zobrazení jsou naprosto podstatné.

PŘÍKLAD 10. Položme $X = c_0$ a uvažujme operátor $T\colon X \to c_0$ definovaný předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n) \in X$. Ihned je vidět, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$. Položme dále $Y = T(X)$. Pak $T\colon X \to Y$ je na, X je úplný, ale ukážeme, že T není otevřené zobrazení. Nejprve si všimněme, že $c_{00} \subset Y$, neboť pro libovolný $y = \sum_{n=1}^{k} y_n e_n \in c_{00}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory, je $T\left(\sum_{n=1}^{k} n y_n e_n\right) = y$. Předpokládejme nyní, že T je otevřené zobrazení. Pak $B(0,r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Protože $c_{00} \subset Y$, je speciálně $z_k = \sum_{n=1}^{k} r e_n \in T(U_X)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Protože T je prostý, jediný prvek, který se zobrazí na z_k, je prvek $\sum_{n=1}^{k} n r e_n \in X$, jehož norma je ovšem rovna $kr > 1$, a tím pádem tento prvek nepatří do U_X. To je spor.

◇

PŘÍKLAD 11. Nechť $Y = (Y, \|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Podle Věty 1.68 existuje na Y norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$. Z důkazu Věty 1.68 je vidět, že můžeme předpokládat, že $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in Y$. Protože normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou ekvivalentní, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset Y$ splňující $\|x_n\|_1 = 1$ a $\|x_n\|_2 > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $X = (Y, \|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T\colon X \to Y$, $T = Id_X$. Pak T je spojitý, neboť $\|T(x)\|_1 = \|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in X$. Zjevně Y je úplný a T je na. Ukážeme sporem, že T není otevřené zobrazení. Předpokládejme, že $B(0,r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Pak $\|r x_k\|_1 = r$, $T^{-1}(r x_k) = \{r x_k\}$, ale $\|r x_k\|_2 > rk > 1$, tedy $r x_k \notin U_X$. To je spor.

◇

DEFINICE 12. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Je-li $f: X \to Y$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory X a Y, pak má uzavřený graf. Vskutku, nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v množině graf f konvergující k $(x, y) \in X \times Y$. Pak $x_n \to x$, a tedy $f(x_n) \to f(x)$. Zároveň ovšem $f(x_n) = y_n \to y$, tedy dle jednoznačnosti limity $y = f(x)$, což znamená, že $(x, y) \in$ graf f. Lineární zobrazení mezi Banachovými prostory mají tu významnou vlastnost, že pro ně platí i opačná implikace:

VĚTA 13 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z poznámky před větou.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že kanonické „projekce“ $P: X \oplus_\infty Y \to X$, $P(x, y) = x$ a $Q: X \oplus_\infty Y \to Y$, $Q(x, y) = y$ jsou spojité lineární operátory, a že zobrazení $S: X \to X \oplus_\infty Y$, $S(x) = (x, T(x))$ je lineární. Proto je $G = \operatorname{graf} T = S(X)$ vektorový podprostor $X \oplus_\infty Y$, který je dle předpokladu uzavřený. Tedy G je Banachův prostor (Tvrzení 1.5(b)). Dále uvažujme zobrazení $\tilde{S}: X \to G$, $\tilde{S} = S$. Pak $\tilde{S}$ je bijekce a $P \restriction_G$ je inverzní k $\tilde{S}$. Zobrazení $P \restriction_G$ je spojité lineární zobrazení, které je prosté a na. Dle Důsledku 7 je jeho inverze $\tilde{S}$ spojitá. Proto je i $T = Q \circ \tilde{S}$ spojité.

□

DŮKAZ VĚTY 1.80(B). Nechť $P_Y: X \to Y$ je projekce příslušná rozkladu $X = Y \oplus Z$. Protože Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X, je to také Banachův prostor, takže díky Větě 13 stačí ukázat, že P_Y má uzavřený graf. Nechť tedy $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v graf P_Y konvergující k $(x, y) \in X \oplus_\infty Y$. Pak $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Dále $x_n - y_n = x_n - P_Y(x_n) \in Z$ (Tvrzení 1.76) a díky uzavřenosti Z tak máme $x - y = \lim(x_n - y_n) \in Z$. Tedy $x = y + (x - y)$, kde $y \in Y$ a $x - y \in Z$, je jednoznačný rozklad x, což znamená, že $y = P_Y(x)$, neboli $(x, y) \in$ graf P_Y.

□

Kapitola 4

Lineární operátory

Velké množství různých problémů (např. lineárních diferenciálních rovnic) lze přirozeně formulovat pomocí abstraktních lineárních operátorů. V této kapitole se tedy budeme zabývat studiem jejich chování. Někdy je užitečné příslušný problém formulovat v tzv. „duální formě“, začneme proto studiem duálních operátorů.

1. Duální operátory

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Abychom zlepšili přehlednost některých komplikovanějších výrazů, které by obsahovaly příliš mnoho závorek, budeme často výrazy typu $T(x)$ zkracovat jako Tx.

DEFINICE 1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*: Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 2 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

VĚTA 2. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*
(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

DŮKAZ. (a) Pro dané $f \in Y^*$ je funkce $x \mapsto f(Tx)$ zjevně lineární a spojitá na X, tudíž se jedná o prvek X^*. Zobrazení $T^*: Y^* \to X^*$ je tedy dobře definované. Snadno je vidět, že T^* je lineární operátor. Dále platí

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|T^* f\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \\ &= \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{Y^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

přičemž předposlední rovnost plyne z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6). Tedy $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(b) Linearita zobrazení $T \mapsto T^*$ se snadno ověří: Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a α je skalár. Zvolme $f \in Y^*$ libovolně. Pak $(S+T)^* f(x) = f\big((S+T)x\big) = f(Sx+Tx) = f(Sx)+f(Tx) = S^* f(x)+T^* f(x) = (S^* f + T^* f)(x)$ a $(\alpha T)^* f(x) = f\big((\alpha T)x\big) = f\big(\alpha(Tx)\big) = \alpha f(Tx) = \alpha\big(T^* f(x)\big) = \big(\alpha(T^* f)\big)(x)$ pro každé $x \in X$, neboli $(S+T)^* f = S^* f + T^* f = (S^* + T^*) f$ a $(\alpha T)^* f = \alpha(T^* f) = (\alpha T^*) f$. Odtud $(S+T)^* = S^* + T^*$ a $(\alpha T)^* = \alpha T^*$. Izometrie pak plyne z (a).

(c) Nechť $f \in Z^*$ je libovolné. Pak pro každé $x \in X$ platí $(S \circ T)^* f(x) = f(S \circ Tx) = f\big(S(Tx)\big) = S^* f(Tx) = T^*(S^* f)(x)$, tedy $(S \circ T)^* f = T^*(S^* f) = (T^* \circ S^*) f$. Odtud $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Konečně, pro $f \in X^*$ a $x \in X$ máme $Id_X^* f(x) = f(Id_X x) = f(x) = Id_{X^*} f(x)$.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = \mathbb{K}^n$ a $Y = \mathbb{K}^m$ s libovolnými normami a nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Z lineární algebry víme, že T je reprezentován jistou maticí $A \in M(m \times n)$ tak, že $T(x) = Ax$ pro $x \in \mathbb{K}^n$. Zkoumejme, jak vypadá duální operátor $T^*: Y^* \to X^*$. Použijeme-li standardní reprezentaci duálu z lineární algebry spolu s Větou 1.68, pak $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, přičemž $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ a analogicky pro Y^*. V této reprezentaci je tedy $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Nechť $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$. Pro každé $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$\begin{aligned} T^* f(x) &= f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m f_j (Ax)_j = \sum_{j=1}^m f_j \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} f_j \right) x_k = \sum_{k=1}^n (A^{\mathrm{T}} f)_k x_k = (A^{\mathrm{T}} f) x, \end{aligned}$$

kde A^{T} je matice transponovaná k matici A. Tedy $T^*(f) = A^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí A^{T}.

Je-li na X a Y eukleidovská norma, pak X a Y jsou Hilbertovy prostory. Vedle reprezentace duálů použité výše tedy máme k dispozici ještě reprezentaci z Věty 1.122 (která se v komplexním případě liší). Podívejme se, jak vypadá T^* v této reprezentaci. Opět je $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, ale $f(x) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ (a analogicky pro Y^*). Pro $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ v této reprezentaci tedy pro každé $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$ a $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$\begin{aligned} T^* f(x) &= f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} (Ax)_j = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \overline{f_j} \right) x_k = \sum_{k=1}^n \overline{\left(\sum_{j=1}^m \overline{a_{jk}} f_j \right)} x_k = \sum_{k=1}^n \overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}} f)_k} x_k = (\overline{A}^{\mathrm{T}} f) x, \end{aligned}$$

kde $\overline{A}^{\mathrm{T}} = (\overline{a_{kj}})$ pro $A = (a_{jk})$. Tedy $T^*(f) = \overline{A}^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

◇

VĚTA 4. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.
(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \;\Leftrightarrow\; T^* f = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X\colon T^* f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X\colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in (\operatorname{Rng} T)^\perp.$$

Tvrzení (b) dokážeme obdobně, přičemž pro druhou ekvivalenci používáme Hahnovu-Banachovu větu (Důsledek 2.5):

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^*\colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^*\colon (T^* f)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^*)_\perp.$$

(c) Díky (a) a Lemmatu 2.12(c) platí $(\operatorname{Ker} T^*)_\perp = \big((\operatorname{Rng} T)^\perp\big)_\perp = \overline{\operatorname{Rng} T}$.

(d) Díky (b) a Lemmatu 2.12(d) platí $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \big((\operatorname{Rng} T^*)_\perp\big)^\perp \supset \overline{\operatorname{Rng} T^*}$.

(e) Díky (d) stačí dokázat inkluzi $(\operatorname{Ker} T)^\perp \subset \operatorname{Rng} T^*$. Nechť $f \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$ je dáno. Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Rng} T$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je dle Důsledku 3.9(a) lineárním izomorfismem, a tedy k němu existuje inverze $\widehat{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} T, X/\operatorname{Ker} T)$. Pro $y \in \operatorname{Rng} T$ položme $g(y) = I(f)(\widehat{T}^{-1} y)$, kde $I\colon (\operatorname{Ker} T)^\perp \to (X/\operatorname{Ker} T)^*$ je identifikace z Věty 2.22(a). Pak $g \in (\operatorname{Rng} T)^*$ a podle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho rozšíření $\tilde{g} \in Y^*$. Tvrdíme, že $T^* \tilde{g} = f$. Nejprve si všimněme, že pro každé $x \in X$ platí $\widehat{T}^{-1}(Tx) = \widehat{x}$. Proto $T^* \tilde{g}(x) = \tilde{g}(Tx) = g(Tx) = I(f)\big(\widehat{T}^{-1}(Tx)\big) = I(f)(\widehat{x}) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

Poznamenejme, že „správné znění“ tvrzení (d) uvedeme v oddílu 6.9 (Věta 6.113).

TVRZENÍ 5 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Ztotožníme-li prostory X, Y s jejich kanonickými vnořeními v X^{**}, Y^{**}, pak výše uvedené tvrzení neformálně říká, že $T = T^{**}\restriction_X$.

DŮKAZ. Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^*f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^*f) = \bigl(T^{**}(\varepsilon_X(x))\bigr)(f),$$

tedy $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$.

□

VĚTA 6. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
(a) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*
(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.

Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 4(c) je $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$. Je-li tedy T^* prostý, pak $\overline{\operatorname{Rng} T} = \{0\}_\perp = Y$. Na druhou stranu, je-li $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y, pak $\operatorname{Ker} T^* \subset \bigl((\operatorname{Ker} T^*)_\perp\bigr)^\perp = Y^\perp = \{0\}$ dle Lemmatu 2.12(d).

(b) Podle Věty 2(c) je $T^* \circ (T^{-1})^* = (T^{-1} \circ T)^* = Id_X^* = Id_{X^*}$ a $(T^{-1})^* \circ T^* = (T \circ T^{-1})^* = Id_Y^* = Id_{Y^*}$. To znamená, že $(T^{-1})^*$ je inverzním operátorem k T^*, a tedy T^* je izomorfismus na.

(c) Pro $f \in Y^*$ máme $\|T^*f\| = \sup_{x \in B_X}|T^*f(x)| = \sup_{x \in B_X}|f(Tx)| = \sup_{y \in B_Y}|f(y)| = \|f\|$. Z (b) pak plyne, že T^* je na.

Nechť nyní X je úplný. Je-li T^* izomorfismus na, pak dle (b) je T^{**} též izomorfismus na. Podle Tvrzení 5 je tedy T složením izomorfismů do, proto je to izomorfismus do (Fakt 1.63). Je tedy $\operatorname{Rng} T$ uzavřený v Y (Tvrzení 1.62(c)). Podle (a) to ovšem znamená, že T je na. Je-li T^* navíc izometrie, pak dle (c) je T^{**} též izometrie. Z Tvrzení 5 a Faktu 1.63(b) plyne, že i T je izometrie.

□

2. Kompaktní operátory

Ukazuje se, že mnoho operátorů vyskytujících se při studiu různých problémů (např. diferenciálních rovnic) vykazuje jisté shodné rysy – jsou to tzv. kompaktní operátory. Analýza chování těchto operátorů je jednodušší, neboť tyto operátory mají mnohé vlastnosti podobné vlastnostem konečněrozměrných operátorů (matic), vizte roli kompaktnosti v oddílu 1.4.

Nechť X je metrický prostor. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá relativně kompaktní v X, pokud $\overline{M}$ je kompaktní, a že M je relativně kompaktní v X, právě když z každé posloupnosti prvků M lze vybrat podposloupnost konvergující v X. Je-li X úplný, pak M je relativně kompaktní v X, právě když je totálně omezená. Je-li Y metrický prostor takový, že X je jeho podprostor a M je relativně kompaktní v X, pak M je i relativně kompaktní v Y.

PŘÍKLAD 7 (Hilbertova krychle). Položme

$$Q = \bigl\{x = (x_n) \in \ell_2;\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

Pak Q je kompaktní podmnožina ℓ_2: Platí, že $Q = \bigcap_{n=1}^\infty \bigl\{x \in \ell_2;\ |f_n(x)| \le \frac{1}{n}\bigr\}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, proto je Q je uzavřená podmnožina ℓ_2. Stačí tedy ukázat, že je totálně omezená.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, a tedy $\sum_{n=m+1}^\infty |x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ pro každé $x \in Q$. Označme $R\colon \ell_2 \to \mathbb{K}^m$ restrikci na prvních m souřadnic, tj. $R(x) = (x_n)_{n=1}^m$ pro

$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, a všimněme si, že $\|R(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ pro každé $x \in \ell_2$. Speciálně, $\|R(x)\|_2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < +\infty$ pro $x \in Q$. Čili množina $R(Q)$ je omezená v prostoru $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, tedy je tam totálně omezená a existuje k ní konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť $A \subset \mathbb{K}^m$. Rozšiřme vektory z A zpět do ℓ_2 pomocí nulových souřadnic: položíme $\tilde{A} = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ R(x) \in A \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n > m\}$. Pak $\tilde{A}$ je konečná množina a tvrdíme, že tvoří ε-síť pro Q. Nechť tedy $x \in Q$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $\|R(x) - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $z \in \tilde{A}$ je takový, že $R(z) = y$. Pak

$$\|x - z\|_2 = \left(\|R(x) - R(z)\|_2^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

◇

DEFINICE 8. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tradičně se též používají poněkud nekonzistentní zkratky $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$ a $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

TVRZENÍ 9. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.
(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.
(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ. Je-li $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, je $T(B_X)$ relativně kompaktní, a tedy omezená. Tudíž T je spojitý dle Tvrzení 1.45.

Nechť nyní $T\colon X \to Y$ je lineární. (i)⇒(ii) je zřejmá.

(ii)⇒(iii) Je-li $r > 0$ takové, že $\{x_n\} \subset B(0, r)$, pak $\{\frac{1}{r}x_n\} \subset B_X$. Protože $\{T(\frac{1}{r}x_n)\} \subset T(B_X)$, existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $\{T(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní. Pak ovšem i $\{T(x_{n_k})\} = \{rT(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní.

(iii)⇒(i) Nechť $A \subset X$ je omezená a $\{y_n\}$ je posloupnost v $T(A)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $y_n = T(x_n)$. Tedy $\{x_n\}$ je omezená a dle předpokladu lze z $\{y_n\} = \{T(x_n)\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. To znamená, že $T(A)$ je relativně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 10. Definujme $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n)$. Snadno je vidět, že T je lineární operátor. Protože $T(B_{\ell_2}) \subset Q$, kde Q je Hilbertova krychle (Příklad 7), je T kompaktní dle Tvrzení 9. Nicméně T není konečněrozměrný, neboť $T(\ell_2)$ obsahuje lineárně nezávislou množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů.

Na druhou stranu, identita na ℓ_2 je příkladem spojitého lineárního operátoru, který není kompaktní, neboť obraz jednotkové koule obsahuje množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů, která je $\sqrt{2}$-separovaná (tj. $\|e_k - e_n\| \geq \sqrt{2}$ pro $k \neq n$), takže není relativně kompaktní.

◇

Uvědomme si, že lineární operátor T můžeme chápat jako lineární zobrazení do libovolného nadprostoru $\operatorname{Rng} T$. Kompaktnost lineárního operátoru ovšem může zásadně záviset na tom, jaký cílový prostor bereme, neboť v definici se bere uzávěr $T(A)$ v cílovém prostoru, a pro různé prostory můžeme dostat různé uzávěry. Vizte též následující tvrzení.

TVRZENÍ 11. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

DŮKAZ. (a) Pro $A \subset X$ omezenou je $T(A)$ relativně kompaktní v Y, a tedy i relativně kompaktní v Z.

(b) Nechť $A \subset X$ je omezená. Protože Z je uzavřený v Y, je množina $\overline{T(A)}^Z = Z \cap \overline{T(A)}^Y$ uzavřená v Y, a tedy $\overline{T(A)}^Z = \overline{T(A)}^Y$. Proto je $\overline{T(A)}^Z$ kompaktní.

□

VĚTA 12. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.
(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.
(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.
(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.
(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Všimněme si, že poslední tvrzení nám říká, že „netriviální“ (tj. nikoli konečněrozměrné) kompaktní lineární operátory mezi Banachovými prostory nemají nikdy uzavřený Rng.

DŮKAZ. (a) $\Leftarrow$ je zřejmá, neboť v tom případě $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$.

$\Rightarrow$ Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je nějaká báze $\operatorname{Rng} T$. Definujme lineární formy $g_1, \dots, g_n$ na $\operatorname{Rng} T$ hodnotami na bázi následovně:

$$g_i(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Protože $\operatorname{Rng} T$ je konečněrozměrný, jsou $g_1, \dots, g_n$ spojité lineární funkcionály (Věta 1.68). Všimněme si, že pro každý prvek $y \in \operatorname{Rng} T$ platí

$$y = \sum_{i=1}^n g_i(y) y_i.$$

Vskutku, máme-li $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ pro nějaké skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, pak $g_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_j(y_i) = \alpha_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. Položme $f_i = g_i \circ T \in X^*$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(T(x)) y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$.

(b) Kompaktní lineární operátory jsou spojité, je tedy $\mathcal{K}(X, Y)$ podmnožinou $\mathcal{L}(X, Y)$. Jsou-li $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ pak $(S + T)(B_X) \subset S(B_X) + T(B_X) \subset \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, přičemž množina vpravo je kompaktní dle Tvrzení 1.23. Tedy $(S+T)(B_X)$ je relativně kompaktní v Y, což znamená, že $S+T$ je kompaktní operátor (Tvrzení 9). Podobně, pro α skalár a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ je $\overline{(\alpha T)(B_X)} = \alpha \overline{T(B_X)}$, tedy je to kompakt, neboť je to spojitý obraz kompaktu $\overline{T(B_X)}$ (Tvrzení 1.2(c)). Opět díky Tvrzení 9 je tak operátor αT kompaktní. To dokazuje, že $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostorem $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dále, nechť $S, T \in \mathcal{F}(X, Y)$ a $\alpha \neq 0$ je skalár. Pak $\operatorname{Rng}(S+T) \subset \operatorname{Rng} S + \operatorname{Rng} T$ a $\operatorname{Rng}(\alpha T) = \operatorname{Rng} T$, tedy $\operatorname{Rng}(S + T)$ i $\operatorname{Rng}(\alpha T)$ jsou konečněrozměrné. Konečně, $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y (Důsledek 1.25), takže $\overline{T(B_X)} \subset \operatorname{Rng} T$. Množina $\overline{T(B_X)}$ je tedy omezená uzavřená podmnožina konečněrozměrného prostoru, takže je kompaktní (Věta 1.68). Proto je $\mathcal{F}(X, Y)$ podprostorem $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X, Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že $\{T_n(x_1), \dots, T_n(x_k)\}$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. Ukážeme, že $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$ je konečná ε-síť pro $T(B_X)$. Pro $x \in B_X$ totiž nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|T_n(x) - T_n(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|T(x)-T(x_i)\| \leq \|T(x)-T_n(x)\|+\|T_n(x)-T_n(x_i)\|+\|T_n(x_i)-T(x_i)\| < \|T-T_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T_n-T\| < \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, je T kompaktní dle Tvrzení 9.

(d) Nechť Z je normovaný lineární prostor, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Pak $S(B_X)$ je omezená, a tedy $T \circ S(B_X) = T(S(B_X))$ je relativně kompaktní, neboli $T \circ S \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Obráceně, nechť $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Položme $A = T(B_X)$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní, tedy $S(\overline{A})$ je také kompaktní. Proto je $S \circ T(B_X) = S(A) \subset S(\overline{A})$ relativně kompaktní, což znamená, že $S \circ T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

(e) Označme $Z = \operatorname{Rng} T$. Pak Z je uzavřený podprostor Y, tedy je Banachův a podle věty o otevřeném zobrazení (Věta 3.5) je $T\colon X \to Z$ otevřené zobrazení. Relativně kompaktní množina $T(B_X)$ tedy obsahuje $B_Z(0,r)$ pro nějaké $r > 0$, což znamená, že $B_Z(0,r)$, a tedy i $B_Z = \frac{1}{r}B_Z(0,r)$, je kompaktní (Věta 1.2(c)). Díky Větě 1.68 tedy platí, že $\dim \operatorname{Rng} T = \dim Z < \infty$.

□

VĚTA 13 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f\restriction_K;\ f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí $\|f\restriction_K\|_{C(K)} = \sup_{y\in K}|f(y)| = \sup_{y\in T(B_X)}|f(y)| = \sup_{x\in B_X}|f(T(x))| \leq \|f\|\|T\| \leq \|T\|$. Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty[1] to znamená, že $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Položme $g_n = f_n\restriction_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$, a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^* f_{n_k}\}$ je cauchyovská: Pro $k,l \in \mathbb{N}$ máme

$$\|T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}\| = \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x\in B_X}\left|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)\right| = \sup_{x\in B_X}|(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \leq$$
$$\leq \sup_{z\in K}|(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}.$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^* f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^*. Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*.

$\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je T^{**} kompaktní, takže je kompaktní i $T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}\colon \varepsilon_X(X) \to Y^{**}$. Označme $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} (Tvrzení 2.26), tedy $S \in \mathcal{K}(\varepsilon_X(X), \varepsilon_Y(Y))$ dle Tvrzení 11(b). Označíme-li tedy $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, pak podle Tvrzení 5 a Věty 12(d) je $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní.

□

Poznamenejme, že z důkazu je vidět, že implikace $\Leftarrow$ v předchozí větě platí i pro Y neúplný.

PŘÍKLAD 14. Nechť $K \in L_2([0,1]^2)$. Ukážeme, že operátor $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definovaný předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

je kompaktní lineární operátor. Takovýto operátor se nazývá integrální operátor. Funkce K se nazývá jádro integrálního operátoru.

Nejprve si uvědomme, že je-li $f \in L_2([0,1])$, pak díky Fubiniově větě[2] patří funkce $(t,s) \mapsto f(s)$ do $L_2([0,1]^2)$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že funkce $(t,s) \mapsto K(t,s)f(s)$ patří do $L_1([0,1]^2)$. Podle Fubiniovy věty je tedy pro s. v. $t \in [0,1]$ hodnota $Tf(t)$ dobře definována a funkce Tf je měřitelná. Dále,

[1] Pro $C([0,1])$ dokázal postačující podmínku pro relativní kompaktnost (v jiném jazyce) Giulio Ascoli (1883), že je to podmínka nutná ukázal Cesare Arzelà (1889).

[2] Guido Fubini (1907)

opět s využitím Hölderovy nerovnosti a Fubiniovy věty, je

$$\begin{aligned}\int_0^1 |Tf(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \le \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2\|K\|^2.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $Tf \in L_2([0,1])$. Ihned je vidět, že T je lineární operátor, a nerovnost výše implikuje, že T je spojitý a $\|T\| \le \|K\|$. Níže ukážeme, že T je kompaktní.

Nejprve předpokládejme, že jádro K je spojité. Ukážeme, že pak T zobrazuje do $C([0,1])$ a je to kompaktní operátor z $L_2([0,1])$ do $C([0,1])$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti K plyne existence $\delta > 0$ takového, že $|K(t,s) - K(u,s)| < \varepsilon$ kdykoli $s,t,u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$. Pak pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolná $t,u \in [0,1]$ splňující $|t-u| < \delta$ platí

$$\begin{aligned}|Tf(t) - Tf(u)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 K(u,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |K(t,s) - K(u,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \int_0^1 \varepsilon|f(s)|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} = \varepsilon\|f\|_2 \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $Tf \in C([0,1])$. Navíc jsme ukázali, že $T(B_{L_2([0,1])})$ je stejně spojitá podmnožina $C([0,1])$. Protože pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolné $t \in [0,1]$ platí

$$|Tf(t)| \le \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \int_0^1 \|K\|_\infty |f(s)|\,\mathrm{d}s \le \|K\|_\infty \left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \le \|K\|_\infty,$$

je množina $T(B_{L_2([0,1])})$ omezená v $C([0,1])$. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty je tedy $T(B_{L_2([0,1])})$ relativně kompaktní v $C([0,1])$.

Nechť dále $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $L_2([0,1])$. Pak z ní lze vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní v $C([0,1])$, neboli stejnoměrně konvergentní. Protože míra $[0,1]$ je konečná, plyne odtud, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní i v prostoru $L_2([0,1])$. Ukázali jsme tedy, že pokud jádro K je spojité, pak je operátor $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ kompaktní (Tvrzení 9).

Konečně, nechť jádro K je obecné. Pak dle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje posloupnost spojitých funkcí $\{K_n\} \subset C([0,1]^2)$ takových, že $\|K_n - K\|_2 \to 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor $T_n\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ předpisem $T_n f(t) = \int_0^1 K_n(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$. Pak podle předchozí části jsou operátory T_n kompaktní. Máme $(T_n - T)f = \int_0^1 \big(K_n(t,s) - K(t,s)\big)f(s)\,\mathrm{d}s$, tedy operátor $T_n - T$ je integrální operátor s jádrem $K_n - K$. Na začátku jsme si spočetli, že pro takovéto operátory platí $\|T_n - T\| \le \|K_n - K\|_2$, odkud plyne, že $T_n \to T$ v prostoru $\mathcal{L}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$. Jeho podprostor $\mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$ je ovšem uzavřený (Věta 12(c)), tedy $T \in \mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$.

◇

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů[3]

Vlastní čísla čtvercové matice nesou v řadě otázek klíčovou informaci ke zjištění chování matice, zajímají nás např. při hledání Jordanova kanonického tvaru matice. Pro obecné operátory je nutné tento pojem

[3]Tato teorie se zabývá řešením lineárních rovnic $T(x) = y$ pro jistou třídu lineárních operátorů T. Základy položil Erik Ivar Fredholm (1903), který se zabýval integrálními rovnicemi souvisejícími s operátorem z Příkladu 14. Moderní obecnou formu této teorii dal F. Riesz (1916), kterému ovšem chyběla Hahnova-Banachova věta, takže o záležitosti vyžadující dualitu ji doplnil J. P. Schauder (1930). Proto se tato teorie někdy nazývá Rieszova-Schauderova teorie.

poněkud rozšířit (tzv. spektrum[4]), ale i v této situaci se jedná o zásadní informaci pro zkoumání vlastností daného operátoru. Pro kompaktní operátory pak dostáváme Fredholmovy věty 24, 30 a 31, které ukazují, že kompaktní operátory se chovají podobným způsobem jako matice.

Nechť X je normovaný lineární prostor. V tomto oddílu se budeme zabývat studiem operátorů z $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, kterým budeme říkat operátory na X. Označíme-li $O\colon X \to X$, $O(x) = 0$ a $I = Id_X$, pak snadno nahlédneme, že $(\mathcal{L}(X), +, -, \circ, O, I)$, kde za operaci násobení $\circ$ bereme skládání operátorů, tvoří (nekomutativní) okruh s jednotkou. (Distributivita zleva platí díky linearitě operátorů z $\mathcal{L}(X)$.) V dalším bude I (případně I_X) vždy značit identitu na příslušném prostoru (na prostoru X).

Podívejme se nyní blíže na invertovatelné prvky (vzhledem k násobení, neboli skládání) okruhu $\mathcal{L}(X)$. Prvek $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný, právě když k němu existuje inverzní prvek $S \in \mathcal{L}(X)$, tj. prvek splňující $T \circ S = I$ a $S \circ T = I$. Z první rovnosti plyne, že T je nutně na, zatímco ze druhé rovnosti plyne, že T je prostý. Dohromady pak dostáváme, že S je inverzním zobrazením k bijekci T. Vidíme tedy, že T je invertovatelný, právě když je to bijekce a inverzní zobrazení T^{-1} je prvkem $\mathcal{L}(X)$. Inverzní zobrazení k lineárnímu je ovšem automaticky lineární, stačí tedy testovat pouze spojitost inverzního zobrazení T^{-1}. (Vidíme též, že algebraické značení inverzního prvku k T v okruhu $\mathcal{L}(X)$ jako T^{-1} není v kolizi se značením pro inverzní zobrazení.) Podle dřívějších definic je tedy T invertovatelným prvkem v $\mathcal{L}(X)$, právě když T je izomorfismus X na X. Pro Banachovy prostory je ovšem každá bijekce izomorfismem (Důsledek 3.7). Dostáváme tedy následující tvrzení:

TVRZENÍ 15. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.*

Připomeňme ještě, že invertovatelné prvky v okruhu tvoří grupu, tj. jsou-li $S, T \in \mathcal{L}(X)$ invertovatelné, pak i $S \circ T$ je invertovatelný a $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Poznamenejme nakonec, že z Věty 12 plyne, že $\mathcal{K}(X)$ tvoří ideál v $\mathcal{L}(X)$.

DEFINICE 16. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Je-li X Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$, pak $\lambda I - T$ není invertovatelný, právě když $\lambda I - T$ není prostý nebo není na (Tvrzení 15). Tedy λ je ve spektru T, právě když rovnice $T(x) - \lambda x = 0$ má více řešení nebo rovnice $T(x) - \lambda x = y$ nemá řešení pro nějakou pravou stranu $y \in X$.

Následující větu si dokážeme až v oddílu 10.2 (Věty 10.40 a 10.51(b)). Důkaz neprázdnosti vyžaduje netriviální znalosti z komplexní analýzy.

VĚTA 17. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní a netriviální, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

PŘÍKLAD 18. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $P \in \mathcal{L}(X)$ je netriviální projekce (tj. $P \neq 0$ a $P \neq I$). Pak $\sigma(P) = \sigma_{\mathrm{p}}(P) = \{0, 1\}$. Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ je $(\lambda I - P)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P$.

Vskutku, jelikož $P \neq I$, podprostor $\operatorname{Ker} P$ je nenulový, a tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Dále $I - P$ je netriviální projekce, a tedy $\operatorname{Ker}(I - P)$ je nenulový, neboli $1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Nechť nyní $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Předpokládejme, že $(\lambda I - P) \circ T = I$. Pak $\lambda T - P \circ T = I$, takže $P \circ T = \lambda T - I$. Dále $P = P \circ I = P \circ (\lambda I - P) \circ T = (\lambda P - P) \circ T = (\lambda - 1) P \circ T = (\lambda - 1)(\lambda T - I)$. Odtud plyne, že $T = \frac{1}{\lambda}\bigl(\frac{1}{\lambda-1} P + I\bigr)$. Pro takto definované T je pak $(\lambda I - P) \circ T = \frac{1}{\lambda-1} P + I - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P - \frac{1}{\lambda} P = I$ a podobně $T \circ (\lambda I - P) = I$.

$\diamond$

Následující dvě tvrzení mohou být užitečná při výpočtu spekter některých konkrétních operátorů.

[4]Tento pojem pravděpodobně pochází z Hilbertova studia lineárních integrálních rovnic (1906).

LEMMA 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(T)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na T^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \notin \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\lambda I - T$ je invertovatelný. Položíme-li $S = \left(\frac{1}{\lambda} I - T^{-1}\right) \circ T$, pak $S = \frac{1}{\lambda} T - I = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$, a tedy S je invertovatelný. Proto je invertovatelný i operátor $S \circ T^{-1} = \frac{1}{\lambda} I - T^{-1}$. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(T^{-1})$.

□

TVRZENÍ 20. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.*

DŮKAZ. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$. Pak $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}) \subset B(0, \|T^{-1}\|)$ dle Lemmatu 19 a Věty 17. Tedy $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \|T^{-1}\|$, neboli $|\lambda| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Druhá nerovnost plyne přímo z Věty 17.

□

VĚTA 21. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

DŮKAZ. Podle Věty 2 je $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$, a tedy podle Věty 6 je $\lambda I_{X^*} - T^*$ invertovatelný, právě když $\lambda I_X - T$ je invertovatelný.

□

Poznamenejme, že na neúplném prostoru platí pouze $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$.

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$. Předpokládejme, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak operátor $-T = 0I - T$ je invertovatelný, a tedy i T je invertovatelný. Podle Věty 12(d) to znamená, že $I = T^{-1} \circ T$ je kompaktní operátor. Tedy $B_X = I(B_X)$ je kompaktní podmnožina X. To je spor s předpokladem, že $\dim X = \infty$ (Věta 1.68).

Nechť nyní $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$. Dle známé věty z lineární algebry platí, že $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Rng} T = \dim X$, a tedy $\dim \operatorname{Ker} T > 0$. To znamená, že $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

□

VĚTA 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Označme $Y = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pak $T = \lambda I$ na Y, a tedy $\lambda B_Y = T(B_Y)$ je relativně kompaktní množina v X. Protože ovšem Y je uzavřený v X, je λB_Y uzavřená v X, a tedy kompaktní v Y. Z Věty 1.68 potom plyne, že $\dim Y < \infty$.

Dále, podle Věty 2.8(a) existuje Z uzavřený podprostor X takový, že $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$. Označme $S = (\lambda I - T)\restriction_Z$ a všimněme si, že S je prostý: Je-li $S(x) = 0$ pro $x \in Z$, pak $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = Y$, tedy $x = 0$. Dále pro každé $x \in X$ máme $(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)(P_Y x + P_Z x) = (\lambda I - T)(P_Z x) = S(P_Z x)$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = S(Z) = \operatorname{Rng} S$. Ukážeme, že S je izomorfismus do.

Pokud S není izomorfismus do, pak z Tvrzení 1.62(a) plyne existence posloupnosti $\{x_n\} \in S_Z$ takové, že $S(x_n) \to 0$. Protože T je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $T(x_{n_k}) \to x$ pro nějaké $x \in X$. Pak ovšem také $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to 0 + x = x$. Odtud plyne, že $\frac{x}{\lambda} \in S_Z$, neboť Z je uzavřený. Díky tomu máme $S(x_{n_k}) \to S(\frac{x}{\lambda})$, což znamená, že $S(\frac{x}{\lambda}) = 0$. To je ale ve sporu s prostotou S.

Je-li tedy X úplný, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = \operatorname{Rng} S$ je uzavřený dle Tvrzení 1.62(c).

□

VĚTA 24 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Tvrzení věty lze interpretovat následujícím způsobem: Rovnice $(\lambda I - T)x = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in X$, právě když příslušná homogenní rovnice $(\lambda I - T)x = 0$ má pouze triviální řešení. Protože na konečněrozměrném prostoru je každý lineární operátor kompaktní, lze každý lineární operátor na konečněrozměrném prostoru zapsat ve tvaru $I - T$, T kompaktní. Fredholmova alternativa je tedy zobecněním známé věty o řešitelnosti soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Označme $S = \lambda I - T$ a předpokládejme, že S není na. Nejprve si všimněme následujícího pozorování: Nechť A je libovolná množina a $f: A \to A$ je prosté zobrazení, které není na. Označíme-li $B = f(A) \subsetneqq A$, pak $f\restriction_B : B \to B$ je opět prosté zobrazení, které není na. Vskutku, $f(B) \subset f(A) = B$, tedy $f\restriction_B$ zobrazuje do B. Dále, je-li $f\restriction_B : B \to B$ na, pak $f(B) = f\restriction_B(B) = B = f(A)$, tedy z prostoty f plyne $A = B$, což je spor.

Aplikujme nyní toto pozorování iterativně na S: Položme $X_0 = X$ a $X_n = \operatorname{Rng} S\restriction_{X_{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 23 je $\operatorname{Rng} S$ Banachův, takže S je izomorfismus do (Důsledek 3.7). Tedy i restrikce S na libovolný podprostor X je izomorfismus do, odkud indukcí plyne, že každý podprostor X_n je uzavřený v X (Tvrzení 1.62(c)). Dále díky pozorování výše indukcí obdržíme, že $X_n \subsetneqq X_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že to je ve sporu s kompaktností T.

Pro každé $n \geq 0$ existuje $x_n \in S_{X_n}$ splňující $\operatorname{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ (Lemma 1.65). Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ máme $T(x_m) - T(x_n) = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m - \lambda x_n$. Protože $S(x_n) \in X_{n+1}$ a $S(x_m) \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$, je $u = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m \in X_{n+1}$. Proto

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} - x_n \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{T(x_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

$\Rightarrow$ Z Vět 2 a 6(a) plyne, že operátor $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$ je prostý. Podle Schauderovy věty (Věta 13) je T^* kompaktní, takže podle první části důkazu je $\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = X^*$. Věta 4(b) pak dává

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \Big(\operatorname{Rng}\big((\lambda I_X - T)^*\big)\Big)_\perp = \big(\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp = (X^*)_\perp = \{0\},$$

tedy $\lambda I_X - T$ je prostý.

□

Poznamenejme, že z důkazu (s využitím poznámky za Větou 13) je vidět, že implikace $\Rightarrow$ v předchozí větě platí i pro neúplný prostor X.

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

DŮKAZ. Je-li $\lambda \notin \sigma_p(T)$, pak $\lambda I - T$ je prostý. Je-li navíc $\lambda \neq 0$, pak z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I - T$ je bijekce. Podle Tvrzení 15 to znamená, že $\lambda I - T$ je invertovatelný, a tedy $\lambda \notin \sigma(T)$.

□

LEMMA 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ jsou různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou k nim příslušející vlastní vektory. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jsou skaláry splňující $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = 0$. Pak $0 = T\big(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\big) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k$, a tedy

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k.$$

Díky indukčnímu předpokladu platí, že $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Tím pádem i $\alpha_{n+1} = 0$.

□

VĚTA 27. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

DŮKAZ. Zvolme $r > 0$. Předpokládejme, že množina $\{\lambda \in \sigma(T);\ |\lambda| > r\}$ je nekonečná. Pak v ní podle Důsledku 25 existuje posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzájem různých vlastních čísel. Nechť $\{x_n\}$ jsou k nim příslušné vlastní vektory. Položme $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky Lemmatu 26 platí $X_n \subsetneqq X_{n+1}$ a X_n je uzavřený v X_{n+1} (Důsledek 1.25). Podle Rieszova lemmatu (Lemma 1.65) existují $z_n \in S_{X_n}$ takové, že $\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Tvrdíme, že platí $T(z_n) \in X_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) \in X_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Vskutku, nechť $z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ pro nějaká $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Pak $T(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \in X_n$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in X_{n-1}$. Pak pro libovolná $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ máme $\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k) \in X_{m-1}$, a tedy

$$\begin{aligned}\|T(z_m) - T(z_k)\| &= \left\|\lambda_m z_m - \big(\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k)\big)\right\| \geq \\ &\geq \operatorname{dist}(\lambda_m z_m, X_{m-1}) = |\lambda_m| \operatorname{dist}(z_m, X_{m-1}) \geq r\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{T(z_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

□

Zkombinujeme-li Tvrzení 22, Větu 27, Důsledek 25 a Větu 23, obdržíme následující shrnutí:

DŮSLEDEK 28. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní prostor.*

Na druhou stranu, následující příklad ukazuje, že pro nekompaktní operátory může spektrum vypadat téměř jakkoli.

PŘÍKLAD 29. Nechť $R\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2)$ je izometrické vnoření z Příkladu 1.61 (všechny prostory jsou nad $\mathbb{K}$). Pak pro každé $y \in \ell_\infty$ je $\sigma_{\mathrm{p}}(R(y)) = \operatorname{Rng} y = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(R(y)) = \overline{\operatorname{Rng} y}$. Dále je $R(c_0) \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Odtud plyne, že pro každou $K \subset \mathbb{K}$ neprázdnou kompaktní existuje $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ takový, že $\sigma(T) = K$, a pro každou posloupnost $\{y_n\} \subset \mathbb{K}$ konvergující k 0 existuje $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$ takový, že $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Vskutku, je-li $y \in \ell_\infty$, pak zjevně $y_n \in \sigma_{\mathrm{p}}(T_y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť $T_y(e_n) = y_n e_n$. Na druhou stranu, pokud $\lambda \notin \operatorname{Rng} y$, pak rovnice $T_y(x) = \lambda x$, neboli $(y_n x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}$, nemá nenulové řešení v ℓ_2. Dále, jelikož $\sigma(T_y)$ je uzavřená množina (Věta 17), platí $\overline{\operatorname{Rng} y} = \overline{\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T_y)$. Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\operatorname{Rng} y}$ pak $v = \left(\frac{1}{\lambda - y_n}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Označíme-li $u = (\lambda - y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, pak $T_v \circ T_u = T_u \circ T_v = I$, a tedy $T_u = \lambda I - T_y$ je invertovatelný. Tedy $\lambda \notin \sigma(T_y)$, z čehož plyne inkluze $\sigma(T_y) \subset \overline{\operatorname{Rng} y}$.

Dále snadno nahlédneme, že $R(c_{00}) \subset \mathcal{F}(\ell_2)$, odkud dle Věty 12(b), (c) plyne, že $R(c_0) \subset \overline{\mathcal{F}(\ell_2)} \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Konečně, je-li $K \subset \mathbb{K}$ neprázdná kompaktní, pak existuje spočetná hustá množina $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v K. Pak pro $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ je $\sigma(T_y) = \overline{\operatorname{Rng} y} = K$.

◇

Z Vět 23, 4 a 2 okamžitě plyne následující tvrzení, které popisuje, jak nalézt prostor všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, pomocí prostoru řešení příslušné adjungované (duální) homogenní rovnice.

VĚTA 30 (Druhá Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Poslední věta popisuje vztahy mezi velikostmi prostoru všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, a prostoru všech řešení příslušné homogenní rovnice.

VĚTA 31 (Třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Všimněme si, že první rovnost je zobecněním Fredholmovy alternativy. Nicméně my Fredholmovu alternativu využijeme v důkazu.

DŮKAZ. Označme $S = \lambda I_X - T$. Dokážeme nejprve nerovnost

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S. \tag{1}$$

Předpokládejme opak, tj. $\dim \operatorname{Ker} S > \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$. Dle Věty 23 je $\operatorname{Ker} S$ konečněrozměrný a $\operatorname{Rng} S$ uzavřený. Podle předpokladu je tedy $\operatorname{Rng} S$ konečné kodimenze. Díky Větě 2.8 platí

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_t E = \operatorname{Rng} S \oplus_t F,$$

kde E, F jsou uzavřené podprostory X a $\dim \operatorname{Ker} S > \dim F$. Nechť $A\colon \operatorname{Ker} S \to F$ je lineární zobrazení, které je na a $Ay = 0$ pro nějaké nenulové $y \in \operatorname{Ker} S$ (stačí definovat A pomocí bází). Zobrazení A je spojité díky konečné dimenzi prostoru $\operatorname{Ker} S$ (Věta 1.68). Nechť $P : X \to \operatorname{Ker} S$ je spojitá lineární projekce příslušná prvnímu rozkladu. Položme $U = T - A \circ P$. Pak $A \circ P \in \mathcal{F}(X)$, a tedy $U \in \mathcal{K}(X)$ díky Větě 12(b).

Podívejme se nyní na operátor $\lambda I_X - U$. Platí, že $\lambda I_X - U = S + A \circ P$. Je-li $z \in X$, pak existují $z_1 \in \operatorname{Rng} S$ a $z_2 \in F$ splňující $z = z_1 + z_2$. Všimněme si, že $\operatorname{Rng} S = S(E + \operatorname{Ker} S) = S(E) + S(\operatorname{Ker} S) = S(E)$. Tedy existují $x_1 \in E$ a $x_2 \in \operatorname{Ker} S$ splňující $S(x_1) = z_1$ a $A(x_2) = z_2$. Pak $(\lambda I_X - U)(x_1 + x_2) = (S + A \circ P)x_1 + (S + A \circ P)x_2 = Sx_1 + A(Px_1) + Sx_2 + A(Px_2) = z_1 + z_2 = z$. Tedy $\lambda I_X - U$ je na. Z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I_X - U$ je prostý. To je ale ve sporu s faktem, že $(\lambda I_X - U)y = Sy + A(Py) = Ay = 0$. Tím máme dokázánu nerovnost (1).

Uvědomme si, že $\lambda I_{X^*} - T^* = S^*$ (Věta 2). Podle Věty 13 je $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$. Podle první části důkazu aplikované na $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$ je tedy

$$\dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^*.$$

Dále, podle druhé Fredholmovy věty (Věta 30) je $X^*/\operatorname{Rng} S^* = X^*/(\operatorname{Ker} S)^\perp$. Tento prostor je ovšem izomorfní prostoru $(\operatorname{Ker} S)^*$ (Věta 2.22(b)). Tedy

$$\operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim(\operatorname{Ker} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

Podobně, $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Rng} S)^\perp$ (Věta 4(a)). Protože $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený, je $(\operatorname{Rng} S)^\perp$ izomorfní s $(X/\operatorname{Rng} S)^*$ (Věta 2.22(a)). Tedy $\dim \operatorname{Ker} S^* = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* = \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$ (vizte Tvrzení 2.27). Dáme-li nyní dohromady dokázané rovnosti a nerovnosti spolu s nerovností (1), dostaneme

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S = \dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

□

Kapitola 5

Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Od obecné teorie normovaných lineárních prostorů nyní na chvíli odbočíme ke klasičtější analýze, totiž k Fourierově transformaci. Ta je základním nástrojem v řadě matematických problémů, ať už je to teorie parciálních diferenciálních rovnic, prostorů funkcí či harmonická analýza. Než se však do této problematiky pustíme, je třeba se seznámit s takzvanou konvolucí funkcí, což je velmi užitečný nástroj, jak vytvářet funkce s požadovanými vlastnostmi pomocí „integrálního průměrování“. Jako jeden z mnoha důsledků obdržíme hustotu hladkých funkcí v prostorech L_p (Důsledek 15).

1. Konvoluce funkcí

V tomto oddílu budeme pracovat s funkcemi na prostoru $\mathbb{R}^d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ a s mírou μ, která je nějakým kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Normu na $\mathbb{R}^d$ budeme uvažovat eukleidovskou, tj. $\|\cdot\|_2$.

DEFINICE 1. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Správnější by bylo označovat konvoluci symbolem $f *_\mu g$, neboť výsledek závisí na míře μ. Tradiční značení vyžaduje, abychom z kontextu věděli, jaká míra je použita. Funkce g se někdy nazývá jádrem konvoluce.

VĚTA 2. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.
(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.
(c) Nechť $1 \le p, q, r \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.

Důležitým speciálním případem v (c) je $p = q = r = 1$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu = C\lambda$ a $x \in \mathbb{R}^d$. Definujme $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ předpisem $\varphi(z) = x - z$. Pak φ je diferencovatelná bijekce a $|J_\varphi|(z) = 1$ v každém bodě $z \in \mathbb{R}^d$. Tedy dle věty o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)C\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(z))g(x-\varphi(z))C\,\mathrm{d}\lambda(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(z)f(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z),$$

pokud jeden z integrálů konverguje. Odtud již tvrzení (a) plyne.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ je takové, že $f * g(x)$ a $f * h(x)$ jsou definovány. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot (g+h)(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y),$$

a tedy $f*(g+h)(x) = f*g(x) + f*h(x) = \big(f*g + f*h\big)(x)$. Druhá rovnost plyne z právě dokázané rovnosti a tvrzení (a).

Důkaz (c) odložíme na později (str. 75), až se o konvoluci dozvíme více.

□

Nyní se zaměříme na otázku, kdy je konvoluce definována.

LEMMA 3. *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.*
(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.
(b) Funkce $(x, y) \mapsto f(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x-y)$ jsou lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.

DŮKAZ. V celém důkazu bude měřitelná znamenat lebesgueovsky měřitelná.

(a) Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $h(y) = f(x-y)$ pro $y \in \mathbb{R}^d$. Je-li $G \subset \mathbb{K}$ otevřená, pak je snadno vidět, že $h^{-1}(G) = x - f^{-1}(G)$. Množina $f^{-1}(G)$ je měřitelná, a protože Lebesgueova míra je symetrická a translačně invariantní, je i množina $h^{-1}(G)$ měřitelná. Funkce h je tedy měřitelná.

(b) Označme $\varphi(x, y) = f(y)$ a $\psi(x, y) = f(x-y)$. Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je otevřená. Položme $A = f^{-1}(G)$. Pak $A \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná a $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}^d \times A \subset (\mathbb{R}^d)^2$. Je to tedy měřitelný obdélník, a tím pádem měřitelná množina. Dále definujme $T : (\mathbb{R}^d)^2 \to (\mathbb{R}^d)^2$ předpisem $T(x, y) = (x-y, y)$. Pak zjevně T je prosté lineární zobrazení, a tedy bijekce $(\mathbb{R}^d)^2$ na $(\mathbb{R}^d)^2$. Platí, že $\psi^{-1}(G) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ x - y \in A\} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ T(x, y) \in A \times \mathbb{R}^d\} = T^{-1}(A \times \mathbb{R}^d)$. Množina $A \times \mathbb{R}^d$ je měřitelný obdélník v $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy měřitelná množina, proto i její obraz při lineárním zobrazení T^{-1} je měřitelná množina (vizte např. [R, str. 175]).

□

LEMMA 4. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f i g jsou definovány všude a jsou konečné. Podle Lemmatu 3(b) je funkce F měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. S využitím věty o substituci jako v důkazu Věty 2(a) obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \cdot \|g\|_1\,\mathrm{d}\mu(y) = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty,$$

odkud podle Fubiniovy věty plyne, že $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

□

DEFINICE 5. Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Všimněme si, že je-li $y \in \mathbb{R}^d$, pak pro libovolné $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ platí $\tau_y(f+g) = \tau_y f + \tau_y g$ a $\tau_y(\alpha f) = \alpha \tau_y f$, tj. τ_y je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory všech funkcí na $\mathbb{R}^d$.

Pokud $f = g$ μ-s. v., pak i $\tau_y f = \tau_y g$ μ-s. v., tedy operace posunu má smysl i pro prvky prostoru $L_p(\mu)$.

VĚTA 6. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau : \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že díky větě o substituci pro libovolné $g \in L_p(\mu)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ platí, že $\|\tau_y g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(u)|^p \,\mathrm{d}\mu(u) = \|g\|_p^p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje $g \in C(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem K taková, že $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $r > 0$ je takové, že $K \subset B(0,r)$, a položme $B = B(0, r+1)$. Protože g je stejnoměrně spojitá a $\mu(B) < +\infty$, existuje $0 < \delta \leq 1$ takové, že $|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(B)^{1/p}}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$, $\|u - v\| < \delta$. Nechť nyní $x, y \in \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\|x - y\| < \delta$. Je-li $u + x - y \in K$, pak $\|u\| \leq \|u + x - y\| + \|x - y\| \leq r + 1$, tedy $u \in B$. S využitím věty o substituci tedy máme

$$\begin{aligned}\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_x g(z) - \tau_y g(z)|^p \,\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(z-x) - g(z-y)|^p \,\mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(u) - g(u+x-y)|^p \,\mathrm{d}\mu(u) = \int_B |g(u) - g(u+x-y)|^p \,\mathrm{d}\mu(u) \leq \\ &\leq \int_B \frac{\varepsilon^p}{3^p \mu(B)} \,\mathrm{d}\mu(z) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned}\|\tau(x) - \tau(y)\|_p &= \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - \tau_y f\|_p \leq \\ &\leq \|\tau_x (f-g)\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_y (g-f)\|_p = \|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|g - f\|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Připomeňme, že $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ je vektorový prostor lokálně integrovatelných funkcí definovaných na měřitelné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tj. funkcí $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ takových, že pro každé $x \in \Omega$ existuje okolí $U \subset \Omega$ bodu x takové, že $f\restriction_U$ je integrovatelná. Poznamenejme, že z Lindelöfovy[1] vlastnosti množiny Ω plyne, že funkce z $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ jsou automaticky měřitelné. Z vlastností kompaktních množin pak plyne, že je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak $f\restriction_K$ je integrovatelná. Dále se snadno nahlédne, že $C(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ a $L_p(\mathbb{R}^d, \mu) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ pro každé $1 \leq p \leq \infty$ (poslední inkluze je míněna ve smyslu existence vhodného bodově definovaného reprezentanta).

VĚTA 7. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.
(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*
(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*
(e) *Nechť $1 \leq p, q \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.*

DŮKAZ. (a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f i g jsou definovány všude a jsou konečné. Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Funkce $y \mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a) a $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (pro $1 < p, q < \infty$ to plyne z Hölderovy nerovnosti, jinak je odhad přímočarý; též využíváme větu o substituci). Tedy $f * g$ je definována na celém $\mathbb{R}^d$ a $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále díky Větě 2(a) můžeme bez újmy na obecnost předpokládat, že $q < \infty$. Položme $h(z) = g(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Dle věty o substituci je $h \in L_q(\mu)$. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^d$ pomocí Hölderovy nerovnosti (resp.

[1] Ernst Leonard Lindelöf

přímočarého odhadu pro $p = \infty$) dostáváme

$$\begin{aligned}|f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(g(x-z) - g(y-z)\big) \, d\mu(z) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(h(z-x) - h(z-y)\big) \, d\mu(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z) \, d\mu(z) \right| \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \big|\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z)\big| \, d\mu(z) \le \|f\|_p \|\tau_x h - \tau_y h\|_q .\end{aligned}$$

Věta 6 nyní implikuje stejnoměrnou spojitost $f * g$.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $y \mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a). Položme $K = \operatorname{supp} g$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \, d\mu(y) = \int_{x-K} |f(y)||g(x-y)| \, d\mu(y) \le \|g\|_\infty \int_{x-K} |f(y)| \, d\mu(y),$$

přičemž poslední integrál je konečný, neboť množina $x - K$ je kompaktní. Tedy hodnota $f * g(x)$ je definována.

Nechť nyní $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. Pak pro $y \in \operatorname{supp} f$ platí $x - y \notin \operatorname{supp} g$, a tedy

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \, d\mu(y) = \int_{\operatorname{supp} f} f(y)g(x-y) \, d\mu(y) = 0.$$

Odtud plyne, že $\{x \in \mathbb{R}^d;\ f * g(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Podle Tvrzení 1.23 je ovšem množina $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ uzavřená, a tedy $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Konečně, ukažme spojitost. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $L = B(x,1) - K$. Pak L je kompaktní (Tvrzení 1.23). Položme $h(z) = (\chi_L f)(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_1(\mu)$. Nechť $y \in B(x,1)$ je libovolné. Pak s využitím Věty 2 dostáváme

$$\begin{aligned}|f * g(x) - f * g(y)| &= |g * f(x) - g * f(y)| = \left| \int_K g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) \, d\mu(z) \right| = \\ &= \left| \int_K g(z)\big(h(z-x) - h(z-y)\big) \, d\mu(z) \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| \big|h(z-x) - h(z-y)\big| \, d\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| \big|\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z)\big| \, d\mu(z) \le \|g\|_\infty \|\tau_x h - \tau_y h\|_1,\end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost platí proto, že je-li $z \in K$, pak $x - z, y - z \in L$, a tedy $g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) = g(z)\big((\chi_L f)(x-z) - (\chi_L f)(y-z)\big)$ pro každé $z \in \mathbb{R}^d$. Věta 6 nyní implikuje spojitost $f * g$ v bodě x.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $A_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| \le n\} \cap B(0,n)$ a $B_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| \le n\} \cap B(0,n)$. Pak A_n i B_n jsou měřitelné množiny. Položme dále $f_n = \chi_{A_n} f$ a $g_n = \chi_{B_n} g$. Pak zjevně $f_n \to f$ a $g_n \to g$ bodově na $\mathbb{R}^n$ a $|f_n(x)| \le |f(x)|$, $|g_n(x)| \le |g(x)|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud plyne, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^d$ platí $f_n(y)g_n(x-y) \to f(y)g(x-y)$ a $|f_n(y)g_n(x-y)| \le |f(y)g(x-y)|$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n, g_n \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, a tedy dle (a) je $f_n * g_n$ definována a spojitá na celém $\mathbb{R}^d$. Pro $x \in D$ je podle předpokladu $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \, d\mu(y) < +\infty$, takže dle Lebesgueovy věty $f_n * g_n(x) \to f * g(x)$. Funkce $f * g$ je tedy na D bodovou limitou spojitých funkcí, a proto je tam měřitelná.

(d) Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$, pak dle Lemmatu 4 je $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$. Podle Fubiniovy věty tedy platí, že $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, d\mu(y)$ konverguje pro μ-s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ a $f * g \in L_1(\mu)$. Použijeme-li Fubiniovu větu ještě jednou, dostaneme

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \, d\mu(y) \right| d\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)| \, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)| \, d\mu \times \mu = \|f\|_1 \|g\|_1 .\end{aligned}$$

(e) Případ sdružených exponentů je (a), případ $p = q = 1$ je (d). Zbývají případy, kdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ a $1 < \max\{p,q\} < \infty$, což znamená, že $r < \infty$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f i g jsou definovány všude a jsou konečné. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = |f(y)|^p |g(x-y)|^q$ nezáporná měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy dle Fubiniovy věty (a věty o substituci) platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \|g\|_q^q \,\mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_p^p \|g\|_q^q < +\infty. \quad (1)$$

To znamená, že integrál $\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ je konečný pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Dále, je-li $p = 1$, pak $r = q > 1$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{1}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{1}{r}} |g(x-y)|\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_1^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Je-li $q = 1$, pak obdržíme analogicky $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_1^{1-\frac{1}{r}} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{\frac{1}{r}}$. Konečně, je-li $p, q > 1$, pak $\frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{q}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ tak dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti (Věta 15.74 pro $\alpha_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ a $\alpha_3 = \frac{1}{r}$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{1-\frac{q}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{\frac{q}{r}}\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q \,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{r}} =$$
$$= \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Všimněme si, že díky předchozím výpočtům je tento odhad platný i pro $p = 1$ nebo $q = 1$. Protože poslední číslo v tomto odhadu je konečné pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$, je funkce $f * g$ je definována skoro všude na $\mathbb{R}^d$ a platí $|f * g(x)| \le \|f\|_p^{1-p/r} \|g\|_q^{1-q/r} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{1/r}$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Podle (c) je funkce $f * g$ měřitelná a můžeme tedy s pomocí (1) odhadnout

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) \le \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

□

DŮKAZ VĚTY 2(C). Pomocí Lemmatu 3 snadno odvodíme, že funkce $F_x(y,z) = f(z)g(y-z)h(x-y)$ je měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále je $|f| \in L_p(\mu)$, $|g| \in L_q(\mu)$ a $|h| \in L_r(\mu)$. Z předpokladu na p, q, r plyne, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$ nebo $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$. Předpokládejme nejprve, že nastane první případ. Pak dle Věty 7(e) je $|f| * |g| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Protože $\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{r} \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $\big(|f| * |g|\big) * |h|(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. To znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(z) \right) \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)||g(y-z)|\,\mathrm{d}\mu(z) \right) |h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f| * |g|(y) |h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Podobně, jestliže $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$, pak dle Věty 7(e) je $|g| * |h| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$. Protože $\frac{1}{p} + \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $|f| * \big(|g| * |h|\big)(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. S využitím věty o substituci to znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y-z)||h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(u)||h(x-z-u)|\,\mathrm{d}\mu(u)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|\big(|g|*|h|\big)(x-z)\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy i ve druhém případě plyne, že $F_x \in L_1(\mu\times\mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Konečně, opětovným použitím Fubiniovy věty spolu s větou o substituci tedy pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y-z)\,\mathrm{d}\mu(z)\right)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) =\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z)\,\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) =\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) =\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)h(x-z-u)\,\mathrm{d}\mu(u)\right)\mathrm{d}\mu(z) =\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g*h(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z) = f*(g*h)(x).\end{aligned}$$

□

DEFINICE 8. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0,\dots,0)$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Je-li f funkce na Ω s komplexními hodnotami, pak $D^\alpha f(x) = D^\alpha(\operatorname{Re} f)(x) + iD^\alpha(\operatorname{Im} f)(x)$ pro $x \in \Omega$. Připomeňme, že symbolem $C^k(\Omega,\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ značíme funkce z Ω do $\mathbb{K}$ takové, že mají spojité všechny parciální derivace všech řádů až do k včetně (resp. všech řádů, pokud $k=\infty$) na Ω. Obvykle používáme zkratku $C^k(\Omega,\mathbb{K}) = C^k(\Omega)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že ne každá parciální derivace je tvaru D^α pro nějaký multiindex α (např. $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$). Nicméně pokud derivujeme funkce z $C^k(\Omega)$, pak si díky větě o záměně parciálních derivací vystačíme pouze s parciálními derivacemi D^α, $|\alpha| \le k$. Díky Větě 15.1 lze tedy obvykle pracovat pouze s parciálními derivacemi D^α.

POZNÁMKA 9. Je-li $f \in C^k(\Omega)$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le k$, pak $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$. Vskutku, f je konstantní (nulová) na otevřené množině $G = \Omega \setminus \operatorname{supp} f$, a tedy $D^\alpha f = 0$ na G. Tudíž $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \overline{\Omega\setminus G}^{\Omega} = \Omega\setminus G = \operatorname{supp} f$. Na druhou stranu není neobvyklé, že $\operatorname{supp} D^\alpha f \subsetneq \operatorname{supp} f$: je-li f konstantní nenulová, pak $\operatorname{supp} f = \Omega$, ale $\operatorname{supp} D^\alpha f = \emptyset$ pro $\alpha \ne 0$.

DEFINICE 10. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A,\mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{K});\ \operatorname{supp}\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Obvykle používáme zkratku $\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(A)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že $\mathcal{D}(A)$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(A)$ je podprostor $\mathcal{D}(B)$, pokud $A \subset B$. Snadno je vidět, že pro každou $f \in \mathcal{D}(A)$ a každý multiindex α je $D^\alpha f \in \mathcal{D}(A)$ (Poznámka 9).

PŘÍKLAD 11. Funkce $p(x) = \|x\|^2$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ patří do $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Platí totiž $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(x) = 2$ a $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pro $i \neq j$ a všechny ostatní parciální derivace jsou nulové.

Definujme funkci $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{pro } t \in (-1,1), \\ 0 & \text{pro } t \notin (-1,1). \end{cases}$$

Pak není obtížné spočítat, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (jediná potíž je v bodech ± 1), a zjevně $\{t \in \mathbb{R};\ \varphi(t) \neq 0\} = (-1,1)$, takže $\operatorname{supp} \varphi = [-1,1]$. Tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Konečně, položíme-li $\psi = \varphi \circ p$, pak ihned vidíme, že $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \psi(x) \neq 0\} = U(0,1)$ a $\operatorname{supp} \psi = B(0,1)$.

◇

Vzhledem k tomu, že nosič funkce lze posouvat a měnit jeho velikost pomocí transformace $x \mapsto ax + b$, která zachovává hladkost, předchozí příklad ukazuje, že pro libovolnou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje netriviální nezápornou funkci.

VĚTA 12. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

DŮKAZ. Dle Věty 7(b) jsou funkce $f * g$ i $f * D^\alpha g$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definovány a spojité na celém $\mathbb{R}^d$. Dále ukážeme platnost vzorce $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ indukcí podle $|\alpha|$. Odtud plyne, že $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pomocí Věty 15.1.

Nechť nejprve $k = 1$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Funkce $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ je spojitá s kompaktním nosičem, a tedy existuje $C > 0$ takové, že $\left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\right| \leq C$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(t) = f * g(x + te_j)$ pro $t \in (-1,1)$. Dále položme $F(t,y) = f(y)g(x + te_j - y)$ pro $t \in (-1,1)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t,y)\, \mathrm{d}\mu(y)$. Pak pro každé $t \in (-1,1)$ je funkce $y \mapsto F(t,y)$ měřitelná. Dále pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1,1)$ je $\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y)$. Položme $K = B(x,1) - \operatorname{supp} g$. Pak K je kompaktní (Tvrzení 1.23) a je-li $t \in (-1,1)$ a $y \in \mathbb{R}^d \setminus K$, pak $x + te_j - y \notin \operatorname{supp} g$, takže $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) = 0$. Pro $h = C\chi_K |f|$ je tedy $h \in L_1(\mu)$ a $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\right| \leq h(y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1,1)$. Konečně, $y \mapsto F(0,y) \in L_1(\mu)$, neboť $f * g(x)$ je definována. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tedy máme $\frac{\partial f * g}{\partial x_j}(x) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(0,y)\, \mathrm{d}\mu(y) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro libovolné D^β takové, že $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy s využitím indukčního předpokladu a dále již dokázaného případu $k = 1$ obdržíme

$$D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(D^{\alpha - e_j}(f * g)\big) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j}(D^{\alpha - e_j} g) = f * D^\alpha g.$$

□

DEFINICE 13. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

VĚTA 14. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

DŮKAZ. (a) Podle Věty 7(a) jsou funkce $f * g_n$ definovány na celém $\mathbb{R}^d$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$ splňují $\|u - v\| \leq \delta$. Nechť $M > 0$ je takové, že $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dle Důsledku 15.73 existuje $r > 0$ takové, že $\int_{B(0,r)} g \, \mathrm{d}\mu > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pak dle věty o substituci (užijeme $\varphi(x) = nx$, $J_\varphi(x) = n^d$) máme $\int_{B(0,r/n)} g_n(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r/n)} n^d g(nx) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r)} g(u) \, \mathrm{d}\mu(u) > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{r}{n_0} < \delta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že

$$\begin{aligned}
\bigl|f * g_n(x) - f(x)\bigr| &= \bigl|g_n * f(x) - f(x)\bigr| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr| \, \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr| \, \mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr| \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \\
&\leq \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) \frac{\varepsilon}{2} \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) 2M \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili komutativitu konvoluce (Věta 2(a)).

(b) Podle Věty 7(e) existuje $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\mu(A) = 0$ a všechny funkce $f * g_n$ jsou definovány na $\mathbb{R}^d \setminus A$. Podobně jako v případě (a) a s využitím Jensenovy nerovnosti[2] ([R, Věta 3.3]) dostáváme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ platí, že

$$\bigl|f * g_n(x) - f(x)\bigr|^p = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \bigl(f(x-y) - f(x)\bigr) g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Díky Fubiniově větě (a Lemmatu 3(b)) je tedy

$$\begin{aligned}
\|f * g_n - f\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p g_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y) g_n(y) \, \mathrm{d}\mu = \varphi * g_n(0),
\end{aligned}$$

kde $\varphi(y) = \|\tau_{-y} f - f\|_p^p$. Funkce φ je zjevně omezená a díky Větě 6 je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$ (uvědomme si, že funkce $s \mapsto |s|^p$ je stejnoměrně spojitá na omezených množinách), a tedy $\varphi * g_n(0) \to \varphi(0) = 0$ dle (a).

□

DŮSLEDEK 15. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje kompaktní $K \subset \Omega$ taková, že $\delta = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$ a $\|f - \chi_K f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ (stačí použít Důsledek 15.73 na $K_n = \{x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,n);\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$). Položme $h = \chi_K f$. Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0,\delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g \, \mathrm{d}\mu = 1$ a položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak podle Věty 14(b) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\|f - h * g_n\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Podle Věty 12 je $h * g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a podle Věty 7(b) je $\operatorname{supp} h * g_n \subset K + B(0,\delta) \subset \Omega$, tedy $h * g_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

□

Následující příklad se nám bude hodit později.

[2] Johan Willem Ludwig Valdemar Jensen (1906)

PŘÍKLAD 16. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ a $b - a \leq d - c$. Pak

$$\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a+c], \\ x - (a+c) & \text{pro } x \in [a+c, b+c], \\ b - a & \text{pro } x \in [b+c, a+d], \\ b + d - x & \text{pro } x \in [a+d, b+d], \\ 0 & \text{pro } x \in [b+d, +\infty). \end{cases}$$

Vskutku, $\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(y)\chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_a^b \chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{x-b}^{x-a} \chi_{(c,d)}\,\mathrm{d}\lambda$, odkud již uvedený vzorec snadno plyne.

$\diamond$

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$. V tomto oddílu budeme konvoluci funkcí na $\mathbb{R}^d$ rozumět vzhledem k míře μ_d.

Fourierova transformace je základním příkladem transformace Gelfandovy, kterou se budeme zaobírat v oddílu 10.5 (vizte též kapitolu 13). Umožňuje reprezentovat funkce z $L_1(\mu_d)$ pomocí funkcí z $C_0(\mathbb{R}^d)$ takovým způsobem, že diferenciální vlastnosti se přenášejí na vlastnosti algebraické. To je fundamentálním rysem celé teorie, neboť tím získáváme nástroj pro převádění (parciálních) diferenciálních rovnic na rovnice algebraické. Na prostoru $L_2(\mu_d)$ je pak možno realizovat Fourierovu transformaci jakožto izometrický lineární operátor na $L_2(\mu_d)$ (takzvanou Fourierovu-Plancherelovu transformaci), který slouží jako základní „transformace souřadnic“ na tomto prostoru.

DEFINICE 17. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD 18. Nechť $r > 0$. Pak $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin rt}{t}$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}r$. Vskutku, $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^r e^{-itx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^r \big(\cos(-tx) + i\,\sin(-tx)\big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{\sin tx}{t}]_{-r}^r$ (díky lichosti funkce sin), odkud již výsledek ihned plyne.

$\diamond$

Dříve, než se podíváme na vlastnosti Fourierovy transformace, zavedeme ještě několik užitečných pojmů.

DEFINICE 19. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(\mathbb{R}^d)$, a tedy je to Banachův prostor.

DEFINICE 20. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Snadno se nahlédne, že $C_0(\mathbb{R}^d)$ je uzavřeným podprostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, tedy je to Banachův prostor. Na druhou stranu, $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ je podprostorem $C_0(\mathbb{R}^d)$, a není příliš obtížné si rozmyslet, že je ve skutečnosti hustým podprostorem. (Stačí funkci z $C_0(\mathbb{R}^d)$ vynásobit funkcí $x \mapsto 1 - \min\{\operatorname{dist}(x, B(0,R)), 1\}$.) Příkladem funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$, která nemá kompaktní nosič, je $\frac{1}{1+\|x\|^2}$.

Intuitivně lze říci, že funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$ „jdou v nekonečnu k nule“. Přesněji, je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

LEMMA 21 (G. F. B. Riemann (1853), H. Lebesgue (1903)). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

DŮKAZ. Protože $e^{-i\pi} = -1$, pro $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ máme díky větě o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f(x)e^{-i\left\langle t,x+\frac{\pi}{\|t\|^2}t\right\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f\Big(u - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u).$$

Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\right|\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{2}\left\|\tau_0 f - \tau_{\pi t/\|t\|^2} f\right\|_1.\end{aligned}$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne z Věty 6.

□

V této kapitole budeme pro funkci f definovanou na $\mathbb{R}^d$ značit její „otočení“ symbolem $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pokud $f = g$ μ_d-s. v., pak i $\tilde{f} = \tilde{g}$ μ_d-s. v., tedy operace „otočení“ má smysl i pro prvky prostoru $L_1(\mu_d)$.

VĚTA 22. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mu_d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c \neq 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = |c|^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$. Speciálně, $\widehat{\tilde{f}} = \tilde{\widehat{f}}$.

(d) $\widehat{\overline{\tilde{f}}} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Pro důkaz tvrzení (e) budeme potřebovat následující tři lemmata:

LEMMA 23. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a,+\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a,b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a,+\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a,+\infty))$, pak* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

DŮKAZ. Uvědomme si, že podle našich předpokladů platí $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $x \in (a,+\infty)$ (vizte např. [R, Věty 7.20 a 7.21]). Z Heineovy věty a Důsledku 15.73 plyne, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$, speciálně tedy limita existuje. Protože $f \in L_1([a,+\infty))$, nezbývá, než aby byla nulová.

□

LEMMA 24. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg'\,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na $\mathbb{R}$ a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Dále díky Lemmatu 23 platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Podle věty o integraci per partes pro Newtonův integrál tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál zcela vlevo dle předpokladu konverguje i jako Lebesgueův integrál. Rovnost tedy platí i pro integrály v Lebesgueově smyslu.

□

LEMMA 25. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d,\lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1,\dots,d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Označme $F(u,v) = f(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$, $G(u,v) = g(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$, $F_1(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$ a $G_1(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1,\dots,u_{j-1},v,u_j,\dots,u_{d-1})$ pro $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, $v \in \mathbb{R}$. Dle předpokladu je $F, F_1 \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Podle Fubiniovy věty tedy existují množiny $A, B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ míry 0 takové, že $v \mapsto F(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus A$ a $v \mapsto F_1(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus B$. Položme $E = A \cup B$. Pak díky Fubiniově větě máme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v)G(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v)\right)\mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v)G(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v)\right)\mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(-\int_{\mathbb{R}} F(u,v)G_1(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v)\right)\mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(u,v)G_1(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v)\right)\mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x),\end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost platí díky tomu, že E má nulovou míru, a třetí rovnost plyne z Lemmatu 24.

□

DŮKAZ VĚTY 22. (a) Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^d$ konvergující k t. Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty $\lim \widehat{f}(t_n) = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d = \widehat{f}(t)$. Tedy $\widehat{f}$ je spojitá v t. Dále zjevně $|\widehat{f}(t)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \|f\|_1$. Fakt, že $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z Lemmatu 21. Konečně, linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice.

(b) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,u\rangle}e^{-i\langle t,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t).$$

Dále

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t-y,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{f}(t-y) = \tau_y\widehat{f}(t).$$

(c) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\tfrac{x}{c}\right)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,cu\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u) = |c|^d\,\widehat{f}(ct).$$

(d) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\overline{\widetilde{f}}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)}e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)e^{-i\langle t,-x\rangle}}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \overline{\widehat{f}(t)}.$$

(e) Díky Lemmatu 25 máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-it_j)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda(x) = it_j\widehat{f}(t).$$

(f) Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \widehat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u,x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u,x)\,\mathrm{d}\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u,x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$, takže $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(u,x)\right| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0,x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial F}{\partial u}(0,x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{h}(t)$.

(g) Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x,y)| = |f(y)||g(x-y)|$ a aplikujeme-li Lemma 4 na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f*g(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu_d(y)\right)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle t,u+y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle t,y\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t).\end{aligned}$$

(h) Položme $F(x,y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x,y\rangle}$. Pak F je dle Lemmatu 3(b) měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(y)\right)g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}g(x)\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right)\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\widehat{g}(y)\,\mathrm{d}\mu_d(y).\end{aligned}$$

□

Pro budoucí použití se nám bude hodit nalézt nějakou omezenou spojitou funkci, jejíž Fourierova transformace je regularizačním jádrem.

PŘÍKLAD 26. Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Nezápornost funkce $\widehat{g}$ je zjevná a její integrál snadno spočteme pomocí Fubiniovy věty. Stejně snadno pomocí Fubiniovy věty odvodíme, že $g \in L_1(\mu_d)$. Dokažme tedy platnost vzorce. Nechť nejprve $d = 1$. Zvolme $t \in \mathbb{R}$ pevné. Funkce g je sudá, proto

$$\widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\cos(-tx) + i\sin(-tx)\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = 2\int_{[0,+\infty)} e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Pomocí integrace per partes snadno odvodíme, že $\int e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} e^{-x}\cdot\frac{t\sin(tx)-\cos(tx)}{1+t^2}$ na $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme, že $\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1+t^2}$.

Je-li nyní $d > 1$, pak díky Fubiniově větě a případu $d = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|} e^{-i\sum_{j=1}^d t_j x_j}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d \left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^d\left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu_1(x_d) = \prod_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_1(x_j) = \\ &= \prod_{j=1}^d\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\frac{1}{1+t_j^2} = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\prod_{j=1}^d\frac{1}{1+t_j^2}.\end{aligned}$$

◇

LEMMA 27. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d\widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle t,x\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože g_n je omezená (Věta 22(a)), je $f * g_n$ definována na celém $\mathbb{R}^d$ (Věta 7(a)). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ tedy máme

$$\begin{aligned} f * g_n(x) &= g_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g_n(y)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)n^d\widehat{g}(-ny)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t)n^d\widehat{g}(nt)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\tau_{-x}f(t)\widehat{h_n}(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\tau_{-x}f}(t)h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t),\end{aligned}$$

přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y) = -y$ a Větu 22(c), (h) a (b).

□

VĚTA 28 (o inverzi). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

DŮKAZ. Nechť g je funkce z Příkladu 26. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Všimněme si též, že $g(0) = 1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 27. Podle Lemmatu 27 pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je $h_n(t) \to g(0) = 1$. Protože $|\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)| \le |\widehat{f}(t)|$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f * g_n(x) \to \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Na druhou stranu, podle Věty 14(b) platí, že $f * g_n \to f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $f * g_{n_k}(x) \to f(x)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ ([R, Věta 3.12]). Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-x)$ je spojitá dle Věty 22(a) a $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$ na husté podmnožině $\mathbb{R}^d$, musejí se tyto funkce rovnat všude (Věta 15.3).

□

DŮSLEDEK 29. *Fourierova transformace $\mathcal{F}\colon L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ spojitá a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng}\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widehat{\widehat{g}}$.*

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{F}(f) = 0$, pak dle věty o inverzi je $f(x) = 0$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $\operatorname{Ker} \mathcal{F} = \{0\}$. Máme-li nyní g jako v předpokladech, pak dle věty o inverzi a Věty 22(c) je $g = \mathcal{F}(\widetilde{\widehat{g}})$, odkud již tvrzení okamžitě plyne.

□

DŮSLEDEK 30. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

DŮKAZ. Položme $h = \widehat{f} * \widehat{g}$. Protože $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$ a $\widehat{g}$ je omezená (Věta 22(a)), je h definovaná a spojitá na $\mathbb{R}^d$ a navíc $h \in L_1(\mu_d)$ (Věta 7(a), (d)). Dále je $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}}$ (Věta 22(g)), a tedy $\widehat{h}(t) = f(-t)g(-t) = fg(-t)$ pro s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ (Věta 28). Dle předpokladu je tak $\widehat{h} \in L_1(\mu_d)$ a opětovnou aplikací věty o inverzi spolu s Větou 22(c) dostáváme, že $h = \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{h}}}} = \widehat{\widehat{\widehat{fg}}}\;= \widehat{fg}$.

□

PŘÍKLAD 31. Nechť $\mathcal{F} : L_1(\mu_1) \to C_0(\mathbb{R})$ je Fourierova transformace. Pak inverzní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}$ není spojitá. Speciálně, díky Důsledku 3.7 tedy $\mathcal{F}$ není na.

Vskutku, položme $f_n = \chi_{(-n,n)}$ a $g_n = f_1 * f_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 16 je $g_n \in C_0(\mathbb{R}) \cap L_1(\mu_1)$ a $\|g_n\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Dále je $\widehat{g_n}(t) = \widehat{f_1}(t)\widehat{f_n}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin t \sin nt}{t^2}$ dle Věty 22(g) a Příkladu 18, takže $\widehat{g_n} \in L_1(\mu_1)$. Podle Důsledku 29 tak dostáváme, že $\mathcal{F}^{-1}(g_n)(x) = \widetilde{\widehat{g_n}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x \sin nx}{x^2}$. Tedy

$$\|\mathcal{F}^{-1}(g_n)\|_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi}x|\sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{2^3}{\pi^5}}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin y|}{y}\,\mathrm{d}\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

což znamená, že lineární zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ není spojité.

◇

VĚTA 32 (Michel Plancherel, 1910). *Existuje právě jedna lineární izometrie $F : L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*

DŮKAZ. Pro zkrácení zápisu budeme v tomto důkazu používat zkratky $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Nechť $u \in L_2 \cap L_1$. Položme $v(x) = \overline{u(-x)}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $v \in L_2 \cap L_1$, a tedy dle Věty 7(a) a (d) je funkce $f = u * v$ stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_1$. Dále dle Věty 22(g) a (d) platí, že $\widehat{f} = \widehat{u}\,\widehat{v} = \widehat{u}\,\overline{\widehat{u}} = |\widehat{u}|^2 \geq 0$. Nechť g je funkce z Příkladu 26. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 27. Funkce h_n jsou nezáporné a snadno nahlédneme, že pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je posloupnost $\{h_n(t)\}_{n=1}^\infty$ neklesající a konverguje ke $g(0) = 1$. Použijeme-li nyní postupně Větu 14(a), Lemma 27 a Leviovu větu o monotónní konvergenci, dostaneme

$$\|u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\overline{u(y)}\,\mathrm{d}\mu_d(y) = f(0) = \lim_{n\to\infty} f * g_n(0) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}h_n\,\mathrm{d}\mu_d =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}|^2\,\mathrm{d}\mu_d = \|\widehat{u}\|_2^2.$$

Zobrazení $u \mapsto \widehat{u}$ je tedy lineární izometrie z podprostoru $L_2 \cap L_1$ prostoru L_2 do prostoru L_2. Podprostor $L_2 \cap L_1$ je ovšem v prostoru L_2 hustý (obsahuje např. jednoduché funkce nulové mimo množinu konečné míry, dále vizte např. [R, Věta 3.13]; alternativně lze použít Důsledek 15), a tedy podle Věty 1.64 existuje jednoznačné rozšíření tohoto zobrazení na zobrazení $F \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$, které je izometrie do.

Ukažme nyní, že F je na. Podle Tvrzení 1.62(c) je $\operatorname{Rng} F$ uzavřený v L_2. Pokud $\operatorname{Rng} F \neq L_2$, pak podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.7) existuje $\varphi \in L_2^*$ takový, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na $\operatorname{Rng} F$. Podle Věty 2.15 existuje $f \in L_2$ takové, že $\varphi = \varphi_f$. Speciálně tedy platí $\varphi_f(\widehat{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u} f = 0$ pro každou $u \in L_2 \cap L_1$. Z hustoty $L_2 \cap L_1$ v L_2 plyne existence posloupnosti $\{f_n\} \subset L_2 \cap L_1$ takové, že $f_n \to f$ v L_2. Zvolme libovolně $u \in L_2 \cap L_1$. Protože $u, \widehat{u}, F(f) \in L_2$, je $\varphi_u, \varphi_{\widehat{u}}, \varphi_{F(f)} \in L_2^*$. Máme tedy

$\varphi_{\hat{u}}(f_n) \to \varphi_{\hat{u}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = 0$. Ze spojitosti F plyne, že $\widehat{f_n} = F(f_n) \to F(f)$. Dle Věty 22(h) tedy máme

$$\varphi_{F(f)}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} uF(f)\,\mathrm{d}\mu_d = \varphi_u(F(f)) = \lim_{n\to\infty} \varphi_u(\widehat{f_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_n}u\,\mathrm{d}\mu_d =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\hat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\hat{u}}(f_n) = 0.$$

Protože to platí pro každé u z husté podmnožiny L_2, plyne odtud, že $F(f) = 0$, a z prostoty F dostáváme $f = 0$, což je spor s nenulovostí φ_f.

□

Poznamenejme, že zatímco Fourierova transformace funkce z $L_1(\mu_d)$ je určena jakožto funkce definovaná v každém bodě $\mathbb{R}^d$, transformace F z Plancherelovy věty určuje „Fourierův obraz" pouze jakožto prvek $L_2(\mu_d)$, tedy třídu ekvivalence funkcí na $\mathbb{R}^d$ rovných skoro všude.

Následující příklad ukazuje, jak lze v některých případech nalézt Fourierovu-Plancherelovu transformaci funkce $f \in L_2(\mu_1)$.

PŘÍKLAD 33. Nechť $f \in L_2(\mu_1)$. Označme $f_n = \chi_{(-n,n)}f$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in L_1(\mu_1) \cap L_2(\mu_1)$, existuje tedy Fourierova transformace $\widehat{f_n}$. Předpokládejme, že posloupnost funkcí $\{\widehat{f_n}\}$ konverguje skoro všude k nějaké funkci g. Pak $F(f) = g$, kde F značí rozšíření Fourierovy transformace na $L_2(\mu_1)$ dané Větou 32. Vskutku, z Lebesgueovy věty plyne, že $f_n \to f$ v $L_2(\mu_1)$. Díky spojitosti F tedy $F(f_n) \to F(f)$ v $L_2(\mu_1)$. Proto existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $F(f_{n_k}) \to F(f)$ skoro všude. Ale $F(f_{n_k}) = \widehat{f_{n_k}}$, což jsou funkce konvergující dle předpokladu skoro všude ke g. Tedy $F(f) = g$.

◇

PŘÍKLAD 34. Nechť $f \in L_2(\mathbb{R})$ má omezený nosič (zde míníme f jako funkci definovanou bodově). Pak $\hat{f}$ má omezený nosič, právě když $f = 0$ s. v.

Vskutku, nejprve si uvědomme, že za daných předpokladů je $f \in L_1(\mathbb{R})$, takže Fourierova transformace funkce f je definována. Nechť $r > 1$ je takové, že $\operatorname{supp} f \subset [-(r-1), r-1]$. Označme h prvek Hilbertova prostoru $L_2([-r,r])$, který je reprezentován funkcí $f\restriction_{[-r,r]}$, a dále označme $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}}e^{i\frac{\pi}{r}nx}$. Systém $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L_2([-r,r])$ (vizte též Příklad 1.118). Protože $\langle h, g_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2r}}\int_{-r}^{r} f(x)e^{-i\frac{\pi}{r}nx}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\,\hat{f}(\frac{\pi}{r}n)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, plyne odtud, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{\pi}{r}n)g_n$.

Předpokládáme-li nyní, že $\hat{f}$ má omezený nosič, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(\frac{\pi}{r}n)g_n$ Označíme-li $g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(\frac{\pi}{r}n)g_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f = g$ s. v. na $[-r,r]$. Speciálně, $g = 0$ s. v. na $(r-1,r)$. Funkce g je ovšem holomorfní, a protože je nulová na omezené nekonečné množině (tj. na množině mající hromadný bod), je $g = 0$.

◇

Kapitola 6

Topologické vektorové prostory

V předchozích kapitolách jsme pracovali v kontextu normovaných lineárních prostorů. Topologie na těchto prostorech byla tedy indukována normou. Ukazuje se, že existují důležité topologie, které nelze popsat pomocí normy (dokonce ani metriky). V této kapitole tedy představíme obecnější koncept, ve kterém je podobně jako v normovaných lineárních prostorech topologie úzce svázána se strukturou vektorového prostoru (vizte Tvrzení 1.2).

1. Základní vlastnosti

DEFINICE 1 (Andrej Nikolajevič Kolmogorov[1] (1934)). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Jak je zvykem, budeme často v označení topologického vektorového prostoru (X, τ) vynechávat explicitní označení topologie, tj. budeme o tomto prostoru hovořit pouze jako o X. Pokud se v důkazu objeví symbol τ, pak pokud není řečeno jinak, míní se tím právě příslušná vektorová topologie na X.

PŘÍKLADY 2. Následující prostory jsou příklady topologických vektorových prostorů:

- Vektorový prostor s indiskrétní topologií.
- Normované lineární prostory (Tvrzení 1.2).
- Prostor $\mathbb{K}^\Gamma$ se součinovou topologií, kde Γ je libovolná neprázdná množina. Tento prostor lze též chápat jako prostor všech funkcí na Γ s topologií bodové konvergence. Vizte Příklad 60.
- Prostor $C_{\mathrm{p}}(T)$ spojitých funkcí na topologickém prostoru T s topologií bodové konvergence (je to podprostor prostoru $\mathbb{K}^T$).
- Prostor $C(T)$, kde T je topologický prostor, s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T (vizte Příklad 9).
- Prostor $H(\Omega)$ funkcí holomorfních na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence (je to podprostor $C(\Omega)$ z příkladu výše).
- Prostor $L_p([0,1])$ pro $p \in (0,1)$ s metrikou $\rho(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$. Důkaz spolu s dalšími informacemi lze nalézt v Příkladu 54.

FAKT 3. *Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X. Pak*

(a) operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení $+\colon (X,\rho) \times (X,\rho) \to (X,\rho)$ (dokonce je 2-lipschitzovská);
(b) $\rho(nx, ny) \le n\rho(x,y)$ pro každé $x, y \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $(x,y), (u,v) \in X \times X$. Pak díky translační invarianci dostáváme, že

$$\begin{aligned}\rho(x+y, u+v) = \rho(x+y-u, v) = \rho(x-u, v-y) \le \rho(x-u, 0) + \rho(0, v-y) = \\ = \rho(x,u) + \rho(y,v) \le 2\max\{\rho(x,u), \rho(y,v)\} = 2\rho_\infty\big((x,y),(u,v)\big).\end{aligned}$$

[1] Андрей Николаевич Колмогоров; topologii měl definovánu pomocí operátoru uzávěru.

(b) Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ nerovnost zjevně platí. Předpokládáme-li její platnost pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\begin{aligned}\rho\bigl((n+1)x,(n+1)y\bigr) &= \rho(nx, ny + y - x) \leq \rho(nx, ny) + \rho(ny, ny + y - x) \leq \\ &\leq n\rho(x,y) + \rho(x,y) = (n+1)\rho(x,y).\end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 4. Uvažujme prostor $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{K};\ f \text{ měřitelná}\}$ s metrikou $\rho(f,g) = \int_0^1 \min\{|f - g|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda$ (ztotožňujeme přitom funkce rovnající se skoro všude). Pak X s topologií indukovanou metrikou ρ je topologický vektorový prostor a platí, že posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v metrice ρ právě tehdy, když $f_n \to f$ v míře.

Vskutku, snadno nahlédneme, že ρ je dokonce translačně invariantní metrika (využijeme nerovnost $\min\{a + b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ platnou pro každé $a, b \in [0, +\infty)$). Tedy je dle Faktu 3 operace $+$ na X spojitá. Nechť nyní $c_n \to c$ v $\mathbb{K}$ a $f_n \to f$ v ρ. Pak funkce $g_n = \min\{|c_n - c||f|, 1\}$ konvergují bodově k 0. Označme $M = 1 + \sup\{|c_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. S využitím nerovnosti $\min\{Ma, 1\} \leq M \min\{a, 1\}$ platné pro každé $a \in [0, +\infty)$ a $M \in [1, +\infty)$ dostáváme

$$\begin{aligned}\rho(c_n f_n, cf) &\leq \rho(c_n f_n, c_n f) + \rho(c_n f, cf) = \int_0^1 \min\{|c_n||f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 \min\{|c_n - c||f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq \\ &\leq \int_0^1 M \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda = M\rho(f_n, f) + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Jelikož $\int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda \to 0$ dle Lebesgueovy věty (integrovatelnou majorantou je konstantní 1), platí $\rho(c_n f_n, cf) \to 0$. Tedy i operace $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojitá, neboli X je topologický vektorový prostor.

Nechť posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v ρ. Ukážeme, že konverguje v míře, tj. že platí

$$\forall \varepsilon > 0\colon \lambda\bigl(\{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\bigr) \to 0,$$

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je dáno. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varepsilon \leq 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Pak

$$\lambda(E_n) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\rho(f_n, f) \to 0.$$

Obráceně, nechť $f_n \to f$ v míře. Nechť $\varepsilon \in (0, 1]$ je dáno a E_n jsou stejné množiny jako výše. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(E_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\begin{aligned}\rho(f_n, f) &= \int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq \\ &\leq \int_{E_n} 1\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \leq \lambda(E_n) + \varepsilon < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $f_n \to f$ v metrice ρ.

◇

Nyní se podívejme na některé základní vztahy mezi vektorovými operacemi a topologií v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.
(b) Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.
(c) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.

DŮKAZ. (a) Spojité inverze k daným zobrazením jsou dány po řadě dány předpisy $y \mapsto y + (-a)$ a $y \mapsto \frac{1}{\lambda}y$.

(b) Nechť $y, z \in X$. Je-li $U \in \tau(y)$, pak $U + (z - y) \in \tau(z)$. Vskutku, existuje otevřená G taková, že $y \in G \subset U$. Podle (a) je množina $G + (z - y)$ otevřená a platí $z \in G + (z - y) \subset U + (z - y)$. Tedy

$U + (z - y) \in \tau(z)$. Aplikujeme-li nyní tento poznatek po řadě na $y = x, z = 0$ a $y = 0, z = x$, obdržíme rovnost $\tau(x) = x + \tau(0)$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Jelikož $0 + 0 = 0$, ze spojitosti zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ v bodě $(0, 0)$ dostáváme existenci otevřených $V_1, V_2 \in \tau(0)$ splňujících $V_1 + V_2 \subset U$. Položíme-li $V = V_1 \cap V_2$, pak V je otevřené okolí 0 a zjevně $V + V \subset U$.

□

Pro další studium topologických vektorových prostorů je vhodné zavést následující geometrické pojmy:

DEFINICE 6. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je vyvážená a pohlcující. Dále, každá vyvážená množina je symetrická a obsahuje 0.

TVRZENÍ 7. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.
(b) $\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$ a $x \in X$ je dáno. Zobrazení $t \mapsto tx$ je spojité v bodě 0 a $U \in \tau(0x)$, tedy existuje $\lambda > 0$ takové, že $tx \in U$ kdykoli $|t| < \lambda$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Zobrazení $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojité v bodě $(0, 0)$, tedy existují $\delta > 0$ a $V \in \tau(0)$ otevřené tak, že $tx \in U$ kdykoli $x \in V$ a $|t| < \delta$. Položíme $W = \bigcup_{|t|<\delta}(tV)$. Protože $0V = \{0\} \subset tV$ pro každé $0 < |t| < \delta$, je $W = \bigcup_{0<|t|<\delta}(tV)$, a tedy W je zjevně otevřené okolí 0 splňující $W \subset U$. Dále je-li $x \in W$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, pak $x \in tV$ pro nějaké $t \in \mathbb{K}$, $|t| < \delta$. Tedy $\alpha x \in (\alpha t)V \subset W$, neboť $|\alpha t| \leq |t| < \delta$.

□

Následující věta ukazuje, že vlastnosti uvedené v Tvrzení 5(c) a Tvrzení 7 již charakterizují topologické vektorové prostory.

VĚTA 8 (John von Neumann (1935)). *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. je neprázdný a pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.
(ii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující.
(iii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená.

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

DŮKAZ. Definujme topologii τ pomocí systémů okolí takto: Nechť $\tau(0) = \{A \subset X;\ U \subset A \text{ pro nějaké } U \in \mathcal{U}\}$ a $\tau(x) = x + \tau(0)$ pro $x \in X$. Aby takto byla skutečně definována topologie, je nezbytné, aby pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existovalo $V \in \tau(x)$ takové, že $U \in \tau(y)$ pro každé $y \in V$. Ověřme tedy tuto podmínku: Je $U = x + W$ pro nějaké $W \in \tau(0)$, a tedy existuje $W' \in \mathcal{U}$ takové, že $W' \subset W$. Dle vlastnosti (i) existuje $V' \in \mathcal{U}$ takové, že $V' + V' \subset W'$. Položme $V = x + V'$. Pak $V \in \tau(x)$ a pro $y \in V$ je $y + V' \subset x + V' + V' \subset x + W' \subset x + W = U$, tedy $U \in \tau(y)$.

Nyní ukažme, že operace sčítání je spojitá. Nechť $x_1, x_2 \in X$ a $U \in \tau(x_1 + x_2)$. Pak existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $x_1 + x_2 + V \subset U$. Dle vlastnosti (i) existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset V$. Pak $x_1 + W \in \tau(x_1)$, $x_2 + W \in \tau(x_2)$ a $y + z \in x_1 + x_2 + W + W \subset x_1 + x_2 + V \subset U$ pro libovolné $y \in x_1 + W$ a $z \in x_2 + W$. Tím je spojitost sčítání v bodě $(x_1, x_2) \in X \times X$ ověřena.

Dále ověříme spojitost násobení skalárem. Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ a $x_0 \in X$. Pro dané $U \in \mathcal{U}$ stačí nalézt $\delta > 0$ a $V \in \mathcal{U}$ taková, že

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta \ \ \forall x \in x_0 + V\colon \lambda x \in \lambda_0 x_0 + U.$$

Díky (i) existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset U$. Dle (ii) je W pohlcující, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $tx_0 \in W$ pro každé $t \in [0, \delta]$. Dle (iii) je W vyvážená, tedy dokonce $\alpha x_0 = \frac{\alpha}{\delta}\delta x_0 \in W$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq \delta$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $n \geq |\lambda_0| + \delta$. Pomocí (i) induktivně nalezneme $V \in \mathcal{U}$ tak, aby

$$\underbrace{V + V + \cdots + V}_{n \text{ krát}} \subset W.$$

Potom pro $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta$ a $x \in x_0 + V$ máme $\lambda(x - x_0) \in \lambda V = n(\frac{\lambda}{n}V) \subset nV \subset V + V + \cdots + V \subset W$, přičemž jsme využili jednak toho, že $\left|\frac{\lambda}{n}\right| \leq \frac{|\lambda_0|+\delta}{n} \leq 1$ a V je dle (iii) vyvážená, a jednak snadného faktu, že $nA \subset \underbrace{A + A + \cdots A}_{n \text{ krát}}$ pro libovolnou podmnožinu A vektorového prostoru. Tedy $\lambda x = \lambda_0 x_0 + \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 \in \lambda_0 x_0 + W + W \subset \lambda_0 x_0 + U$.

Konečně, jednoznačnost plyne z toho, že je-li σ topologie na X taková, že (X, σ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 pro topologii σ, pak nutně $\sigma(x) = \tau(x)$ pro každé $x \in X$ (Tvrzení 5(b)).

□

PŘÍKLAD 9. Nechť T je topologický prostor a $C(T)$ je vektorový prostor všech spojitých funkcí na T. Pro neprázdnou kompaktní $K \subset T$ a $\varepsilon > 0$ položme $U_{K,\varepsilon} = \{f \in C(T);\ \max_K |f| < \varepsilon\}$. Snadno ověříme, že systém $\mathcal{U} = \{U_{K,\varepsilon};\ K \subset T$ neprázdná kompaktní, $\varepsilon > 0\}$ splňuje podmínky z Věty 8, a tedy generuje na $C(T)$ vektorovou topologii τ_{K} takovou, že $\mathcal{U}$ je bází okolí 0. Vskutku, nejprve si uvědomme, že $0 \in U_{K,\varepsilon}$ pro každou $U_{K,\varepsilon} \in \mathcal{U}$. Jsou-li $U_{K_1,\varepsilon_1}, U_{K_2,\varepsilon_2} \in \mathcal{U}$, pak $U_{K_1 \cup K_2, \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}} \subset U_{K_1,\varepsilon_1} \cap U_{K_2,\varepsilon_2}$ je též prvek $\mathcal{U}$. Dále je-li $U_{K,\varepsilon} \in \mathcal{U}$, pak $U_{K,\frac{\varepsilon}{2}} + U_{K,\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_{K,\varepsilon}$. Je-li $f \in C(T)$ libovolná, pak $m = \max_K |f| < +\infty$, a tedy $tf \in U_{K,\varepsilon}$ pro každé $t \in [0, \frac{\varepsilon}{2m}]$, což znamená, že $U_{K,\varepsilon}$ je pohlcující. Konečně, vyváženost $U_{K,\varepsilon}$ plyne z toho, že je-li $f \in U_{K,\varepsilon}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, pak $\max_K |\alpha f| \leq \max_K |f| < \varepsilon$.

Všimněme si, že je-li $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset C(T)$ usměrněný soubor, pak $f_\gamma \to f$ v τ_{K}, právě když pro každou neprázdnou kompaktní $K \subset T$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ je $\max_K |f_\gamma - f| < \varepsilon$, a tedy právě když $f_\gamma \to f$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině T.

Další informace o tomto prostoru se dozvíme v Příkladu 62.

◇

Následující věta uvádí několik topologických oddělovacích vlastností lineárních topologií.

VĚTA 10. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.
(b) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).
(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  (i) X je Hausdorffův.
  (ii) X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
  (iii) $\{0\}$ je uzavřená množina.
  (iv) $\{0\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(0)\}$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in K$, pak $X \setminus C$ je okolí x, a tedy dle Tvrzení 5(c) existuje otevřené $V_x \in \tau(0)$ splňující $x + V_x + V_x + V_x \subset X \setminus C$. Díky kompaktnosti K existují body $x_1, \dots, x_n \in K$ takové, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Protože $\bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in \tau(0)$, existuje dle Tvrzení 7(b) otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Dostáváme tak, že

$$K + V + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \subset X \setminus C.$$

Ze symetrie V pak plyne, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$. Vskutku, je-li $x \in (K + V) \cap (C + V)$, pak $x = z + v = y + u$ pro nějaká $z \in K$, $y \in C$ a $u, v \in V$. Ale $-u \in V$, takže $y = z + v - u \in K + V + V$, což je spor.

(b) Je-li $C \subset X$ uzavřená a $x \in X \setminus C$, stačí použít (a) pro $K = \{x\}$. Uvědomme si, že množiny $K + V$ a $C + V$ jsou otevřené, vizte též Tvrzení 11(a) níže.

(c) (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) jsou zřejmé, (iii)$\Rightarrow$(ii) plyne z Tvrzení 5(a), (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z (b). Snadno nahlédneme, že (iv) je ekvivalentní tvrzení, že $\{x\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(x)\}$ pro každé $x \in X$, což je ekvivalentní (ii).

□

Pro čtenáře s hlubšími znalostmi topologie poznamenejme, že topologické vektorové prostory jsou dokonce úplně regulární. To plyne například z toho, že jsou uniformizovatelné.

Následující tvrzení je zobecněním Tvrzení 1.23 odehrávajícího se v normovaných lineárních prostorech.

TVRZENÍ 11. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $G \subset X$ otevřená a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.
(b) Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.
(c) Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.

DŮKAZ. (a) $A + G = \bigcup_{x\in A}(x + G)$, přičemž množiny vpravo jsou otevřené dle Tvrzení 5(a).

Důkaz (b) i (c) lze vést zcela analogicky důkazu Tvrzení 1.23, pouze je potřeba pracovat místo posloupností s usměrněnými soubory. Je ovšem třeba mít na paměti, že pojem usměrněného podsouboru je poněkud komplikovaný. My zde ukážeme elegantnější přístup.

(b) Ukážeme, že $X \setminus (F + K)$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (F + K)$. Pak $K \cap (x - F) = \emptyset$. Množina $x - F$ je uzavřená (Tvrzení 5(a)), tedy dle Věty 10(a) existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (x - F) = \emptyset$. Je tedy $(x - V) \cap (F + K) = \emptyset$ a ze symetrie V plyne, že $x + V \subset X \setminus (F + K)$.

(c) Protože $+\colon X \times X \to X$ je spojité a $K \times L \subset X \times X$ je kompaktní, je kompaktní i množina $K + L = +(K \times L)$.

□

Dále si uvedeme několik jednoduchých vlastností uzávěrů a vnitřků v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 12. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\overline{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.
(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ a $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.
(c) $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ a $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
(d) Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.
(e) Je-li A konvexní, pak $\overline{A}$ a $\operatorname{Int} A$ jsou konvexní. Dále je-li $\operatorname{Int} A$ neprázdná, pak $\overline{A} = \overline{\operatorname{Int} A}$.
(f) Je-li A vyvážená, pak $\overline{A}$ je vyvážená.
(g) Je-li A vyvážená a $0 \in \operatorname{Int} A$, pak $\operatorname{Int} A$ je vyvážená.

DŮKAZ. (a) Platí, že

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau(0)\colon (x + U) \cap A \neq \emptyset \iff \forall U \in \tau(0)\colon x \in A - U \iff \forall U \in \tau(0)\colon x \in A + U,$$

přičemž poslední ekvivalence platí díky tomu, že $U \in \tau(0)$, právě když $-U \in \tau(0)$, což plyne z Tvrzení 5(a).

(b) Zvolme libovolné $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 5(c) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Pak dle (a) je $\overline{A} \subset A + V$ a $\overline{B} \subset B + V$, a tedy $\overline{A} + \overline{B} \subset A + B + V + V \subset A + B + U$. Protože toto platí pro každé $U \in \tau(0)$, opětovná aplikace (a) implikuje první část (b). Dále, $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset A + B$ a množina vlevo je otevřená (Tvrzení 11(a)). Odtud plyne druhá část (b).

(c)

$$\lambda\overline{A} = \lambda\bigcap\{C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} = \bigcap\{\lambda C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} =$$
$$= \bigcap\{\lambda C;\ \lambda C \text{ uzavřená}, \lambda C \supset \lambda A\} = \bigcap\{D;\ D \text{ uzavřená}, D \supset \lambda A\} = \overline{\lambda A},$$

přičemž třetí rovnost platí díky Tvrzení 5(a). Analogicky,

$$\lambda \operatorname{Int} A = \lambda\bigcup\{G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} = \bigcup\{\lambda G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} =$$
$$= \bigcup\{\lambda G;\ \lambda G \text{ otevřená}, \lambda G \subset \lambda A\} = \bigcup\{H;\ H \text{ otevřená}, H \subset \lambda A\} = \operatorname{Int}(\lambda A).$$

(d) Snadno nahlédneme, že podmnožina Z vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ je jeho podprostorem, právě když $Z + Z \subset Z$ a $\lambda Z \subset Z$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$. Stačí tedy aplikovat (b) a (c).

(e) Snadno nahlédneme, že podmnožina C vektorového prostoru je konvexní, právě když $\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C$ pro každé $\lambda \in (0,1)$. Aplikujeme-li toto pozorování spolu s (c) a (b), dostáváme, že $\lambda \overline{A} + (1 - \lambda)\overline{A} = \overline{\lambda A} + \overline{(1-\lambda)A} \subset \overline{\lambda A + (1-\lambda)A} \subset \overline{A}$ pro každé $\lambda \in (0,1)$. Podobně, $\lambda \operatorname{Int} A + (1-\lambda) \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A) + \operatorname{Int}((1-\lambda)A) \subset \operatorname{Int}(\lambda A + (1-\lambda)A) \subset \operatorname{Int} A$ pro každé $\lambda \in (0,1)$.

K důkazu rovnosti $\overline{A} = \overline{\operatorname{Int} A}$ stačí ukázat, že $A \subset \overline{\operatorname{Int} A}$. Nechť $x \in A$ a nechť $y \in \operatorname{Int} A$ a $U \in \tau(0)$ je takové, že $y + U \subset A$. Položme $u_n = (1 - \frac{1}{n})x + \frac{1}{n}y$ pro $n \in \mathbb{N}$ Pak $u_n + \frac{1}{n}U = (1-\frac{1}{n})x + \frac{1}{n}(y+U) \subset (1-\frac{1}{n})A + \frac{1}{n}A \subset A$, takže dle Tvrzení 5(a) je $u_n \in \operatorname{Int} A$. Jelikož $u_n \to x$, dostáváme, že $x \in \overline{\operatorname{Int} A}$.

(f) plyne ihned z (c) a toho, že každá vyvážená množina obsahuje 0.

(g) Nechť $\alpha \in \mathbb{K}$ splňuje $0 < |\alpha| \leq 1$. Pak $\alpha \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\alpha A) \subset \operatorname{Int} A$ dle (c). Pro $\alpha = 0$ platí $\alpha \operatorname{Int} A = \{0\} \subset \operatorname{Int} A$ přímo z předpokladu tvrzení.

□

Poznamenejme, že v (b) nemusí nastat rovnost: pro uzávěry vizte příklad před Tvrzením 1.23, pro vnitřky lze vzít např. $A = \{0\}$, $B = (0,1)$; chceme-li neprázdné vnitřky, pak např. $A = \mathbb{Q} \cup (-1,1)$, $B = (-1,1)$.

PŘÍKLAD 13. Nechť $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq |y|\}$. Pak A je vyvážená množina, jejíž vnitřek není vyvážený: Bod $0 = (0,0)$ není ve vnitřku A, neboť k němu konverguje například posloupnost $\{(\frac{1}{n}, 0)\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Platí však $(0,1) \in \operatorname{Int} A$ a každá neprázdná vyvážená množina obsahuje 0.

◇

Následující věta je zobecněním Věty 1.24.

VĚTA 14. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $Y + \operatorname{span}\{e\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Protože Y je uzavřený, existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $(e + U) \cap Y = \emptyset$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$ (Tvrzení 5(c) a 7(b)). Ukážeme, že $X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$. Protože V je pohlcující, existuje $r \in (0,1)$ takové, že $tx \in V$ pro $t \in [0,r]$. Je-li nyní $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \frac{1}{r}$, pak $\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V = \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{1}{|\lambda|}x + e + \frac{1}{\lambda}V \subset e + \frac{|\lambda|}{\lambda}V + V \subset e + V + V \subset e + U$. To znamená, že $(\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V) \cap Y = \emptyset$, a tedy i $(x + \lambda e + V) \cap Y = \emptyset$.

Na druhou stranu, množina $K = \{x + \lambda e;\ |\lambda| \leq \frac{1}{r}\}$ je kompaktní (je spojitým obrazem kompaktu $B(0, \frac{1}{r})$ v $\mathbb{K}$), disjunktní s Y, a protože Y je uzavřený, existuje dle Věty 10(a) okolí $W \in \tau(0)$ takové, že $(K + W) \cap Y = \emptyset$. Konečně, $S = V \cap W \in \tau(0)$ a zjevně $(x + \operatorname{span}\{e\} + S) \cap Y = \emptyset$. Odtud snadno plyne, že $x + S \subset X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$.

□

DŮSLEDEK 15. *Nechť X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

DŮKAZ. Nechť Z je konečněrozměrný podprostor X. Podprostor $Y = \{0\}$ je uzavřený, lze tedy použít Větu 14 na $Z = Y + Z$.

□

2. Omezené množiny, metrizovatelnost

Metrické prostory jsou speciálním případem topologických prostorů, ve kterých je práce mnohdy výrazně jednodušší (např. stačí pracovat s konvergentními posloupnostmi místo obecnějších usměrněných souborů). Je tedy užitečné vědět, zda lze konkrétní topologii topologického vektorového prostoru generovat pomocí metriky. Ukazuje se, že v topologických vektorových prostorech metrizovatelnost úzce souvisí s pojmem topologické omezenosti.

DEFINICE 16. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

POZNÁMKA 17. Je-li X topologický vektorový prostor a $x \in X$, $x \notin \overline{\{0\}}$, pak množina $\{nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ není omezená: Je-li $V \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $0 \notin x + V$, pak $-x \notin V$, a tedy $x \notin V$. To znamená, že pro libovolné $t > 0$ je $\lceil t \rceil x \notin tV$. Speciálně, je-li X Hausdorffův, pak netriviální podprostory nejsou omezené.

POZNÁMKA 18. Nechť (X, τ) je metrizovatelný topologický vektorový prostor a nechť ρ je metrika na X indukující τ. Uvědomme si, že pak máme na X definovány dva různé pojmy omezenosti: výše zmíněnou topologickou omezenost (říkejme jí zde τ-omezenost) a též klasickou metrickou omezenost (zde ρ-omezenost).

Je-li ρ translačně invariantní, pak platí, že je-li $A \subset X$ τ-omezená, je i ρ-omezená: Položme $U = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < 1\}$. Pak $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 7(b) existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Díky τ-omezenosti A existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq t$. Pak z vyváženosti V plyne, že $A \subset tV = n\frac{t}{n}V \subset nV \subset nU$. Je-li nyní $x \in A$, pak $\frac{1}{n}x \in U$, a tedy $\rho(\frac{1}{n}x, 0) < 1$. Z Faktu 3(b) pak konečně plyne, že $\rho(x, 0) = \rho(n\frac{1}{n}x, 0) \leq n\rho(\frac{1}{n}x, 0) < n$.

Je ovšem třeba dát pozor na to, že obecně mezi těmito dvěma pojmy nemusí být vůbec žádný vztah: Uvažujme prostor $\mathbb{R}$ se standardní topologií, kterou označíme τ. Nechť $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. Pak (translačně invariantní) metrika ρ indukuje na $\mathbb{R}$ topologii τ (neboť je ekvivalentní standardní metrice), ale množina $A = \mathbb{R}$ je ρ-omezená, ale není τ-omezená. Obecněji, je-li (P, ρ) metrický prostor, pak $\bar{\rho} = \min\{\rho, 1\}$ je ekvivalentní metrika na P (funkce $f(t) = \min\{t, 1\}$ je jednak neklesající a jednak konkávní s hodnotou $f(0) = 0$, a tedy subaditivní). Zjevně každá podmnožina P je $\bar{\rho}$-omezená; na druhou stranu celý prostor X není nikdy τ-omezený, je-li τ Hausdorffova. Vizte též Poznámku 25).

Pro obrácený příklad vezměme prostor c_0. Položme $\varphi(t) = (|t| - 1)^+$ a

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

pro $x, y \in c_0$. Pak ρ je ekvivalentní metrika na c_0: Funkce ρ je dobře definovaná, neboť díky tomu, že $x, y \in c_0$, je suma v definici konečná. Je snadno vidět, že ρ je metrika a $\|x - y\|_\infty \leq \rho(x, y)$ pro všechna $x, y \in c_0$. Na druhou stranu, zvolme $x \in c_0$ pevně. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \frac{1}{2}$ pro $n \geq n_0$. Je-li $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ a $n \geq n_0$, pak $|y_n| \leq 1$, takže $\varphi(x_n) = \varphi(y_n) = 0$. Pro $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ tedy platí, že $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{n_0} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| \leq (n_0 + 1)\|x - y\|_\infty$, neboť φ je zjevně 1-lipschitzovská.

Je-li τ topologie indukovaná supremovou normou, pak množina $A = B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 2)$ je τ-omezená, neboť $A \subset \frac{2}{r} B_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$ pro libovolné $r > 0$. Nicméně $\rho\big(\sum_{j=1}^{n} 2e_j, 0\big) = 2 + n$, tedy A není ρ-omezená.

Na druhou stranu není obtížné si rozmyslet, že pokud (X, τ) je topologický vektorový prostor, jehož topologie je indukovaná nějakou *normou*, pak τ-omezené a normově omezené podmnožiny X splývají.

TVRZENÍ 19. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Množina A je omezená.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.
(iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n}x_n \to 0$.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Zvolme $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$, $V \subset U$ je vyvážené. Existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $v_n \in V$ jsou prvky splňující $x_n = tv_n$. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $|\gamma_n t| < 1$ pro $n \geq n_0$. Pak $\gamma_n x_n = \gamma_n t v_n \in V \subset U$ pro $n \geq n_0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Není-li A omezená, pak existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $A \not\subset nU$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Nechť $x_n \in A \setminus nU$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{x_n}{n} \notin U$, a tedy $\frac{x_n}{n} \not\to 0$, což je spor s (iii).

□

TVRZENÍ 20. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.
(b) Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
(c) Množina $\overline{A}$ je omezená.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Dle definice omezenosti existují $t_A, t_B > 0$ taková, že $A \subset t_A V$ a $B \subset t_B V$. Položme $t = \max\{t_A, t_B\}$. Pak z vyváženosti V dostáváme, že $A \subset t\frac{t_A}{t}V \subset tV$ a $B \subset t\frac{t_B}{t}V \subset tV$. Tedy $A \cup B \subset tV \subset tU$ a $A + B \subset tV + tV = t(V + V) \subset tU$.

(b) Zjevně můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak $\lambda A \subset \lambda tV = |\lambda| t \frac{\lambda}{|\lambda|} V \subset |\lambda| tV \subset |\lambda| tU$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Dle Věty 10(b) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $\overline{V} \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak dle Tvrzení 12(c) platí, že $\overline{A} \subset \overline{tV} = t\overline{V} \subset tU$.

□

Všimněme si, že konečné množiny jsou omezené: pro jednobodové to plyne z Tvrzení 7(a), pro ostatní to dostaneme pomocí Tvrzení 20(a).

LEMMA 21. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$ a dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\delta_n V \subset W$. Tedy $V \subset \frac{1}{|\delta_n|}\frac{|\delta_n|}{\delta_n} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} U$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $V \subset tW$. Je-li nyní $n \in \mathbb{N}$ zvoleno tak, že platí $|\delta_n t| < 1$, pak $\delta_n V \subset \delta_n tW \subset W \subset U$.

□

Význam spočetné báze okolí 0 nám objasní následující věta z obecné topologie. Důkaz lze nalézt např. v Dodatku (Věta 15.68).

VĚTA 22. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X má spočetnou bázi okolí 0.
(ii) X je pseudometrizovatelný.
(iii) X je pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

DEFINICE 23. Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x.

Všimněme si, že z Tvrzení 20(a) plyne, že prostor je lokálně omezený, právě když v něm existuje omezené okolí 0.

VĚTA 24. *Nechť X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrizovatelný.*

DŮKAZ. Nechť V je omezené okolí 0. Dle Lemmatu 21 je systém $\{\frac{1}{n}V;\ n \in \mathbb{N}\}$ báze okolí 0. Věta 22 tedy implikuje pseudometrizovatelnost X.

□

POZNÁMKA 25. Poznamenejme, že (na rozdíl od Věty 64 dále) věta obrácená neplatí. Může se totiž stát, že $\tau(0)$ má spočetnou bázi, která ovšem není vygenerována jedním okolím (jako v Lemmatu 21). Příkladem je třeba prostor X měřitelných funkcí s konvergencí v míře (Příklad 4). Ukážeme, že v tomto prostoru neexistuje omezené okolí 0: Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje $\delta \in (0, 1)$ takové, že $B_\delta = \{f \in X;\ \rho(f, 0) \le \delta\} \subset U$. Položme $f_n = n\chi_{[0,\delta]}$. Pak $\rho(f_n, 0) = \delta$, a tedy $f_n \in B_\delta \subset U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, je-li $t > 0$, a $n = \lceil t \rceil$, pak $\rho(\frac{1}{t} f_n, 0) = \delta$. Tedy $\frac{1}{t} f_n \notin B_{\delta/2}$, neboli $f_n \notin tB_{\delta/2}$.

3. Totální omezenost a kompaktnost

Jedním z nejdůležitějších konceptů v matematice je pojem kompaktnosti. Podobně jako v metrických prostorech, i v topologických vektorových prostorech kompaktnost úzce souvisí s pojmem totální omezenosti.

DEFINICE 26. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá totálně omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.
(b) Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.
(c) Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.
(d) Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.
(e) Je-li A totálně omezená, pak je i $\overline{A}$ totálně omezený.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ je triviální.

$\Leftarrow$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \neq \emptyset$. Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $V - V = V + V \subset U$. Nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Pro každé $x \in F$ zvolme $a_x \in A \cap (x + V)$, pokud je tato množina neprázdná, v opačném případě pak zvolme $a_x \in A$ libovolně. Pak $A \subset \bigcup_{x \in F}(a_x + U)$. Vskutku, je-li $y \in A$, pak existuje $x \in F$ takové, že $y \in x + V$. Pak $a_x \in x + V$, takže $x \in a_x - V$, a tedy $y \in a_x - V + V \subset a_x + U$. Odtud plyne, že A je totálně omezená.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ a $H \subset B$ jsou konečné takové, že $A \subset F + V$ a $B \subset H + V$. Pak $A \cup B \subset (F \cup H) + U$ a $A + B \subset (F + V) + (H + V) \subset (F + H) + U$.

(d) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak $\frac{1}{\lambda}U \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + \frac{1}{\lambda}U$. Tudíž $\lambda A \subset \lambda F + \lambda\frac{1}{\lambda}U = \lambda F + U$.

(e) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Podle Tvrzení 12(a) dostáváme, že $\overline{A} \subset A + V \subset F + V + V \subset F + U$.

□

TVRZENÍ 28. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.*

DŮKAZ. Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $U \in \tau(0)$. Pak $K \subset \bigcup_{x \in K}(x + \operatorname{Int} U)$, a tedy díky kompaktnosti K existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že

$$K \subset \bigcup_{x \in F}(x + \operatorname{Int} U) \subset \bigcup_{x \in F}(x + U).$$

Nechť A je totálně omezená a $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$, a nechť $F \subset A$ je konečná množina pro kterou $A \subset F + V$. Jelikož je F konečná, je omezená, a tudíž $F \subset tV$ pro nějaké $t > 0$. Položme $s = \max\{1, t\}$. Díky vyváženosti V pak dostaneme $A \subset F + V \subset tV + V = s\frac{t}{s}V + s\frac{1}{s}V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU$.

□

POZNÁMKA 29. Nechť X je topologický prostor. Uvědomme si, že je-li $\{x_n\} \subset X$ posloupnost, která konverguje k $x \in X$, pak množina $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní. Tedy konvergentní posloupnosti v topologickém vektorovém prostoru jsou omezené (dokonce totálně omezené). Nic z toho ale neplatí pro usměrněné soubory! Vezměme například $\Gamma = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním (pro čtenáře obeznámené s teorií množin poznamenejme, že jde vlastně o ordinální interval $[1, 2\omega)$) a položme $x_{(0,n)} = n$ a $x_{(1,n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = 0$ v $\mathbb{R}$, ale $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ není omezená. Zajímavější příklad usměrněného souboru se stejným chováním je dán následujícím uspořádáním na Γ: $(j, n) \geq (j, m)$ pokud $n \geq m$, $j = 0, 1$, a $(1, n) \geq (0, m)$ pokud $n \geq 2m$. (Snadno ověříme, že Γ je usměrněná množina.)

Následující fakt je užitečné srovnat s Poznámkou 18.

FAKT 30. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou ρ. Pak $A \subset X$ je τ-totálně omezená, právě když je ρ-totálně omezená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak $U_\rho(0, \varepsilon) \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U_\rho(0, \varepsilon)$. To znamená, že F je konečná ε-síť pro A v metrice ρ.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\rho(0, \varepsilon) \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná ε-síť v metrice ρ. Díky translační invariantnosti ρ je $U_\rho(x, \varepsilon) = x + U_\rho(0, \varepsilon)$, z čehož plyne, že

$$A \subset \bigcup_{x \in F} U_\rho(x, \varepsilon) = \bigcup_{x \in F} \big(x + U_\rho(0, \varepsilon)\big) = F + U_\rho(0, \varepsilon) \subset F + U.$$

Tedy A je τ-totálně omezená.

□

DEFINICE 31. Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f \colon X \to Y$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Snadno je vidět, že každé stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

TVRZENÍ 32. *Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f \colon X \to Y$ je stejnoměrně spojité. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.*

DŮKAZ. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$. Dále díky totální omezenosti A existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$. Pak $f(A) \subset f(F + U) = f\big(\bigcup_{y \in F}(y + U)\big) = \bigcup_{y \in F} f(y + U) \subset \bigcup_{y \in F}(f(y) + V) = f(F) + V$.

□

4. Lineární zobrazení

Jedním z ústředních objektů v teorii normovaných lineárních prostorů je spojité lineární zobrazení. V tomto oddílu se podíváme na základní vlastnosti spojitých lineárních zobrazení v rámci topologických lineárních prostorů.

Začneme jednoduchým dodatkem k Faktu 1.44: lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina, podobně vzorem vyvážené množiny při lineárním zobrazení je opět vyvážená množina.

Následující věta je analogií Tvrzení 1.45, ne všechno však platí v obecnějším kontextu stejně.

VĚTA 33. *Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T \colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) T je omezené na nějakém okolí 0.
(ii) T je spojité v 0.
(iii) T je spojité.
(iv) T je stejnoměrně spojité.
(v) T je sekvenciálně spojité.
(vi) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
(vii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.

Pak (i)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Leftrightarrow$(vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizovatelný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 34. *Nechť X je pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.*

DŮKAZ. Dle Věty 22 existuje na X translačně invariantní pseudometrika ρ indukující topologii X. Nalezneme indexy $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ tak, aby $\rho(x_n, 0) \leq \frac{1}{k^2}$ pro každé $n \geq n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme $\gamma_n = k$ pro $n_{k-1} \leq n < n_k$. Pak $\gamma_n \to +\infty$ a pro každé $k > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} \leq n < n_k$ platí díky Faktu 3(b), že

$$\rho(\gamma_n x_n, 0) = \rho(k x_n, 0) \leq k\rho(x_n, 0) \leq \frac{k}{(k-1)^2}.$$

Tedy $\rho(\gamma_n x_n, 0) \to 0$.

□

Poznamenejme, že bez předpokladu pseudometrizovatelnosti předchozí lemma neplatí, vizte Příklad 60.

DŮKAZ VĚTY 33. (iv)⇒(iii)⇒(ii) jsou triviální.

(ii)⇒(iv) Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Ze spojitosti T v 0 plyne existence $U \in \tau_X(0)$ takového, že $T(U) \subset V$. Splňují-li nyní prvky $x, y \in X$ vztah $x - y \in U$, pak $T(x) - T(y) = T(x - y) \in V$.

(i)⇒(ii) Nechť $U \in \tau_X(0)$ je takové, že $T(U)$ je omezená. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $t > 0$ takové, že $T(U) \subset tV$. Množina $\frac{1}{t}U$ je okolím 0 v X a platí, že $T(\frac{1}{t}U) = \frac{1}{t}T(U) \subset \frac{1}{t}tV = V$.

(iii)⇒(v) je zjevná.

(v)⇒(vi) Využijeme charakterizaci omezenosti z Tvrzení 19. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{n}x_n \to 0$. Ze sekvenciální spojitosti T dostáváme, že $\frac{1}{n}y_n = T(\frac{1}{n}x_n) \to 0$. Tvrzení 19 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

(vi)⇒(vii) plyne z toho, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $x_n \to 0$, pak $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (Poznámka 29).

(vii)⇒(vi) Využijeme opět charakterizaci omezenosti z Tvrzení 19. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{\sqrt{n}}x_n \to 0$. Ze (vii) dostáváme, že $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right\} = \left\{T\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n\right)\right\}$ je omezená. Tedy $\frac{1}{n}y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right) \to 0$. Tvrzení 19 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

Předpokládejme nyní, že Y je lokálně omezený a rozmysleme si, že (ii)⇒(i): Nechť $V \subset Y$ je omezené okolí 0. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že $T(U) \subset V$, tedy T je omezené na U.

Konečně, nechť X je pseudometrizovatelný a dokažme, že (vii)⇒(ii). Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0. Dle Lemmatu 34 existuje $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$. Pak je množina $\{T(\gamma_n x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená, a tedy $T(x_n) = \frac{1}{\gamma_n}T(\gamma_n x_n) \to 0$ dle Tvrzení 19. Díky pseudometrizovatelnosti X to znamená, že T je spojitý v 0.

□

Implikace (ii)⇒(i) v předchozí větě nemusí obecně platit, a to ani v metrizovatelném případě: stačí uvažovat prostor měřitelných funkcí X s konvergencí v míře (Příklad 4). Pak identita $Id\colon X \to X$ je zřejmě spojitá, ale není omezená na žádném okolí 0, neboť v prostoru X je každé okolí 0 neomezené (vizte Poznámku 25).

Taktéž implikace (vi)⇒(v) nemusí obecně platit. Příkladem jsou topologie z oddílu 9. Např. zobrazení $Id\colon (c_0, w) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ zobrazuje omezené množiny na omezené (Věta 94), ale není sekvenciálně spojité, neboť $e_n \to 0$ slabě, ale nikoli v normě (Příklad 88).

Konečně, ani implikace (v)⇒(iii) nemusí obecně platit:

PŘÍKLAD 35. Nechť $X = C([0, 1])$ s topologií τ_p bodové konvergence a $Y = C([0, 1])$ s topologií τ_λ konvergence v míře (vizte Příklad 4). Nechť $I\colon X \to Y$ je identické zobrazení. Pak I je sekvenciálně spojité, ale není spojité.

Ukažme nejprve sekvenciální spojitost I. Nechť ρ je metrika z Příkladu 4 indukující topologii τ_λ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konvergující k f v X, tj. $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in [0, 1]$. Pak jsou funkce $g_n = \min\{|f_n - f|, 1\}$ omezené konstantou 1 a bodově konvergují k 0. Z Lebesgueovy věty tedy plyne, že $\rho\big(I(f_n), I(f)\big) = \rho(f_n, f) = \int_0^1 g_n \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, tj. $I(f_n) \to I(f)$ v Y.

Abychom ukázali, že I není spojité, pro libovolnou konečnou množinu $F \subset [0, 1]$ nalezneme spojitou funkci $f_F\colon [0, 1] \to [0, 1]$ takovou, že $f_F(x) = 0$ pro $x \in F$ a $\lambda(\{x \in [0, 1];\ f_F(x) = 1\}) \geq \frac{1}{2}$. Označme $\mathcal{F}$ systém konečných podmnožin $[0, 1]$ a uspořádejme jej vztahem $H \geq F$, pokud $H \supset F$. Pak $\mathcal{F}$ je usměrněná množina a systém $\{f_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ je tak usměrněný soubor v X. Zřejmě $\lim_{F\in\mathcal{F}} f_F = 0$ v X. Na druhou stranu však $\rho\big(I(f_F), I(0)\big) = \rho(f_F, 0) = \int_0^1 f_F \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{1}{2}$ pro každé $F \in \mathcal{F}$, takže $\{I(f_F)\}_{F\in\mathcal{F}}$ nekonverguje k $I(0)$ v Y.

$\diamond$

VĚTA 36. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $f : X \to \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá.*
(ii) $\operatorname{Ker} f$ *je uzavřené.*
(iii) $\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.

DŮKAZ. Zjevně (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Dle předpokladu existuje $x \in X$ a $U \in \tau(0)$ vyvážené tak, že $(x + U) \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$. Pak $f(U)$ je vyvážená množina v $\mathbb{K}$ taková, že $0 \notin f(x) + f(U)$, což speciálně znamená, že $f(U) \neq \mathbb{K}$. Ukážeme, že to znamená, že $f(U)$ je omezená, což dle Věty 33 znamená, že f je spojitá. Pokud by $f(U)$ byla neomezená, nalezli bychom posloupnost $\{\lambda_n\} \in f(U)$ takovou, že $|\lambda_n| \to +\infty$. Díky vyváženosti ovšem obsahuje $f(U)$ s každým svým bodem λ též kruh $B(0, |\lambda|)$. To znamená, že $f(U) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, |\lambda_n|) = \mathbb{K}$, což je spor.

$\square$

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

DEFINICE 37. Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^{\#}$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat algebraickým duálem. Symbolem X^* budeme (ve shodě s Definicí 1.51) značit podprostor $X^{\#}$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojité na X, a budeme jej nazývat topologickým duálem (či jenom duálem).

Podobně jako pro normované lineární prostory zavedeme též pojem izomorfismu:

DEFINICE 38. Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T : X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je homeomorfismus X na Y; říkáme, že T je izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

FAKT 39. *Nechť X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je usměrněný soubor lineárních zobrazení z X do Y. Je-li $T : X \to Y$ bodovou limitou usměrněného souboru $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že dle předpokladu je pro každé $x \in X$ limita $\lim_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(x)$ určena jednoznačně. Nechť $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ze spojitosti vektorových operací v Y plyne, že $T(x + y) = \lim T_\gamma(x + y) = \lim(T_\gamma(x) + T_\gamma(y)) = \lim T_\gamma(x) + \lim T_\gamma(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_\gamma(\alpha x) = \lim \alpha T_\gamma(x) = \alpha \lim T_\gamma(x) = \alpha T(x)$.

$\square$

5. Konečněrozměrné prostory

Následující věta je analogií Věty 1.68.

VĚTA 40. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *X je Hausdorffův a* $\dim X < \infty$.
(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) *X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí* 0.
(iv) *X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.*
(v) *X je pseudometrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.*

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T\colon \mathbb{K}^n \to X$ předpisem
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$
Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní. Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Protože X je Hausdorffův, je množina $\{0\}$ uzavřená. Dále $0 \notin T(S)$ díky prostotě T, dle Věty 10(a) tedy existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V \cap T(S) = \emptyset$. Pak $T^{-1}(V) \subset U_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$: Kdyby existovalo $y \in V$ takové, že $c = \|T^{-1}(y)\|_2 \geq 1$, pak $T^{-1}(\frac{1}{c}y) \in S$, tedy $\frac{1}{c}y \in T(S)$. Díky vyváženosti V je ovšem $\frac{1}{c}y \in V$, což je spor. Zobrazení T^{-1} je tedy omezené na V, což dle Věty 33 znamená, že je spojité.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Je-li $T\colon X \to \mathbb{K}^n$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)})$ okolí nuly (ze spojitosti T), které je kompaktní (ze spojitosti T^{-1}), a tedy totálně omezené (Tvrzení 28).

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť $V \in \tau(0)$ je totálně omezené. Dle Tvrzení 28 a Lemmatu 21 systém $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2^n}V;\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi okolí 0. Dále $\frac{1}{2}V \in \tau(0)$, a tedy existuje konečná $F \subset V$ taková, že $V \subset F + \frac{1}{2}V$. Položme $Y = \operatorname{span} F$. Pomocí matematické indukce ukážeme, že $V \subset Y + \frac{1}{2^n}V$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ to plyne z toho, že $F \subset Y$. Předpokládáme-li nyní platnost tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak
$$V \subset Y + \tfrac{1}{2^n}V \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(F + \tfrac{1}{2}V) \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(Y + \tfrac{1}{2}V) = Y + \tfrac{1}{2^{n+1}}V.$$
Jelikož je $\mathcal{B}$ báze okolí 0, Tvrzení 12(a) implikuje, že $V \subset \overline{Y}$. Dle Důsledku 15 je ovšem Y uzavřený v X, a tedy $V \subset Y$. Jelikož V je pohlcující, plyne odtud, že $Y = X$.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Nechť $I\colon (X, \tau) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus. Definujme $\rho(x, y) = \|I(x) - I(y)\|_2$. Snadno je vidět, že ρ je metrika na X. Dále, je-li $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ usměrněný soubor, pak $x_\gamma \to x$ v metrice ρ, právě když $I(x_\gamma) \to I(x)$ v prostoru $\mathbb{K}^n$, což nastane, právě když $x_\gamma \to x$ v τ, neboť I je homeomorfismus. Tedy ρ indukuje topologii τ.

Nechť dále Y je topologický vektorový prostor a $T\colon X \to Y$ je lineární. Položme $S = T \circ I^{-1}$. Pak $S\colon \mathbb{K}^n \to Y$ je lineární. Ukážeme, že S je spojité, což ihned implikuje spojitost $T = S \circ I$. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báze $\mathbb{K}^n$. Pak $S(x) = \sum_{i=1}^n x_i S(e_i)$ pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Protože „projekce“ $x \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost S.

(iv)$\Rightarrow$(v) je triviální.

(v)$\Rightarrow$(i) Není-li X Hausdorffův, pak existuje $x \in X \setminus \{0\}$, takové, že $x \in \overline{\{0\}}$. Doplníme-li množinu $\{x\}$ na algebraickou bázi vektorového prostoru X, pak snadno zkonstruujeme lineární formu f na X, pro kterou $f(x) \neq 0$. Ta ovšem není spojitá, neboť nesplňuje podmínku, že $f(\overline{\{0\}}) \subset \overline{f(\{0\})} = \{0\}$.

Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Nechť ρ je pseudometrika na X indukující jeho topologii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $U_n = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ okolím nuly, a tedy pohlcující. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti (vynásobením vhodnou konstantou) předpokládat, že $e_{\gamma_n} \in U_n$. To znamená, že $\rho(e_{\gamma_n}, 0) < \frac{1}{n}$, neboli $e_{\gamma_n} \to 0$. Položme $f(e_{\gamma_n}) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem zjevně není spojitá.

□

DŮSLEDEK 41. *Nechť X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.*

DŮKAZ. Nechť (X, τ_1) a (X, τ_2) jsou Hausdorffovy topologické vektorové prostory. Pak dle Věty 40 je $Id\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ homeomorfismus (aplikujeme implikaci (i)$\Rightarrow$(iv) na Id a na Id^{-1}). To znamená, že $\tau_1 = \tau_2$.

□

POZNÁMKA. Poznamenejme, že podmínku pseudometrizovatelnosti z tvrzení (iv) a (v) výše nelze vynechat. Pro každý vektorový prostor X totiž existuje vektorová topologie na X taková, že každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité. Pro čtenáře s hlubšími znalostmi obecné topologie uvádíme následující konstrukci: Nechť $\mathcal{T}$ je množina všech vektorových topologií na X a nechť τ je slabá topologie na X vzhledem k soustavě $\{Id: X \to (X, \sigma);\ \sigma \in \mathcal{T}\}$. Snadno nahlédneme, že (X, τ) je topologický vektorový prostor. Nechť nyní (Y, φ) je topologický vektorový prostor a $T: X \to (Y, \varphi)$ je lineární. Nechť σ je slabá topologie na X vzhledem k $\{T\}$. Snadno je vidět, že $\sigma \in \mathcal{T}$, takže $Id: (X, \tau) \to (X, \sigma)$ je spojitá. Tedy i $T: (X, \tau) \to (Y, \varphi)$ je spojité, neboť je složením zobrazení $Id: (X, \tau) \to (X, \sigma)$ a $T: (X, \sigma) \to (Y, \varphi)$.

6. Lokálně konvexní prostory

Jedním z podstatných nástrojů funkcionální analýzy je Hahnova-Banachova věta a teorie duality. Pro platnost vět Hahnova-Banachova typu je ovšem zjevně nezbytné, aby duální prostor byl netriviální. Pro obecný topologický vektorový prostor toto bohužel zaručeno není (vizte Příklad 54). Pro aplikaci teorie duality je tedy nutné se omezit na jistou podtřídu topologických vektorových prostorů. Jak uvidíme, přirozenou třídou jsou v tomto případě takzvané lokálně konvexní prostory. Jak již sám název napovídá, klíčovou roli bude hrát právě konvexita.

Začněme jednoduchým pozorováním o zachovávání konvexity při vektorových operacích.

FAKT 42. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.*

DŮKAZ. Jsou-li $x, y \in A$ a $\lambda \in [0, 1]$, pak $\lambda\alpha x + (1 - \lambda)\alpha y = \alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in \alpha A$. Dále, jsou-li $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ a $\lambda \in [0, 1]$, pak $\lambda(x_1+y_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2) = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\lambda y_1+(1-\lambda)y_2 \in A + B$.

□

DEFINICE 43. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je absolutně konvexní.

FAKT 44. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A vyvážená, je $\operatorname{conv} A$ *vyvážená, a tedy absolutně konvexní.*
(b) A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \le 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \operatorname{conv} A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \le 1$. Dle Tvrzení 1.17 existují $x_1, \dots, x_n \in A$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, takové, že $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ a $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Pak $\alpha x_j \in A$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha\lambda_j x_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j(\alpha x_j) \in \operatorname{conv} A$. Množina $\operatorname{conv} A$ je tedy vyvážená.

(b) $\Leftarrow$ Konvexita A je zjevná, pro důkaz vyváženosti stačí vzít $\beta = 0$.

$\Rightarrow$ Nechť $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \le 1$. Je-li $\alpha = 0$, pak $\alpha x + \beta y = \beta y \in A$ díky vyváženosti A; analogicky pro $\beta = 0$. V ostatních případech položme $\mu = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}$, $\nu = \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}$. Pak $\mu, \nu > 0$ a $\mu + \nu = 1$. Protože A je vyvážená, platí $\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|} x \in A$ a $\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|} y \in A$. Z konvexity A tedy plyne $\alpha x + \beta y = \mu\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|} x + \nu\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|} y \in A$.

□

FAKT 45. *Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$ pro všechna $x, y \in X$.
(b) Množina $Z = p^{-1}(0)$ je podprostor X. Pro libovolná $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, je $p(x) = p(y)$.
(c) Množiny $\{x \in X;\ p(x) < c\}$ a $\{x \in X;\ p(x) \le c\}$ jsou absolutně konvexní pro každé $c \in [0, +\infty)$.

DŮKAZ. (a) Pro $x, y \in X$ platí, že $p(x) \le p(x-y)+p(y)$ a $p(y) \le p(y-x)+p(x) = p(x-y)+p(x)$, a tedy $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$.

(b) Pro $x, y \in Z$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že $0 \le p(\alpha x + \beta y) \le |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$, a tedy $\alpha x + \beta y \in Z$. Jsou-li $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, pak z (a) plyne, že $|p(x) - p(y)| \le p(x - y) = 0$.

(c) Funkce p je konvexní, tedy všechny její podúrovňové množiny jsou konvexní. Ihned je vidět, že jsou též vyvážené.

□

DEFINICE 46. Nechť X je vektorový prostor a $f : X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je nezáporně homogenní, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \ge 0$.

Všimněme si, že pro každou nezáporně homogenní funkci f platí, že $f(0) = 0$. Dále každý sublineární funkcionál (a speciálně každá pseudonorma) jsou nezáporně homogenní.

FAKT 47. *Nechť X je vektorový prostor a f je nezáporně homogenní funkce na X. Označme $F_c = \{x \in X;\ f(x) \le c\}$ a $G_c = \{x \in X;\ f(x) < c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $c > 0$ jsou množiny F_c a G_c pohlcující a navíc $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.*

DŮKAZ. Nechť $c > 0$ a $x \in X$. Je-li $f(x) \le 0$, pak $f(tx) = tf(x) \le 0 < c$ pro každé $t \ge 0$, tedy $tx \in G_c \subset F_c$. Je-li $f(x) > 0$, pak $f(tx) = tf(x) \le \frac{c}{2} < c$ pro každé $t \in [0, \frac{c}{2f(x)}]$, takže $tx \in G_c \subset F_c$. Množiny F_c a G_c jsou tedy pohlcující. Dále, $cG_1 = \{cx;\ x \in X, f(x) < 1\} = \{cx;\ x \in X, f(cx) < c\} = \{y \in X;\ f(y) < c\} = G_c$, a analogicky pro F_c.

□

Dle předchozího faktu mají všechny podúrovňové množiny (v kladné úrovni) nezáporně homogenní funkce stejný tvar a můžeme se tedy omezit pouze na „kanonickou" množinu na úrovni 1. Dále uvidíme, že naopak každá pohlcující množina již určuje příslušnou *nezápornou* nezáporně homogenní funkci.

DEFINICE 48. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Minkowského[2] funkcionál množiny A je funkce $\mu_A \colon X \to [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\}.$$

Povšimněme si, že μ_A je dobře definovaný, neboť A je pohlcující. Není obtížné si rozmyslet, že je-li X normovaný lineární prostor, pak $\mu_{B_X} = \|\cdot\|$.

Shrňme nyní základní algebraické vlastnosti Minkowského funkcionálu:

VĚTA 49. *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li $B \supset A$, pak $\mu_B \le \mu_A$.
(b) μ_A je nezáporně homogenní.
(c) Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.
(d) Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.
(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \le 1\}$.
(f) Je-li A vyvážená nebo konvexní, pak $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \le 1\}$.
(g) Nechť $p \colon X \to [0, +\infty)$ je nezáporně homogenní a $B \subset X$.
- *Je-li B pohlcující a $B \subset \{x \in X;\ p(x) \le 1\}$, pak $\mu_B \ge p$.*
- *Je-li $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B$, pak $\mu_B \le p$.*

Je-li tedy $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ p(x) \le 1\}$, pak $\mu_B = p$.

DŮKAZ. (a) Je $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} \subset \{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud požadovaná nerovnost ihned plyne.

(b) Nechť $x \in X$ a $t \ge 0$. Pokud $t = 0$, pak $\mu_A(0x) = \mu_A(0) = 0 = 0\mu_A(x)$. Pro $t > 0$ je

$$\begin{aligned} t\mu_A(x) &= t \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, x \in \lambda A\} = \\ &= \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, tx \in t\lambda A\} = \inf\{u > 0;\ tx \in uA\} = \mu_A(tx). \end{aligned}$$

(c) Díky (b) stačí dokázat subaditivitu. Nechť $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existují $0 < \alpha < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ a $0 < \beta < \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2}$ taková, že $x \in \alpha A$ a $y \in \beta A$. Z konvexity A dostáváme, že

$$\frac{x + y}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in A,$$

[2] Hermann Minkowski

a tedy $x + y \in (\alpha + \beta)A$. To znamená, že $\mu_A(x + y) \leq \alpha + \beta < \mu_A(x) + \mu_A(y) + \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(d) Díky (b) a (c) stačí dokázat, že $\mu_A(\alpha x) = |\alpha|\mu_A(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Nechť nejprve $|\alpha| = 1$. Díky vyváženosti A je $\frac{1}{\alpha}A = A$, takže $\mu_A(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0;\ \alpha x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda\frac{1}{\alpha}A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \mu_A(x)$. Je-li nyní $\alpha \in \mathbb{K}$ libovolné nenulové, pak díky (b) a předchozímu je

$$\mu_A(\alpha x) = \mu_A\left(|\alpha|\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = |\alpha|\mu_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = |\alpha|\mu_A(x).$$

(e) Je-li $x \in A$, pak $x \in 1A$, takže $\mu_A(x) \leq 1$.

(f) Díky (e) stačí ukázat první inkluzi. Je-li $x \in X$ takové, že $\mu_A(x) < 1$, pak existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že $x \in \lambda A$. Díky předpokladům na A je $\lambda A \subset A$, takže $x \in A$.

(g) Nechť nejprve B je pohlcující a $B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$. Zvolme pevně $x \in X$. Je-li $\lambda > 0$ takové, že $x \in \lambda B$, pak $\frac{1}{\lambda}x \in B$, takže $p(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$, neboli $p(x) \leq \lambda$. Tedy $p(x)$ je dolní závora množiny $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud plyne, že $p(x) \leq \mu_B(x)$.

Nechť nyní $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B$. Z Faktu 47 plyne, že B je pohlcující. Zvolme pevně $x \in X$. Protože p je nezáporná, existuje posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ taková, že $\lambda_n > p(x)$ a $\lambda_n \to p(x)$. Pak $p\big(\frac{1}{\lambda_n}x\big) < 1$, takže $\frac{1}{\lambda_n}x \in B$, neboli $x \in \lambda_n B$, čili $\mu_B(x) \leq \lambda_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o limitě a nerovnostech tak je $\mu_B(x) \leq p(x)$.

□

Všimněme si, že z (g) speciálně plyne, že je-li $A \subset X$ pohlcující, pak pro $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ je $\mu_B = \mu_A$.

Nyní se podívejme na některé topologické vlastnosti výše zkoumaných pojmů.

TVRZENÍ 50. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak* $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$. *Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak*

$$\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}.$$

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Díky spojitosti násobení skalárem existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $(1+\varepsilon)x \in \operatorname{Int} A \subset A$. Dle Věty 49(b) a (e) tedy $\mu_A(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\mu_A\big((1 + \varepsilon)x\big) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Nechť nyní A je vyvážená nebo konvexní. První tři inkluze plynou z předchozího a Věty 49(f). Nechť tedy pro $x \in X$ platí, že $\mu_A(x) \leq 1$. Pak pro každé $t \in (0, 1)$ platí, že $tx \in A$: Vskutku, $\mu_A(tx) = t\mu_A(x) \leq t < 1$, takže $tx \in A$ dle Věty 49(f). Tedy $\frac{n}{n+1}x \in A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{n}{n+1}x \to x$, což znamená, že $x \in \overline{A}$.

□

LEMMA 51. *Nechť X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí* 0.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $U \in \tau(0)$ a $C > 0$ jsou taková, že U je symetrické a $p(z) \leq C$ pro $z \in U$. Položme $V = \frac{\varepsilon}{C}U$. Pak V je okolí 0. Pro $x, y \in X$ taková, že $x - y \in V$, pak platí, že $\frac{C}{\varepsilon}(x - y) \in U$ a $\frac{C}{\varepsilon}(y - x) \in U$, takže díky sublinearitě dostáváme, že

$$-\varepsilon \leq -\frac{\varepsilon}{C}p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(y - x)\big) = -p(y - x) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y) = \frac{\varepsilon}{C}p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(x - y)\big) \leq \varepsilon.$$

□

Uvědomme si, že výše uvedené lemma lze aplikovat též na lineární funkcionály na *reálném* prostoru.

DŮSLEDEK 52. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je spojitý, právě když A je okolím* 0. *V tom případě pak platí, že*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} = \overline{A}.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Množina $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ je zjevně otevřené okolí 0, takže $A \in \tau(0)$ dle Věty 49(f).

$\Leftarrow$ plyne z Věty 49(c) a (e) a Lemmatu 51.

Konečně, inkluze $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ plyne z Tvrzení 50, opačná inkluze pak z toho, že $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A$ a množina vlevo je otevřená. Analogicky, inkluze $\{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}$

plyne opět z Tvrzení 50, opačná inkluze pak z toho, že $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ a množina vpravo je uzavřená.

□

VĚTA 53. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje konvexní okolí* 0 *různé od X.*

DŮKAZ. Je-li $f \in X^*$, $f \neq 0$, pak $U = f^{-1}\big(U_{\mathbb{K}}(0,1)\big)$ je zjevně konvexní okolí 0 různé od X, neboť jistě existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = 1$. Opačná implikace je přímým důsledkem oddělovací věty, její důkaz tedy odložíme až na str. 109.

□

PŘÍKLAD 54 (Mahlon Marsh Day (1940)). Nechť μ je míra a $p \in (0,1)$. Položme $X = L_p(\mu)$ a definujme $\rho(f,g) = \int |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále, je-li μ Lebesgueova míra na $[0,1]$, tj. $X = L_p([0,1])$, pak prostor X má následující vlastnost: Je-li $A \subset X$ neprázdná otevřená konvexní množina, pak $A = X$. To podle Věty 53 znamená, že $X^* = \{0\}$.

Označme $q(f) = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$, $f \in X$. Pak $q(f+g) \leq q(f) + q(g)$ pro každé $f, g \in X$. (To platí díky tomu, že funkce $t \mapsto t^p$ je subaditivní, neboť je konkávní a v 0 nezáporná.) Odtud snadno dostáváme, že X je vektorový podprostor prostoru měřitelných funkcí a $\rho(f,g) = q(f-g)$ je translačně invariantní metrika. (Uvědomme si ale, že na rozdíl od případu $p \geq 1$ funkce $q^{1/p}$ není norma.) Úplnost ρ se dokáže zcela stejně jako pro $p \geq 1$, vizte např. [R, Důkaz Věty 3.11]. Abychom ukázali, že ρ generuje vektorovou topologii, stačí dle Faktu 3 ukázat spojitost násobení skalárem. Nechť $f_n \to f$ v ρ a $\alpha_n \to \alpha$ v $\mathbb{K}$. Pak

$$\rho(\alpha_n f_n, \alpha f) \leq \rho(\alpha_n f_n, \alpha_n f) + \rho(\alpha_n f, \alpha f) = |\alpha_n|^p \rho(f_n, f) + |\alpha_n - \alpha|^p q(f) \to 0.$$

Báze okolí 0 je tvořena množinami $B(0,r)$, $r > 0$. Ukážeme, že $B(0,1)$ je omezené okolí 0. Nechť tedy $U \in \tau(0)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $B(0,r) \subset U$. Je-li $f \in B(0,1)$, pak $r^{1/p} f \in B(0,r)$, a tedy $B(0,1) \subset r^{-1/p} B(0,r) \subset r^{-1/p} U$.

Předpokládejme nyní, že $X = L_p([0,1])$. Stačí ukázat, že X nemá jiné konvexní okolí 0 než X. Nechť tedy $U \in \tau(0)$ je konvexní a $r > 0$ je takové, že $B(0,r) \subset U$. Nechť $f \in X$ je libovolná. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < r$. Tvrdíme, že existuje dělení $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Vskutku, funkce $G(x) = \int_0^x |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$ je neklesající na $[0,1]$, spojitá a splňuje $G(0) = 0$ a $G(1) = \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$. Dle věty o nabývání mezihodnot tedy existují $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ tak, že $G(x_j) = \frac{j}{n} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda$ pro $j = 1, \dots, n$. Položme nyní $g_j = n \chi_{(x_{j-1}, x_j]} f$. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí, že

$$\int_0^1 |g_j|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int_{x_{j-1}}^{x_j} n^p |f|^p \,\mathrm{d}\lambda = n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < r,$$

to jest $g_j \in B(0,r) \subset U$. Protože však $f = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g_j$, je $f \in U$. Tím jsme dokázali, že $U = X$.

◇

Jak jsme viděli v předchozím příkladu, může být duální prostor k netriviálnímu topologickému vektorovému prostoru triviální. V předchozích kapitolách jsme viděli velkou užitečnost tvrzení typu Hahnovy-Banachovy věty; takové věty ovšem nemohou platit, pokud není duální prostor dostatečně bohatý. Proto z obecných topologických prostorů vydělíme užitečnou třídu, která nám zajistí dostatečný přísun spojitých lineárních funkcionálů. Jak je patrno z Věty 53, klíčem jsou netriviální konvexní okolí 0.

DEFINICE 55.

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní[3], pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná úplnou translačně invariantní metrikou, nazveme Fréchetův.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je normovatelný, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Příkladem lokálně konvexních prostorů jsou například normované lineární prostory. V případě Banachových prostorů jsou to pak Fréchetovy prostory, neboť $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je úplná translačně invariantní metrika.

POZNÁMKA. Lokálně konvexní prostory jsou úplně regulární, neboť každý topologický vektorový prostor je úplně regulární. Pro lokálně konvexní prostory to ovšem snadno dokážeme bez hlubších znalostí topologie pomocí Minkowského funkcionálu: Nechť X je lokálně konvexní, $y \in X$ a $F \subset X$ je uzavřená množina neobsahující y. Nechť $C \in \tau(0)$ je konvexní množina splňující $(y + C) \cap F = \emptyset$. Pak $\mu_C \geq 1$ na $F - y$, což plyne z Věty 49(f). Protože μ_C je spojitý (Důsledek 52), je $f(x) = \min\{\mu_C(x - y), 1\}$ spojitá funkce do $[0, 1]$, pro kterou $f(y) = 0$ a $f = 1$ na F.

TVRZENÍ 56. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.*

DŮKAZ. Položme $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$. Pak A je absolutně konvexní množina: konvexita se snadno nahlédne, pro důkaz vyváženosti vezměme libovolné $r \in [0, 1]$ a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$. Pak $rU \subset U$, neboť U je konvexní a $0 \in U$, a tedy

$$(r\beta)A = \bigcap_{|\alpha|=1} (r\beta)\alpha U = \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma r U \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U = A.$$

Zvolme nyní $W \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $W \subset U$. Pak $\frac{1}{\alpha} W \subset W \subset U$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, což znamená, že $W \subset A$. Tedy $0 \in \operatorname{Int} W \subset \operatorname{Int} A$. Dle Tvrzení 12(e), (g) je tak $V = \operatorname{Int} A$ absolutně konvexní otevřené okolí 0 a $V \subset A \subset U$.

□

DŮSLEDEK 57. *V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin a též bázi sestávající z uzavřených absolutně konvexních pohlcujících množin.*

DŮKAZ. První část plyne z Tvrzení 56 a 7(a). Druhá část plyne z regularity topologie τ (každý regulární prostor má bázi okolí sestávající z uzavřených množin) spolu s první částí a s Tvrzením 12(e), (f).

□

Nechť X je vektorový prostor, $p_1, \dots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X;\ p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}$$

a uvědomme si, že dle Faktů 45(c) a 47 je tato množina absolutně konvexní a pohlcující.

VĚTA 58. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je neprázdný systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:*
(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.
(b) Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.
(c) Usměrněný soubor $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.
Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.

Na druhou stranu, je-li (X, τ) lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$.

[3] Poprvé je studoval John von Neumann (1935), název zavedl Andrej Nikolajevič Tichonov (Андрей Николаевич Тихонов) (1935).

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že systém $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 8. Každá z množin $U_{p,\varepsilon}$ obsahuje 0, takže $\mathcal{S}$ je subbází filtru. Dále jsou-li $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, pak pro $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ je $\bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon} = U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset \bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon_j}$, tedy $\mathcal{U}$ je bází dotyčného filtru. Jsou-li $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ a položíme-li $V = U_{p_1,\dots,p_n,\frac{\varepsilon}{2}}$, pak snadno nahlédneme, že $V + V \subset U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$. Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená a pohlcující, dle Věty 8 tedy existuje právě jedna vektorová topologie τ na X taková, že $\mathcal{U}$ je bází $\tau(0)$. Navíc množiny z $\mathcal{U}$ jsou absolutně konvexní, takže τ je lokálně konvexní.

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je zjevně omezená na $U_{p,1}$, takže je spojitá dle Lemmatu 51.

(b) $\Rightarrow$ Nechť $p \in \mathcal{P}$ je dána. Pak existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU_{p,1}$. Pro libovolné $x \in A$ pak platí, že $\frac{x}{t} \in U_{p,1}$, a tedy $p(x) < t$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno a nechť $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ jsou taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Pak existují $M_j > 0$ taková, že $p_j \le M_j$ na A pro $j = 1, \dots, n$. Zvolme $t > \max\{\frac{1}{\varepsilon}M_j;\ j = 1, \dots, n\}$. Pak pro $x \in A$ je $p_j(\frac{x}{t}) < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$, takže $x \in tU_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset tU$.

(c) $\Rightarrow$ plyne z (a).

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je usměrněný soubor a $x \in X$ je takové, že $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro všechny $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \ge \gamma_0$ je $p_j(x_\gamma - x) < \varepsilon$, $j = 1, \dots, n$. Pak pro $\gamma \ge \gamma_0$ je $x_\gamma - x \in U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. To znamená, že $x_\gamma \to x$ v τ.

Nechť nyní (X, τ) je lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin. Označme σ topologii generovanou systémem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$. Je-li $V \in \mathcal{V}$, pak $U_{\mu_V,1} \subset V$ dle Věty 49(f). Odtud dostáváme, že $\tau(0) \subset \sigma(0)$.

Na druhou stranu, pro každé $V \in \mathcal{V}$ a $\varepsilon > 0$ je množina $U_{\mu_V,\varepsilon} = \varepsilon U_{\mu_V,1}$ otevřená v τ (Fakt 47, Důsledek 52), odkud snadno plyne, že $\sigma(0)$ má bázi sestávající z τ-otevřených množin. Tedy $\sigma(0) \subset \tau(0)$. □

Uvědomme si, že ze spojitosti každé pseudonormy $p \in \mathcal{P}$ ve větě výše plyne τ-otevřenost množin systému $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ 59. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je Hausdorffův.
(ii) Každý systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ má následující vlastnost:
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.
(iii) Existuje systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ s vlastností z tvrzení (ii).

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující τ a nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $x \notin U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$. Tedy $p_j(x) \ge \varepsilon > 0$ alespoň pro jedno $j \in \{1, \dots, n\}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je libovolné a $p \in \mathcal{P}$ je takové, že $\varepsilon = p(x) > 0$. Pak $x \notin U_{p,\varepsilon} \in \tau(0)$. Prostor X je tedy Hausdorffův dle Věty 10(c). □

PŘÍKLAD 60. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina a nechť $X = \mathbb{K}^\Gamma$ s topologií τ generovanou systémem pseudonorem $\{p_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$, kde $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|$ pro $f \in X$. Snadno je vidět, že p_γ jsou opravdu pseudonormy, a že pro libovolný usměrněný soubor $\{f_\alpha\} \subset X$ platí, že $f_\alpha \to f$, právě když $f_\alpha \to f$ bodově na Γ. Tedy τ je topologie bodové konvergence na Γ (nebo též součinová topologie na $\mathbb{K}^\Gamma$) a je to Hausdorffova lokálně konvexní topologie.

Nechť $\Gamma = [0, 1]$. Tvrdíme, že existuje posloupnost $\{f_n\} \subset X = \mathbb{K}^{[0,1]}$ konvergující k 0 taková, že $\lambda_n f_n \not\to 0$ pro žádnou posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ takovou, že $\lambda_n \to +\infty$. (Z Lemmatu 34 tedy plyne, že X není metrizovatelný.) Označme $\Lambda = \big\{\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty);\ \lambda_n \to +\infty\big\}$. Pak Λ má kardinalitu kontinua (například obsahuje posloupnosti $\{n + \chi_A(n)\}$ pro $A \subset \mathbb{N}$), a tedy existuje bijekce $\Phi\colon \Lambda \to [0, 1]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ položme

$$f_n(x) = \frac{1}{\Phi^{-1}(x)_n}.$$

Pro pevné $x \in [0,1]$ pak $f_n(x) \to 0$, nicméně pro každou posloupnost $\{\lambda_k\} \in \Lambda$ platí, že $\lambda_n f_n\big(\Phi(\{\lambda_k\})\big) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\lambda_n f_n \not\to 0$.

◇

Víme, že topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí 0 je pseudometrizovatelný (Věta 22). Pro lokálně konvexní prostory je důkaz tohoto tvrzení mnohem jednodušší.

LEMMA 61. *Nechť (X,τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak*
$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x-y), 1\}$$
je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ.

DŮKAZ. Ze subaditivity funkce $t \mapsto \min\{t,1\}$ snadno plyne, že ρ je translačně invariantní pseudometrika. Všechny pseudonormy p_n jsou τ-spojité (Věta 58(a)) a řada v definici ρ konverguje stejnoměrně na $X \times X$, což znamená, že ρ je τ-spojitá. Odtud plyne, že každé ρ-okolí 0 je v $\tau(0)$.

Na druhou stranu, nechť $U \in \tau(0)$. Pak existují $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in (0,1]$ taková, že $U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Položme $m = \max\{n_1,\dots,n_k\}$. Pak $U_\rho(0,\frac{\varepsilon}{2^m}) \subset U$. Vskutku, je-li $x \in X$, $\rho(x,0) < \frac{\varepsilon}{2^m}$, pak $\frac{1}{2^{n_j}} \min\{p_{n_j}(x),1\} < \frac{\varepsilon}{2^m}$ pro každé $j \in \{1,\dots,k\}$. Odtud snadno plyne, že $p_{n_j}(x) < \varepsilon$ pro každé $j \in \{1,\dots,k\}$, neboli $x \in U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Tedy každé τ-okolí 0 je i ρ-okolím 0.

□

PŘÍKLAD 62. Nechť T je topologický prostor a nechť $X = C(T)$ s topologií τ stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T z Příkladu 9. Pro neprázdnou kompaktní $K \subset T$ a $f \in X$ položme $p_K(f) = \max_K |f|$. Pak systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{p_K;\ K \subset T$ neprázdná kompaktní$\}$ generuje τ, takže X je lokálně konvexní. Uvědomme si, že topologie bodové konvergence na X je slabší než τ, neboť jednobodové podmnožiny T jsou kompaktní. Speciálně, τ je Hausdorffova. Dále platí:

(a) Jestliže v T existuje posloupnost neprázdných kompaktů $\{K_n\}$ taková, že každá kompaktní $K \subset T$ je podmnožinou nějaké K_n, pak systém $\mathcal{Q} = \{p_{K_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ také generuje τ.

(b) Je-li T lokálně kompaktní se spočetnou bází, pak X je Fréchetův prostor a topologie τ je topologií lokálně stejnoměrné konvergence.

Snadno nahlédneme, že p_K jsou pseudonormy. Dle Věty 58 tedy systém $\mathcal{P}$ generuje τ a τ je lokálně konvexní.

(a) Označme σ topologii generovanou systémem $\mathcal{Q}$. Jelikož $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, je zjevně $\sigma(0) \subset \tau(0)$. Je-li nyní $U \in \tau(0)$ dáno, pak existují kompakty $L_1,\dots,L_k \subset T$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\bigcup_{j=1}^k L_j \subset K_n$. Snadno je vidět, že $U_{p_{K_n},\varepsilon} \subset U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$, a tedy $U \in \sigma(0)$.

(b) Dle Tvrzení 15.61 existuje posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ jako v (a), pro kterou navíc platí, že $K_n \subset K_{n+1}$. Nechť ρ je metrika z Lemmatu 61 daná pseudonormami $\{p_{K_n}\}$. Dle (a) tato metrika generuje τ. Ukažme, že ρ je úplná. Nechť $\{f_j\} \subset X$ je ρ-cauchyovská posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak posloupnost $\{f_j \restriction_{K_n}\}_{j=1}^\infty$ cauchyovská v úplném prostoru $(C(K_n), \|\cdot\|_\infty)$, takže existuje funkce $g_n \in C(K_n)$ taková, že $f_j \restriction_{K_n} \rightrightarrows g_n$ na K_n. Jelikož je posloupnost $\{K_n\}$ neklesající, nutně platí, že $g_k \restriction_{K_n} = g_n$ pro $k > n$. Odtud snadno odvodíme existenci funkce $f\colon T \to \mathbb{K}$ takové, že $f_j \restriction_{K_n} \rightrightarrows f \restriction_{K_n}$ na K_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně, $f \restriction_{K_n}$ je spojitá.

Tvrdíme, že $f \in C(T)$. Nechť $x \in T$ je dáno. Nechť V je kompaktní okolí bodu x a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $V \subset K_n$. Jelikož f je spojitá na K_n, je spojitá na V, a tedy i v bodě x.

Konečně, dle úvah výše je $\lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j - f) = \lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j \restriction_{K_n} - f \restriction_{K_n}) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\rho(f_j, f) \to 0$, což znamená, že metrika ρ je úplná.

◇

PŘÍKLAD 63. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$. Pak prostor $H(\Omega)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence je uzavřeným podprostorem $C(\Omega)$ z předchozího příkladu. Je to tedy také Fréchetův prostor. Stačí si uvědomit, že lokálně stejnoměrná limita posloupnosti holomorfních funkcí je opět holomorfní funkce.

◇

VĚTA 64 (A. N. Kolmogorov (1934)). *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak X je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li X Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí* 0.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a omezené. Dle Tvrzení 56 existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$, tedy V je omezené. Pak pseudonorma μ_V generuje τ. Vskutku, systém $\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bází okolí 0 v topologii generované pseudonormou μ_V. Ale $\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}U_{\mu_V,1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}V\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Fakt 47, Důsledek 52), což je báze $\tau(0)$ dle Lemmatu 21.

$\Rightarrow$ Je-li τ generována nějakou pseudonormou p na X, je $U_{p,1}$ konvexní okolí 0, které je τ-omezené dle Věty 58(b).

□

Tento oddíl uzavřeme tvrzením, které se nám bude hodit později.

TVRZENÍ 65. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*
(a) Je-li A omezená, je i množina conv A *omezená.*
(b) Je-li A totálně omezená, je i množina conv A *totálně omezená.*

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $C \in \tau(0)$ takové, že $C \subset U$. Protože A je omezená, existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tC$. Množina vpravo je ovšem konvexní, což znamená, že $\operatorname{conv} A \subset tC \subset tU$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Množina $\operatorname{conv} F$ je kompaktní, neboť je spojitým obrazem kompaktu $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n;\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$ při zobrazení $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, kde $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Je tedy totálně omezená (Tvrzení 28), takže existuje $H \subset X$ konečná taková, že $\operatorname{conv} F \subset H + V$. Dle Faktu 42 je množina $(\operatorname{conv} F) + V$ konvexní, odkud plyne, že $\operatorname{conv} A \subset \operatorname{conv}(F + V) \subset (\operatorname{conv} F) + V \subset H + V + V \subset H + U$.

□

Poznamenejme, že bez předpokladu lokální konvexity předchozí tvrzení neplatí – konvexní obal totálně omezené množiny nemusí být ani omezený:

PŘÍKLAD 66. Nechť $p \in (0,1)$ a $X = \ell_p = \{x = (x_n);\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$ s metrikou $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále platí:
(a) Prostor X^* lze indentifikovat s prostorem ℓ_∞ pomocí lineární bijekce $I : \ell_\infty \to X^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

(b) Existuje kompaktní množina $K \subset X$, jejíž konvexní obal není omezený.

Prostor X není lokálně konvexní (Tvrzení 65 spolu s (b)), ale přesto má netriviální duál, který odděluje body X (stačí vzít souřadnicové funkcionály). Tedy X obsahuje mnoho netriviálních otevřených konvexních množin, nicméně ne dost na to, aby to byl lokálně konvexní prostor.

První část plyne z Příkladu 54, vezmeme-li za μ aritmetickou míru na $\mathbb{N}$.

(a) Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ je $\{x_n\}$ omezená a označíme-li $M = \|x\|_\infty$, pak

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| = \sum_{n=1}^\infty M \left|\frac{x_n}{M} y_n\right| \le M\|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{x_n}{M}\right|^p = M^{1-p}\|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p, \tag{1}$$

neboť $\left|\frac{x_n}{M}\right| \le 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární. Tvrdíme, že je omezený na $U(0,1)$: Pro každé $x \in U(0,1)$ je $\|x\|_\infty \le 1$, a tedy nerovnost (1) implikuje, že $|f_y(x)| \le \|y\|_\infty$. To znamená, že f_y je spojitý lineární funkcionál (Věta 33).

Linearita zobrazení I je zřejmá. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in X^*$. Stejně jako pro $p \ge 1$ definujeme kanonické bázové vektory $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, a snadno si rozmyslíme, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ opět platí, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v metrice ρ.

Vskutku, $\rho\big(x, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\big) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Množina $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (snadno nahlédneme z definice), takže i posloupnost $\{y_n\}$ je omezená (Věta 33), neboli $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in X$. Pak $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

Konečně, protože $I(y)(e_n) = y_n$, je $\operatorname{Ker} I = \{0\}$, a tedy I je prosté.

(b) Zvolme nerostoucí posloupnost $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ konvergující k 0, pro kterou $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} c_n^p = +\infty$. (Stačí například položit $c_n = (1 + \log n)^{-1}$ nebo $c_n = n^{p-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.) Pak $c_n e_n \to 0$, neboť $\rho(c_n e_n, 0) = c_n^p \to 0$. Množina $K = \{c_n e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ je tedy kompaktní. Položíme-li však $x^m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} c_n e_n$ pro $m \in \mathbb{N}$, dostaneme prvky $\operatorname{conv} K$, které splňují

$$\rho(x^m, 0) = \sum_{n=1}^{m} \left|\frac{1}{m} c_n\right|^p \geq \frac{1}{m^p} \sum_{n=1}^{m} c_m^p = m^{1-p} c_m^p \to +\infty.$$

Dle Poznámky 18 je tak množina $\operatorname{conv} K$ neomezená v topologii generované metrikou ρ.

◇

7. Oddělovací věty

V tomto oddílu se budeme věnovat dalším zásadním důsledkům Hahnovy-Banachovy věty. Jednoduchým předchůdcem níže uvedených oddělovacích vět je Věta 2.7. Vzhledem ke znění Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) není překvapivé, že hlavní roli zde hraje konvexita (vizte též Větu 53).

LEMMA 67. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in f(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ je takový, že $y = f(x)$. Pak existuje vyvážené $U \in \tau(0)$ takové, že $x + U \subset G$. Dále existuje $w \in X$, pro které $f(w) = 1$. Protože U je pohlcující, existuje $\delta > 0$ takové, že $\delta w \in U$. Pak díky vyváženosti U platí, že

$$\begin{aligned} U(y, \delta) &= y + \{\lambda\delta;\ |\lambda| < 1\} = f(x) + \{f(\lambda\delta w);\ |\lambda| < 1\} = \\ &= f\big(x + \{\lambda\delta w;\ |\lambda| < 1\}\big) \subset f(x + U) \subset f(G). \end{aligned}$$

Tedy $f(G)$ je otevřená.

□

VĚTA 68. [4] *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.
(b) Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce $\sup_A |f| < \inf_B \operatorname{Re} f$.

DŮKAZ. Je-li A nebo B prázdná, pak tvrzení zřejmě triviálně platí. Můžeme tedy předpokládat, že A i B jsou neprázdné. Díky Tvrzení 2.1 stačí (a) a první část (b) dokázat pouze pro reálné prostory a v komplexním případě pak vzít funkcionál $h(x) = f(x) - i f(ix)$.

(a) Zvolme $a \in A$ a $b \in B$ a označme $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak C je otevřená konvexní množina (Tvrzení 11(a), Fakt 42), pro kterou $0 \in C$ a $w \notin C$ (neboť $A \cap B = \emptyset$). Podle Věty 49(c) a (f) je μ_C sublineární funkcionál, $\mu_C \leq 1$ na C a $\mu_C(w) \geq 1$. Položíme-li $Y = \operatorname{span}\{w\}$ a $g(tw) = t$ pro $t \in \mathbb{R}$, pak

[4] Tato věta byla dokázána v různě silných formulacích mnoha matematiky: První verze pochází od Stanisława Mazura (1933), který formuloval tvrzení podobné (a) v normovaných lineárních prostorech pro B podprostor X. Zobecnění Mazurovy věty do topologických vektorových prostorů provedl Jean Dieudonné (1941) a skupina Nicolas Bourbaki. Verzi pro B konvexní v normovaných lineárních prostorech dokázal Meier „Maks“ Eidelheit (1936). Námi uvedený důkaz, který v podstatě převádí konvexní případ na Mazurovu větu, podal John Wilder Tukey (1942).

g je lineární funkcionál na Y. Dále $g(tw) = t \le t\mu_C(w) = \mu_C(tw)$ pro $t \ge 0$ a $g(tw) = t < 0 \le \mu_C(tw)$ pro $t < 0$, tedy $g(x) \le \mu_C(x)$ pro každé $x \in Y$. Podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(a)) existuje lineární forma f na X, která rozšiřuje g a splňuje $f \le \mu_C$ na X. Speciálně $f(x) \le \mu_C(x) \le 1$ pro $x \in C$, tedy f je spojitý lineární funkcionál (Lemma 51), pro který $f(w) = g(w) = 1$.

Nechť nyní $x \in A$ a $y \in B$. Pak $x - y + w \in C$, takže $f(x) = f(y) + f(x - y + w) - f(w) \le f(y) + \mu_C(x - y + w) - 1 \le f(y)$. Odtud plyne, že $f(x) \le \alpha = \inf_B f$ pro každé $x \in A$. Množina $f(A)$ je ovšem otevřená (Lemma 67), takže kdyby pro nějaké $x \in A$ bylo $f(x) = \alpha$, pak by existovalo $y \in A$, pro které by $f(y) > \alpha$, což nejde. Tím je nerovnost z (a) dokázána.

(b) Jelikož je X lokálně konvexní prostor, existuje díky Větě 10(a) a Důsledku 57 otevřené konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $(B + V) \cap A = \emptyset$. Množina $B + V$ je otevřená a konvexní (Tvrzení 11(a), Fakt 42). Dle (a) tedy existuje $g \in X^*$ takový, že $g(x) < \inf_A g$ pro každé $x \in B + V$. Díky kompaktnosti B existuje $x \in B$, pro které $\max_B g = g(x) < \inf_A g$. Funkcionál $f = -g$ tak splňuje inzerovanou nerovnost.

Konečně, předpokládejme, že je navíc A absolutně konvexní. Nechť $y \in A$ je libovolné. Pak existuje $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|f(y)| = \alpha f(y) = f(\alpha y) = \operatorname{Re} f(\alpha y)$. Protože $\alpha y \in A$, je $|f(y)| = \operatorname{Re} f(\alpha y) \le \sup_A \operatorname{Re} f$. Odtud plyne, že $\sup_A |f| \le \sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

□

Následující důsledek je analogií Důsledku 2.5 a Vět 2.7 a 2.4 pro lokálně konvexní prostory.

DŮSLEDEK 69. *Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:*
(a) Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.
(b) Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.
(c) Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F\restriction_Y = f$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$. Použitím Věty 68(b) pro $A = \{x\}$ a $B = \{y\}$ obdržíme $f \in X^*$ takový, že $f(x) \ne f(y)$.

(b) Položme $A = Y$ a $B = \{x\}$. Dle Věty 68(b) existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_Y |f| < \operatorname{Re} f(x)$. Pak f je lineární funkcionál, který je omezený na celém vektorovém prostoru Y, a tedy je na Y nulový. Zjevně $f(x) \ne 0$, na závěr tedy stačí vynásobit f konstantou $\frac{1}{f(x)}$.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \ne 0$. Tedy existuje $x \in Y$, pro které $f(x) = 1$. Z hlediska prostoru X je množina $\operatorname{Ker} f$ relativně uzavřená v Y a $x \in Y \setminus \operatorname{Ker} f$. Odtud plyne, že $x \notin \overline{\operatorname{Ker} f}^X$, přičemž množina vpravo je uzavřený podprostor X. Dle (b) tedy existuje $F \in X^*$ takový, že $F(x) = 1$ a $F\restriction_{\operatorname{Ker} f} = 0$. Tvrdíme, že to znamená, že $F\restriction_Y = f$: Nechť $y \in Y$. Pak $y - f(y)x \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} F$, a tedy $F(y) = F(y - f(y)x) + F(f(y)x) = f(y)F(x) = f(y)$.

□

DŮKAZ VĚTY 53. Nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a $U \ne X$. Pak existuje $x \in X \setminus U$. Množina $\operatorname{Int} U$ je konvexní (Tvrzení 12(e)) a obsahuje 0, tedy dle Věty 68(a) použité na množiny $\operatorname{Int} U$ a $\{x\}$ existuje $f \in X^*$ takový, že $0 = \operatorname{Re} f(0) < \operatorname{Re} f(x)$. Tudíž $f \ne 0$.

□

Následující příklady ukazují, že bez dodatečných předpokladů na množiny A, B ve Větě 68 se nelze obejít.

PŘÍKLAD 70. Nechť X je nekonečněrozměrný pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Pak v něm existuje kontinuum mnoho disjunktních konvexních množin (dokonce afinních podprostorů) $Z_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, z nichž každá je hustá v X. Žádné dvě tedy nelze oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

Skutečně, dle Věty 40 existuje nespojitý lineární funkcionál $f\colon X \to \mathbb{K}$. Položme $Z_\alpha = f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Existuje $w \in X$ takové, že $c = f(w) \ne 0$. Pak $Z_\alpha = \frac{\alpha}{c} w + \operatorname{Ker} f$, tedy Z_α je afinní podprostor. Zjevně Z_α a Z_β jsou disjunktní, je-li $\alpha \ne \beta$. Konečně, $Z_0 = \operatorname{Ker} f$ je hustý v X dle Věty 36 a ostatní Z_α jsou husté v X dle Tvrzení 5(a).

◇

PŘÍKLAD 71 (John Wilder Tukey (1942)). Existují disjunktní uzavřené konvexní množiny $A, B \subset \ell_2$ takové, že $A - B$ je hustá v ℓ_2. Tyto množiny tedy nelze oddělit spojitým nenulový lineárním funkcionálem ani v nejslabším smyslu, tj. neexistuje $f \in \ell_2^* \setminus \{0\}$ tak, aby $f(x) \geq f(y)$ pro libovolná $x \in A$, $y \in B$. Vskutku, to by znamenalo, že $f(A-B) \subset [0,+\infty)$, ale $\mathbb{R} = f(\ell_2) = f(\overline{A-B}) \subset \overline{f(A-B)} \subset [0,+\infty)$, což je spor.

Položme

$$A = \left\{x \in \ell_2;\ x_1 \geq n \cdot \left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| \text{ pro } n \geq 2\right\},$$
$$B = \{x \in \ell_2;\ x_n = 0 \text{ pro } n \geq 2\}.$$

Snadno nahlédneme, že A je konvexní a uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a B je dokonce uzavřený jednorozměrný podprostor. Dále, je-li $x \in B$, pak pro $n \geq 2$ je $n\left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| = n^{\frac{1}{3}} \to +\infty$, takže $x \notin A$. Tedy A a B jsou disjunktní.

Zvolme nyní $z \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ libovolně. Existuje $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ takové, že $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} < \frac{\varepsilon^2}{4}$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Definujme

$$x_n = \begin{cases} \max_{2\leq j\leq k} j\left|z_j - \frac{1}{j^{\frac{2}{3}}}\right| & \text{pro } n = 1,\\ z_n & \text{pro } 2 \leq n \leq k,\\ \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} & \text{pro } n > k. \end{cases}$$

Snadno je vidět, že $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$. Dále položme $y = (x_1 - z_1, 0, 0, \dots) \in B$. Pak

$$\|z - (x-y)\| = \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(z_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} < \varepsilon.$$

◇

8. Součiny prostorů, kvocienty, projekce a doplňky

V tomto oddílu představíme součin a kvocient topologických vektorových prostorů spolu s jejich základními vlastnostmi.

TVRZENÍ 72. *Nechť X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou topologické vektorové prostory. Pak $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ (se součinovou topologií) je topologický vektorový prostor. Pokud jsou X_γ, $\gamma \in \Gamma$ lokálně konvexní, je i X lokálně konvexní.*

DŮKAZ. Nechť $\{(f_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ je usměrněný soubor v $X \times X$ konvergující k $(f, g) \in X \times X$. Pak $\lim_\alpha f_\alpha(\gamma) = f(\gamma)$ a $\lim_\alpha g_\alpha(\gamma) = g(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, takže ze spojitosti sčítání na každém prostoru X_γ plyne, že $\lim_\alpha(f_\alpha + g_\alpha)(\gamma) = \lim_\alpha\big(f_\alpha(\gamma) + g_\alpha(\gamma)\big) = f(\gamma) + g(\gamma) = (f+g)(\gamma)$, neboli $f_\alpha + g_\alpha \to f + g$ v X. Zcela analogicky dokážeme i spojitost násobení skalárem.

Předpokládejme nyní, že X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou lokálně konvexní. Pro každé $\gamma \in \Gamma$ nechť $\mathcal{U}_\gamma$ je báze okolí 0 v X_γ sestávající z konvexních množin a obsahující X_γ. Z definice součinové topologie snadno plyne, že systém

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma;\ U_\gamma \in \mathcal{U}_\gamma, U_\gamma \neq X_\gamma \text{ jen pro konečně mnoho } \gamma\right\}$$

je bází okolí 0 v X. Protože vektorové operace jsou definovány po složkách, je téměř zřejmé, že množiny v $\mathcal{U}$ jsou konvexní. Tedy X je lokálně konvexní.

□

Nechť (X,τ) je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Uvažujme (vektorový) faktorprostor X/Y a kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$. Na prostoru X/Y uvažujme kvocientovou topologii σ, tj. topologii definovanou tak, že množina $G \subset X/Y$ je σ-otevřená právě tehdy, když $q^{-1}(G)$ je τ-otevřená. Prostor $(X/Y,\sigma)$ se nazývá faktorprostorem (též kvocientem) (X,τ) podle Y.

TVRZENÍ 73. *Nechť Y je podprostor topologického vektorového prostoru (X, τ). Na X/Y uvažujme výše zmíněnou kvocientovou topologii σ.*

(a) Kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojité lineární otevřené zobrazení, které je na. Dále platí, že $\sigma = \{q(G);\ G \in \tau\}$.
(b) X/Y je topologický vektorový prostor. Pokud X je lokálně konvexní, je i X/Y lokálně konvexní.
(c) X/Y je Hausdorffův, právě když Y je uzavřený.
(d) Je-li X normovaný lineární prostor a Y je uzavřený, je topologie na X/Y generována normou prostoru X/Y.

DŮKAZ. (a) Fakt, že q je lineární a na, je nám již dobře známý. Spojitost plyne z definice kvocientové topologie. Je-li nyní $G \subset X$ otevřená, pak $q^{-1}(q(G)) = G + Y$, což je otevřená množina v X. Dle definice je tedy $q(G)$ otevřená.

Dále, zobrazení q je otevřené, tedy $q(G) \in \sigma$ pro $G \in \tau$. Na druhou stranu, pro $H \in \sigma$ je $H = q(G)$, kde $G = q^{-1}(H) \in \tau$ díky spojitosti q.

(b) Z (a) snadno plyne, že $\sigma(0) = \{q(U);\ U \in \tau(0)\}$ a že je-li $\mathcal{U}$ báze $\tau(0)$, pak $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ je báze $\sigma(0)$. Vezmeme-li za $\mathcal{U}$ bázi $\tau(0)$ sestávající z vyvážených množin, pak snadno ověříme, že systém $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ splňuje podmínky (i)–(iii) z Věty 8. (Je $q(V + V) = q(V) + q(V)$ a dále $q(U)$ je pohlcující pro U pohlcující, neboť q je na.) Tedy σ je vektorová topologie. Je-li τ dokonce lokálně konvexní, pak q zobrazí bázi $\tau(0)$ sestávající z konvexních množin na bázi $\sigma(0)$ se stejnou vlastností. Tedy σ je pak také lokálně konvexní.

(c) $\Rightarrow$ Množina $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená, takže $Y = q^{-1}(\{\widehat{0}\})$ je uzavřený dle (a).

$\Leftarrow$ Množina $X \setminus Y$ je otevřená, takže $(X/Y) \setminus \{\widehat{0}\} = q(X \setminus Y)$ je otevřená dle (a). Tedy $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená.

(d) Systém $\{\frac{1}{n}U_X;\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\tau(0)$ a tedy systém $\mathcal{V} = \{q(\frac{1}{n}U_X);\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\sigma(0)$ (vizte důkaz (b)). Dle Tvrzení 1.71 je ale $\mathcal{V} = \{\frac{1}{n}U_{X/Y};\ n \in \mathbb{N}\}$, což je báze okolí 0 v prostoru $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$. (Alternativní argument pro znalce topologie: Zobrazení $q\colon (X, \tau) \to (X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je spojité a otevřené (plyne snadno z Tvrzení 1.71), takže $\|\cdot\|_{X/Y}$ generuje kvocientovou topologii.)

□

DŮSLEDEK 74. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $Y = \overline{\{0\}}$. Pak X/Y je Hausdorffův topologický vektorový prostor.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 12(d) je Y uzavřený podprostor X. Tvrzení 73(b) říká, že X/Y je topologický vektorový prostor, Tvrzení 73(c) pak implikuje, že X/Y je Hausdorffův.

□

TVRZENÍ 75. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ je podprostor a $P\colon X \to Y$ je spojitá lineární projekce X na Y. Pak P je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in P(G)$. Nechť $x \in G$ je takové, že $P(x) = y$. Díky linearitě P je $P(G + y - x) = P(G) + P(y) - P(x) = P(G) + y - y = P(G)$. Dále $y \in G + y - x$, tedy $(G + y - x) \cap Y$ je relativně otevřené okolí y v Y. Ale $(G + y - x) \cap Y \subset P(G + y - x) = P(G)$, což znamená, že y leží ve vnitřku $P(G)$ vzhledem k Y. Tedy $P(G)$ je otevřená.

□

Pro topologické vektorové prostory definujeme pojmy topologického součtu a komplementovaného podprostoru zcela shodně jako v případě normovaných lineárních prostorů. Následující věta je analogií Věty 1.81.

VĚTA 76. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y, Z jsou jeho podprostory. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T\colon Y \times Z \to X$, $T(y, z) = y + z$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Zobrazení T je zjevně lineární a je spojité díky spojitosti sčítání. Dále pro zobrazení $S\colon X \to Y \times Z$, $S(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ platí, že $T \circ S = Id$ a $S \circ T = Id$, tedy T je bijekce. Zobrazení S je spojité díky spojitosti projekcí, tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow$ Zřejmě $Y + Z = X$ (T je na) a pokud $x \in Y \cap Z$, pak rovnost $T(x, 0) = x = T(0, x)$ implikuje díky prostotě T, že $x = 0$. Tedy $X = Y \oplus Z$. Konečně, označíme-li $P: Y \times Z \to Y$ projekci na první souřadnici, tj. $P(y, z) = y$, pak zobrazení $P \circ T^{-1}$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

Podobně další věta je zobecněním Věty 2.8. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Věty 1.68 použijeme Větu 40, místo Věty 2.4 použijeme Důsledek 69(c), a navíc ještě použijeme Tvrzení 73(c) a (a).

VĚTA 77. *Nechť X je lokálně konvexní prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný Hausdorffův podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

9. Slabé topologie a poláry

Je-li X vektorový prostor a zvolíme-li libovolný podprostor $M \subset X^{\#}$, pak na X existuje přirozená nejslabší topologie taková, že vzhledem k ní jsou spojité právě prvky $X^{\#}$ ležící v M. Pokud (X, τ) je lokálně konvexní prostor a zvolíme-li $M = X^*$, pak se tato topologie (která je obvykle slabší než τ) nazývá slabá topologie. Tato topologie zajímavým způsobem interaguje s topologií původní (vizte Věty 93 a 94). Podobně lze na duálu X^* zavést tzv. slabou s hvězdičkou topologii. Důležitost obou topologií vysvitne zejména ve Větě 115, Důsledku 116 a Větě 120, které hovoří o kompaktnosti jistých množin vzhledem k těmto slabým topologiím.

9.1. Slabé topologie

Následující lemma je klíčovým tvrzením v teorii slabých vektorových topologií.

LEMMA 78. *Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.*

K důkazu využijeme následující faktorizační fakt z lineární algebry:

FAKT 79. *Nechť X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L: X \to Y$ a $S: X \to Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T: Z \to Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $x \in \operatorname{Ker} S$, pak $L(x) = T(S(x)) = T(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Všimněme si, že jsou-li $x, y \in X$ taková, že $S(x) = S(y)$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$, a tedy $L(x) = L(y)$. Můžeme tedy definovat $T: \operatorname{Rng} S \to Y$ předpisem $T(S(x)) = L(x)$ pro $x \in X$. Dále pro $x, y \in X$ a $c \in \mathbb{K}$ je $T(S(x)+S(y)) = T(S(x+y)) = L(x+y) = L(x)+L(y) = T(S(x))+T(S(y))$ a $T(cS(x)) = T(S(cx)) = L(cx) = cL(x) = c(T(S(x)))$, tedy T je lineární. Nyní stačí rozšířit T libovolně na celé Z.

□

DŮKAZ LEMMATU 78. $\Rightarrow$ Je-li $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ a $x \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$, pak $f(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Definujme $S: X \to \mathbb{K}^n$ předpisem $S(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Pak S je zjevně lineární zobrazení a $\operatorname{Ker} S = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$. Dle Faktu 79 existuje lineární forma g na $\mathbb{K}^n$ taková, že $f = g \circ S$. Forma g je ovšem tvaru $g(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$ pro nějaké konstanty $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Tedy $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$.

□

Učiňme ještě malou odbočku – důsledkem klíčového lemmatu je mimo jiné následující užitečný fakt z lineární algebry:

FAKT 80. *Nechť X je vektorový prostor a $f_1, \dots, f_n \in X^\#$ jsou lineárně nezávislé. Pak existují $x_1, \dots, x_n \in X$ takové, že $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ (Kroneckerovo[5] delta).*

DŮKAZ. Vezměme libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$. Dle Lemmatu 78 platí, že $\bigcap_{\substack{1 \le j \le n \\ j \neq k}} \operatorname{Ker} f_j \not\subset \operatorname{Ker} f_k$. Tudíž existuje $x_k \in \bigcap_{\substack{1 \le j \le n \\ j \neq k}} \operatorname{Ker} f_j$ takové, že $f_k(x_k) = 1$.

□

DEFINICE 81. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Uvědomme si, že usměrněný soubor $\{x_\gamma\} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v topologii $\sigma(X, M)$, právě když $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$ (Věta 58(c)). Pro zpřehlednění zápisu budeme u značení kanonických bázových okolí 0 topologie $\sigma(X, M)$ vynechávat absolutní hodnoty, tj. budeme psát $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} = U_{|f_1|,\dots,|f_n|,\varepsilon}$.

TVRZENÍ 82. *Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^\#$ jsou neprázdné. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když* $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. *Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.*

DŮKAZ. Nejprve dokažme speciální případ. Inkluze $\subset$ je zřejmá. Na druhou stranu, pokud usměrněný soubor $\{x_\gamma\} \subset X$ a $x \in X$ jsou takové, že $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$, pak díky spojitosti sčítání a násobení v $\mathbb{K}$ je $g(x_\gamma) \to g(x)$ pro každé $g \in \operatorname{span} M$.

Ze speciálního případu ihned plyne implikace $\Leftarrow$ v hlavním tvrzení. Pro $\Rightarrow$ díky symetrii stačí ukázat, že $N \subset \operatorname{span} M$. Nechť tedy $f \in N$. Dle předpokladu je $U_{f,1}$ okolím 0 v topologii $\sigma(X, M)$, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Odtud dostáváme, že $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Funkcionál f je tedy omezený na podprostoru Z, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Podle Lemmatu 78 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Následující tvrzení je důsledkem Tvrzení 59. Stačí si uvědomit, že množina $M \subset X^\#$ odděluje body X, právě když pro každý $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in M$ tak, že $f(x) \neq 0$.

TVRZENÍ 83. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X.*

VĚTA 84. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \operatorname{span} M$.*

DŮKAZ. $\supset$ Je-li $f \in M$, je dle Věty 58(a) pseudonorma $|f|$ spojitá v topologii $\sigma(X, M)$, speciálně je omezená na nějakém okolí 0. Tedy f je též omezený na nějakém okolí 0, takže je spojitý (Věta 33). Konečně, libovolná lineární kombinace spojitých funkcionálů je též spojitá.

$\subset$ Nechť $f \in (X, \sigma(X, M))^*$. Pak f je omezený na nějakém bázovém okolí 0, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ taková, že f je omezený na $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Tedy f je omezený i na podprostoru $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Dle Lemmatu 78 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Uvědomme si, že z Věty 58(b) ihned plyne, že $A \subset X$ je $\sigma(X, M)$-omezená, právě když pro každé $f \in M$ je $f(A)$ omezená.

POZNÁMKA 85. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$, pak $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Pokud X je nekonečněrozměrný, pak Z je netriviální podprostor: v opačném případě by dle Lemmatu 78 každý prvek $X^\#$ byl lineární kombinací $f_1, \dots, f_n$. Tedy libovolné okolí 0 v topologii $\sigma(X, M)$ na nekonečněrozměrném X obsahuje netriviální podprostor X. Pokud je $\operatorname{span} M$ nekonečněrozměrný, pak okolí $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$ (a tedy žádné okolí 0) není omezené: existuje $f \in M$ takový, že $f \notin \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Dle Lemmatu 78 tedy $Z \not\subset \operatorname{Ker} f$. Odtud plyne, že $Z \not\subset U_{f,t} = tU_{f,1}$ pro žádné $t > 0$ (Fakt 47). To mimo jiné znamená, že $\sigma(X, M)$ není pseudonormovatelná (Věta 64). Srovnejte též s Tvrzením 99 a Důsledkem 101.

[5]Leopold Kronecker

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $x \in X$, pak stejně jako pro normované lineární prostory označíme ε_x evaluační funkcionál na X^* daný předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, je tedy $\varepsilon_x \in (X^*)^\#$. Uvědomme si, že na X^* (zatím) neuvažujeme žádnou topologii, tedy zde (zatím) nemá smysl hovořit o spojitosti ε_x. Dále podobně jako dříve zobrazení $\varepsilon\colon X \to (X^*)^\#$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ nazýváme kanonické zobrazení X do $(X^*)^\#$. Zobrazení ε je lineární zobrazení (vizte důkaz Tvrzení 2.26), které je prosté, pokud X^* odděluje body X (tj. např. je-li X Hausdorffův lokálně konvexní prostor (Důsledek 69(a))).

DEFINICE 86. Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Poznamenejme, že je-li zobrazení ε prosté, pak obvykle ztotožňujeme X a $\varepsilon(X)$, a píšeme tedy např. $w^* = \sigma(X^*, X)$. Dále si všimněme, že w^*-topologie na X^* je vždy Hausdorffova, neboť $\varepsilon(X)$ odděluje body X^* z definice. Slabá topologie na X je Hausdorffova například pokud X je lokálně konvexní Hausdorffův prostor (Důsledek 69(a)).

Uvědomme si, že dle Věty 58(c) konverguje usměrněný soubor $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ k $x \in X$ ve slabé topologii, právě když $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každý funkcionál $f \in X^*$. Podobně, usměrněný soubor $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X^*$ konverguje k $f \in X^*$ v topologii w^*, právě když $f_\gamma(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$, neboli topologie w^* je topologie bodové konvergence.

DŮSLEDEK 87. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $w \subset \tau$ a $(X, w)^* = X^*$.
(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

DŮKAZ. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $\varepsilon > 0$, pak $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$ je τ-otevřené, odkud plyne, že $w(0) \subset \tau(0)$. Zbytek plyne z Věty 84.

□

Fakt z předchozího důsledku, že topologie w je slabší než topologie τ, osvětluje název slabé topologie. Často bývá slabá topologie ostře slabší než původní topologie:

PŘÍKLAD 88. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$ a nechť $\{e_n\}$ jsou kanonické bázové vektory v X. Pak $e_n \to 0$ slabě, ale $\|e_n\| = 1$, tedy $\{e_n\}$ nekonverguje v normě. Vskutku, je-li $f = (f_1, f_2, \dots) \in \ell_q = X^*$, kde $1 \le q < \infty$, libovolný funkcionál, pak $f(e_n) = f_n \to 0 = f(0)$.

◇

TVRZENÍ 89. *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když na prostoru $(X^*, \|\cdot\|)$ topologie slabá a w^* splývají.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 82 je $w = w^*$, tj. $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$, právě když $\operatorname{span} X^{**} = \operatorname{span} \varepsilon(X)$, tj. právě když $X^{**} = \varepsilon(X)$.

□

POZNÁMKA 90. Nechť X je topologický vektorový prostor. Označme $Y = (X^*, w^*)$. Dle Důsledku 87(b) je $Y^* = \varepsilon(X) \subset Y^\#$, takže $(Y, w) = \big(Y, \sigma(Y, Y^*)\big) = \big(X^*, \sigma(X^*, \varepsilon(X))\big) = (X^*, w^*) = Y$. Tedy slabá topologie na (X^*, w^*) splývá s „původní“ w^*-topologií na X^*.

TVRZENÍ 91. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Označme w_{XY} restrikci topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y. Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X.*

DŮKAZ. Označme $X^*\restriction_Y = \{f\restriction_Y;\ f \in X^*\}$. Pak $X^*\restriction_Y \subset Y^*$. Topologie w_{XY} je generována systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in X^*\restriction_Y\}$, tedy $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$ (Věta 58). Je-li X lokálně konvexní, pak pro každé $f \in Y^*$ existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ (Důsledek 69(c)). To znamená, že $X^*\restriction_Y = Y^*$, a tedy $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$.

□

PŘÍKLAD 92. Bez předpokladu lokální konvexity v předchozím tvrzení se může stát, že $w_{XY} \subsetneqq \sigma(Y, Y^*)$. Nechť například $X = L_p([0,1])$, $0 < p < 1$, a nechť Y je libovolný netriviální konečněrozměrný podprostor X. Pak $X^* = \{0\}$ (Příklad 54), a tedy $\sigma(X, X^*)$ je indiskrétní topologie. Tudíž i w_{XY} je indiskrétní topologie. Na druhou stranu, Y je Hausdorffův (je to metrický prostor), a je tedy dle Věty 40 izomorfní eukleidovskému prostoru. Proto Y^* odděluje body Y, takže $\sigma(Y, Y^*)$ je Hausdorffova, odkud již plyne, že $w_{XY} \subsetneqq \sigma(Y, Y^*)$ (dokonce je $\sigma(Y, Y^*)$ též rovna eukleidovské topologii dle Věty 40).

◇

VĚTA 93. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.
(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.
(c) Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{conv}\{x_j;\ j \geq n\}$ takové, že $y_n \to x$.

DŮKAZ. (a) Protože $w \subset \tau$, je $\overline{A} \subset \overline{A}^w$. Pro důkaz obrácené inkluze vezměme $x \notin \overline{A}$. Dle Tvrzení 12(e) je $\overline{A}$ konvexní, takže dle oddělovací věty (Věta 68(b)) existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) > \sup_{\overline{A}} \operatorname{Re} f \geq \sup_A \operatorname{Re} f$. Ze slabé spojitosti $\operatorname{Re} f$ ovšem plyne, že $\operatorname{Re} f(x) \notin \overline{\operatorname{Re} f(A)} \supset \operatorname{Re} f(\overline{A}^w)$, tedy $x \notin \overline{A}^w$.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky (a) platí
$$x \in \overline{\{x_k;\ k \geq n\}}^w \subset \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}^w = \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}.$$
Nechť ρ je pseudometrika generující topologii X. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}$ takové, že $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Pak ovšem $y_n \to x$.

□

VĚTA 94 (George Whitelaw Mackey (1946)). *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.*

Než dokážeme tuto větu, uveďme ještě příbuzné tvrzení pro w^* topologii, které je okamžitým důsledkem Principu stejnoměrné omezenosti. Hlavní myšlenka důkazu Věty 94 je pak podobná, i když provedení je poněkud technicky náročné.

TVRZENÍ 95. *Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X^*$. Pak A je omezená právě tehdy, když je w^*-omezená.*

DŮKAZ. Jelikož $A \subset X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, podle Principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1) je A omezená (v normě) právě tehdy, když pro každé $x \in X$ je množina $\{|f(x)|;\ f \in A\} = \{|\varepsilon_x(f)|;\ f \in A\}$ omezená, neboli právě když A je w^*-omezená (Věta 58(b)).

□

Bez úplnosti ovšem předchozí tvrzení (na rozdíl od Věty 94) neplatí, vizte Příklad 3.3.

DŮKAZ VĚTY 94. Vzhledem k tomu, že $w(0) \subset \tau(0)$, je každá τ-omezená množina i slabě omezená. Předpokládejme nyní, že A je slabě omezená. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$. Položme $Z = \mu_V^{-1}(0)$. Pak Z je podprostor X (Fakt 45(b)). Nechť $Y = X/Z$ je vektorový faktorprostor. Protože $\mu_V(x) = \mu_V(y)$ pokud $x, y \in X$, $x - y \in Z$ (Fakt 45(b)), můžeme na Y definovat funkci $\|\cdot\|$ předpisem $\|\widehat{x}\| = \mu_V(x)$ pro $x \in X$. Snadno si lze rozmyslet, že $\|\cdot\|$ je norma. Dále kanonické kvocientové zobrazení $q\colon (X, \tau) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojité, neboť $q^{-1}(U_Y) = \{x \in X;\ \|\widehat{x}\| < 1\} \supset \operatorname{Int} V$ (Tvrzení 50), tedy q je omezené na okolí 0 (Věta 33).

Prostor $Y^* = (Y, \|\cdot\|)^*$ je Banachův prostor. Je-li nyní $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ q \in X^*$, a tedy dle předpokladu je $f(q(A)) = (f \circ q)(A)$ omezená množina. Označme $\varepsilon\colon Y \to Y^{**}$ kanonické vnoření a položme $\mathcal{A} = \varepsilon(q(A)) \subset \mathcal{L}(Y^*, \mathbb{K})$. Protože pro každé $f \in Y^*$ je $\sup_{F \in \mathcal{A}} |F(f)| = \sup_{y \in q(A)} |f(y)| < +\infty$, platí dle Principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1), že $\sup_{y \in q(A)} \|y\| = \sup_{F \in \mathcal{A}} \|F\| < +\infty$, neboli množina $q(A)$ je $\|\cdot\|$-omezená v Y.

Existuje tedy $t > 0$ takové, že $\mu_V(x) = \|q(x)\| < t$ pro každé $x \in A$. To znamená, že pro každé $x \in A$ je $\mu_V(\frac{x}{t}) < 1$, neboli $\frac{x}{t} \in V$ (Tvrzení 50). Tedy $A \subset tV \subset tU$. Množina A je tak τ-omezená.

□

Bez předpokladu lokální konvexity předchozí věta neplatí:

PŘÍKLAD 96. Nechť $p \in (0,1)$, $X = \ell_p$ a $K \subset X$ je množina z Příkladu 66. Pak $\operatorname{conv} K$ je slabě omezená (dokonce slabě totálně omezená), ale není omezená. Vskutku, označíme-li τ topologii X, pak K je τ-kompaktní, a tedy i slabě kompaktní, neboť $w \subset \tau$. Dle Tvrzení 28 je tedy K slabě totálně omezená, čímž pádem je díky Tvrzení 65(b) slabě totálně omezená i množina $\operatorname{conv} K$.

◇

PŘÍKLAD 97. Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Posloupnost $\{f_n\} \subset C(K)$ konverguje slabě k $f \in C(K)$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově na K.

Vskutku, pokud $f_n \to f$ slabě, pak $\{f_n\}$ je slabě omezená (Poznámka 29), a tedy i omezená (Věta 94). Dále pro každé $x \in K$ je $\delta_x \in C(K)^*$ (Diracova míra), takže $f_n(x) = \delta_x(f_n) \to \delta_x(f) = f(x)$. Na druhou stranu, je-li $\phi \in C(K)^*$, pak dle Rieszovy věty o reprezentaci (Věta 2.20) existuje $\mu \in M(K)$ taková, že $\phi(g) = \int_K g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $g \in C(K)$. Z Lebesgueovy věty pro komplexní míry (Věta 15.96) pak plyne, že $\phi(f_n) = \int_K f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \phi(f)$.

◇

VĚTA 98. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak T je w–w spojité, tj. spojité jakožto zobrazení $T\colon (X,w) \to (Y,w)$.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je usměrněný soubor konvergující slabě k $x \in X$. Je-li $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ T \in X^*$, a tedy $f \circ T(x_\gamma) \to f \circ T(x)$, neboli $f(T(x_\gamma)) \to f(T(x))$. To znamená, že $T(x_\gamma) \to T(x)$ slabě.

□

Přirozenou otázkou je, zdali jsou slabé topologie metrizovatelné, což by nám usnadnilo práci s nimi. Jak jsme již viděli v Poznámce 85, v netriviálním nekonečněrozměrném případě nejsou nikdy pseudonormovatelné.

TVRZENÍ 99. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $\sigma(X,M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když* $\operatorname{span} M$ *má spočetnou algebraickou bázi.*

DŮKAZ. Díky Tvrzení 82 je $\sigma(X,M) = \sigma(X,B)$, kde B je libovolná algebraická báze $\operatorname{span} M$. Implikace $\Leftarrow$ tedy ihned plyne z Lemmatu 61.

$\Rightarrow$ Dle předpokladu existuje spočetná báze $\sigma(X,M)(0)$, řekněme $\{V_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $f_1^n, \dots, f_{k_n}^n \in M$ a $\varepsilon_n > 0$ tak, že $U_{f_1^n,\dots,f_{k_n}^n,\varepsilon_n} \subset V_n$. Topologie $\sigma(X,M)$ je tedy generována spočetným systémem $A = \bigcup_{n=1}^\infty \{f_1^n, \dots, f_{k_n}^n\}$, tj. $\sigma(X,M) = \sigma(X,A)$. Tvrzení 82 pak implikuje, že $\operatorname{span} M = \operatorname{span} A$, tedy $\operatorname{span} M$ má spočetnou algebraickou bázi.

□

TVRZENÍ 100. *Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.*

DŮKAZ. Nechť $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ je spočetná algebraická báze X. Položme $F_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Pak množiny F_n jsou uzavřené (Důsledek 15) a $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, takže podle Baireovy věty (Důsledek 15.11) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek. Existuje tedy $x \in F_n$ a $V \in \tau(0)$ tak, že $x + V \subset F_n$. Protože ovšem $-x \in F_n$, je $V = (x+V) - x \subset F_n$. Jelikož V je pohlcující, znamená to, že $X = \operatorname{span} V \subset F_n$, což je ve sporu s nekonečnou dimenzí X.

□

DŮSLEDEK 101.

(a) *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X,w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.*
(b) *Nechť X je Fréchetův prostor. Pak (X^*,w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.*

DŮKAZ. (a) Pokud $\dim X < \infty$, pak slabá topologie splývá s normovou dle Důsledku 41. V opačném případě X^* nemá dle Tvrzení 100 (a Tvrzení 2.27) spočetnou algebraickou bázi, takže (X,w) není metrizovatelný dle Tvrzení 99.

(b) Pokud $\dim X < \infty$, pak též $\dim X^* \leq \dim X^\# < \infty$, a tedy (X^*, w^*) je normovatelný dle Důsledku 41. V opačném případě X nemá dle Tvrzení 100 spočetnou algebraickou bázi. Protože ε je dle předpokladu prosté, nemá spočetnou algebraickou bázi ani $\varepsilon(X)$, takže (X^*, w^*) není metrizovatelný dle Tvrzení 99.

□

Poznamenejme, že na rozdíl od slabých topologií na *celém* nekonečněrozměrném prostoru jejich restrikce na jednotkovou kouli metrizovatelné být mohou, vizte Tvrzení 119. Proto také musí být v následujícím příkladu množina A neomezená.

PŘÍKLAD 102. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_2 a položme

$$A = \left\{\sqrt{n}e_n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \ell_2.$$

Pak $0 \in \overline{A}^w$, ale neexistuje posloupnost v A slabě konvergující k 0.

Druhé tvrzení dostaneme snadno: Libovolná posloupnost v množině A je neomezená nebo má konstantní nenulovou podposloupnost. V prvním případě nemůže podle Poznámky 29 a Věty 94 slabě konvergovat k ničemu, ve druhém případě pak nemůže slabě konvergovat k 0.

Dokažme nyní první tvrzení. Nechť U je libovolné slabé okolí 0. Pak existují $x_1, \dots, x_k \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$V = \{x \in \ell_2;\ |\langle x, x_j\rangle| < \varepsilon, j = 1, \dots, k\} \subset U.$$

Označme $z_j = \big(|x_j(1)|, |x_j(2)|, \dots\big) \in \ell_2$ a položme $y = z_1 + \cdots + z_k$. Množina $M = \{n \in \mathbb{N};\ |y(n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}\}$ je nekonečná, neboť $y \in \ell_2$. Pro každé $n \in M$ a $j \in \{1, \dots, k\}$ tedy platí, že

$$\left|\left\langle \sqrt{n}e_n, x_j\right\rangle\right| = \left|\sqrt{n}x_j(n)\right| \leq \sqrt{n}|y(n)| < \varepsilon,$$

neboli $\sqrt{n}e_n \in V \subset U$. Tedy $U \cap A \neq \emptyset$.

◇

9.2. Poláry

DEFINICE 103. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap\{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému absolutně konvexních množin je opět absolutně konvexní, a tedy absolutně konvexní obal je absolutně konvexní množina.

Následující charakterizace absolutně konvexního obalu je analogií Tvrzení 1.17 pro konvexní obal. Důkaz je *mutatis mutandis* stejný.

TVRZENÍ 104. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak*

$$\operatorname{aconv} A = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i| \leq 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Definice pojmů $\overline{\operatorname{span}} A$ a $\overline{\operatorname{conv}} A$ jsou totožné s definicemi příslušných pojmů v normovaných lineárních prostorech.

DEFINICE 105. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako $\overline{\operatorname{aconv}} A = \bigcap\{B \supset A;\ B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}$.

Je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor, uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina a uzavřený absolutně konvexní obal je uzavřená absolutně konvexní množina. I následující tvrzení je shodné s analogickým Tvrzením 1.22 z teorie normovaných lineárních prostorů. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Faktu 1.21 použijeme Tvrzení 12(d), (e), (f).

TVRZENÍ 106. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}} A = \overline{\operatorname{span} A}$, $\overline{\operatorname{conv}} A = \overline{\operatorname{conv} A}$ a $\overline{\operatorname{aconv}} A = \overline{\operatorname{aconv} A}$.*

DEFINICE 107. Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Pojmy anihilátorů definujeme pro topologické vektorové prostory zcela identicky jako pro normované lineární prostory (Definice 2.10). Všimněme si, že platí $A^\perp \subset A^\circ$ a $B_\perp \subset B_\circ$. Dále, je-li X normovaný lineární prostor, pak z definice snadno vidíme, že $(B_X)^\circ = B_{X^*}$, a z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6) pak plyne, že $(B_{X^*})_\circ = B_X$.

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pojem poláry A° a zpětné poláry $B_\circ$ závisí na topologii τ, neboť ta určuje, jak vypadá prostor X^*. Na druhou stranu, prostor X^* zde vystupuje pouze jako množina, a můžeme na ní uvažovat libovolnou topologii, aniž by to ovlivnilo pojmy A° a $B_\circ$. V kontextu polár je nejpřirozenější uvažovat prostor X^* s topologií w^*. Pak $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$ (Důsledek 87(b)), a můžeme pracovat s polárami podmnožin (X^*, w^*) a zpětnými polárami podmnožin $\varepsilon(X)$. Platí následující fakt:

FAKT 108. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^*, pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.*

DŮKAZ. Je

$$\varepsilon(A)_\circ = \{f \in X^*;\ |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\} = A^\circ$$

a

$$B^\circ = \{F \in \varepsilon(X);\ |F(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \{\varepsilon_x;\ x \in X, |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \varepsilon(B_\circ).$$

Konečně, $(B^\circ)_\circ = (\varepsilon(B_\circ))_\circ = (B_\circ)^\circ$ podle předchozích dvou rovností.

□

TVRZENÍ 109. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.
(b) Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.
(c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.
(d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda}B_\circ$.
(e) Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(B_\gamma)_\circ$.

DŮKAZ. (a) Je $A^\circ = \bigcap_{x\in A}\{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1\}$, přičemž množiny vpravo jsou absolutně konvexní a w^*-uzavřené, neboť jsou to podúrovňové množiny w^*-spojitých pseudonorem $|\varepsilon_x|$. Analogicky pro $B_\circ$.

(b) Víme, že $B_\perp \subset B_\circ$. Na druhou stranu, nechť $x \in B_\circ$. Pak lineární funkcionál ε_x je omezený na B, což je podprostor X^*, takže ε_x je na B nulový. Tedy $x \in B_\perp$. Pro A° je argumentace analogická.

(c) První tři rovnosti jsou ihned vidět z definice. Pokud X^* odděluje body X, pak pro $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq 0$, takže $x \notin (X^*)_\perp = (X^*)_\circ$ dle (b).

(d) Pro $x \in X$ je

$$x \in (\lambda B)_\circ \Leftrightarrow \forall f \in \lambda B\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall g \in B\colon |(\lambda g)(x)| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall g \in B\colon |g(\lambda x)| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda x \in B_\circ \Leftrightarrow x \in \frac{1}{\lambda}B_\circ.$$

Vztah pro A° plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 108.

(e) Pro $x \in X$ je

$$x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)_\circ \Leftrightarrow \forall\gamma \in \Gamma\ \forall f \in B_\gamma\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall\gamma \in \Gamma\colon x \in (B_\gamma)_\circ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(B_\gamma)_\circ.$$

Vztah pro dopřednou poláru plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 108.

□

VĚTA 110 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950)). *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ (= $\overline{\operatorname{aconv}} A$, pokud X je lokálně konvexní).

(b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^\circ$ máme $|f(x)| \leq 1$, a tedy $x \in (A^\circ)_\circ$. To znamená, že $A \subset (A^\circ)_\circ$. Z Tvrzení 109(a) tedy plyne, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A \subset (A^\circ)_\circ$. Na druhou stranu, je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{aconv}}^w A$, pak díky oddělovací větě (Věta 68(b)) existuje $f \in (X, w)^* = X^*$ (Důsledek 87(a)) takový, že $|f(y)| \leq 1$ pro $y \in \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ a $\operatorname{Re} f(x) > 1$. Tedy $f \in A^\circ$, a přitom $|f(x)| > 1$, což znamená, že $x \notin (A^\circ)_\circ$. Konečně, fakt, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A = \overline{\operatorname{aconv}} A$ v případě lokálně konvexního X plyne z Tvrzení 106 a Věty 93(a).

(b) plyne z (a) aplikovaného na prostor (X^*, w^*) s použitím Faktu 108 a Poznámky 90.

□

Nyní již máme k dispozici příslušný pojmový aparát k tomu, abychom mohli uvést „správná znění“ Lemmatu 2.12 a Věty 4.4.

LEMMA 111. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) $A^\perp$ je w^*-uzavřený podprostor X^*,

(b) $B_\perp$ je slabě uzavřený podprostor X,

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}^w A$ (= $\overline{\operatorname{span}} A$, pokud X je lokálně konvexní),

(d) $(B_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. Vše je snadným důsledkem Tvrzení 109(a), (b), věty o bipoláře a Tvrzení 106, uvědomíme-li si, že $A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp$ a $B_\perp = (\operatorname{span} B)_\perp$.

□

Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory. Je-li $T\colon X \to Y$ spojité lineární zobrazení, pak zobrazení $T^*\colon Y^* \to X^*$ definujeme stejným způsobem, jako pro normované lineární prostory. Toto zobrazení je zjevně dobře definováno.

TVRZENÍ 112. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory. Je-li $T\colon X \to Y$ spojité lineární zobrazení, pak $T^*\colon Y^* \to X^*$ je w^*–w^* spojité lineární zobrazení.*

DŮKAZ. Snadno je vidět, že T^* je lineární zobrazení. Je-li $\{f_\gamma\}$ usměrněný soubor v Y^*, který konverguje k $f \in Y^*$ ve w^*, pak pro každé $x \in X$ platí, že $T^* f_\gamma(x) = f_\gamma(Tx) \to f(Tx) = T^* f(x)$, neboli $T^* f_\gamma \to T^* f$ ve w^*.

□

VĚTA 113. *Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y, a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení, pak platí, že*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T}^w = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*}^{w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Důkaz této věty je shodný s důkazem Věty 4.4, pouze místo Lemmatu 2.12 použijeme Lemma 111.

VĚTA 114 (Herman Heine Goldstine (1938)). *Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

DŮKAZ. Označme $Y = (X^*, \|\cdot\|)$. Pak $\varepsilon(B_X) \subset X^{**} = Y^*$. Tedy dle věty o bipoláře použité na prostoru Y (Věta 110(b)) je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{(Y^*, w^*)} \varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{(Y^*, w^*)}$, přičemž poslední rovnost platí díky Tvrzení 106. Na druhou stranu, podle Faktu 108 je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = ((B_X)^\circ)^\circ = (B_{X^*})^\circ = B_{X^{**}}$.

□

Uvědomme si, že z Goldstineovy věty speciálně plyne, že $X^{**} = \overline{\varepsilon(X)}^{w^*}$. Vskutku, násobení skalárem je w^*-homeomorfismus, takže $\overline{\varepsilon(rB_X)}^{w^*} = rB_{X^{**}}$ pro každé $r > 0$. Odtud dostáváme, že $X^{**} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_{X^{**}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\varepsilon(nB_X)}^{w^*} \subset \overline{\varepsilon(X)}^{w^*}$.

VĚTA 115 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[6]). *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X, pak U° je w^*-kompaktní množina.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že (X^*, w^*) je dle Věty 58(c) podprostor topologického vektorového prostoru $\mathbb{K}^X$ se součinovou topologií (tj. topologií bodové konvergence). Protože U je pohlcující, ke každému $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $\lambda_x x \in U$. Položme $K = \prod_{x\in X} B_{\mathbb{K}}(0, \frac{1}{\lambda_x}) \subset \mathbb{K}^X$. Podle Tichonovovy věty[7] je K kompaktní. Dále pro každé $f \in U^\circ$ a $x \in X$ je $|f(x)| = \frac{1}{\lambda_x}|f(\lambda_x x)| \le \frac{1}{\lambda_x}$, což znamená, že $f \in K$. Tedy $U^\circ \subset K$. Ukážeme, že U° je uzavřená podmnožina K, odkud ihned plyne kompaktnost U° v topologii w^*.

Nechť tedy $f \in \overline{U^\circ}^K$. Pak f je lineární forma na X (Fakt 39). Dále pro každé $x \in U$ platí, že $|f(x)| \le 1$: Pro každé $\varepsilon > 0$ totiž existuje $g \in U^\circ$ takové, že $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$, takže $|f(x)| \le |g(x)|+|f(x)-g(x)| \le 1 + \varepsilon$. To znamená, že f je omezená na okolí 0 v X, tudíž $f \in X^*$ (Věta 33), a tedy $f \in U^\circ$.

□

Následující speciální případ předchozí věty pro jeho velkou důležitost pro jistotu zdůrazníme zvlášť.

DŮSLEDEK 116. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^*-kompaktní.*

TVRZENÍ 117. *Nechť X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X. Je-li $U \subset X$ okolí 0, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f-g)(x_n)|, 1\}.$$

DŮKAZ. Systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{|\varepsilon_{x_n}|\}_{n=1}^\infty$ generuje na X^* lokálně konvexní topologii σ, která je zjevně slabší než w^*. Díky hustotě $\{x_n\}$ v X systém $\mathcal{P}$ odděluje body X^*, takže σ je Hausdorffova (Tvrzení 59). Dle Lemmatu 61 je σ metrizovatelná metrikou ρ. Podle Věty 115 je (U°, w^*) kompaktní, a protože σ je Hausdorffova a $\sigma \subset w^*$, je $(U^\circ, w^*) = (U^\circ, \sigma)$, neboť kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

□

Následující fakt říká, že jinými slovy můžeme prostory (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$ ztotožnit pomocí kanonického vnoření.

FAKT 118. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.*

DŮKAZ. Označme $\pi\colon X^* \to X^{***}$ kanonické vnoření. Je-li $\{x_\gamma\} \subset X$ usměrněný soubor a $x \in X$, pak

$$x_\gamma \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon f(x_\gamma) \to f(x) \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon \pi_f(\varepsilon_{x_\gamma}) \to \pi_f(\varepsilon_x) \Leftrightarrow \varepsilon(x_\gamma) \xrightarrow{w^*} \varepsilon(x).$$

□

TVRZENÍ 119. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

[6] Tento tradiční název je poněkud nepřesný; tato věta má dlouhou a složitou historii. Separabilní verze (tj. sekvenciální kompaktnost): základní myšlenku důkazu lze nalézt už u G. Ascoliho (1884), první náznaky věty se objevují u M. Frécheta (1906), různé protoformulace uvedli D. Hilbert (1906) pro ℓ_2 a F. Riesz (1909) pro ℓ_p a $L_p([0, 1])$, první jasnou formulaci uvedl E. Helly (1912) pro $C([0, 1])$, S. Banach (1929) zformuloval separabilní verzi v normovaných lineárních prostorech. Obecná verze byla nezávisle na sobě objevena mnoha matematiky: Leonidas Alaoglu (1938), J. Dieudonné a skupina N. Bourbaki (1938), Vitold Lvovič Šmuljan (Витольд Львович Шмульян) (1940), Šizuo Kakutani (角谷 静夫) (1940).

[7] A. N. Tichonov (1930) pro součin intervalů, obecnou verzi ukázal až Eduard Čech (1937).

(a) Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)|.$$

(b) Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*}, pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x-y)|.$$

DŮKAZ. (a) Snadno si lze rozmyslet, že ρ je translačně invariantní metrika na X^*. Dále $\rho = 2\rho_1$, kde $\rho_1(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(\frac{1}{2}x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f-g)(\frac{1}{2}x_n)|, 1\}$ pro $f, g \in B_{X^*}$. Dle Lemmatu 61 je tedy topologie σ generovaná systémem pseudonorem $\{|\varepsilon_{\frac{1}{2}x_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ metrizovatelná metrikou ρ. Zbytek důkazu je stejný jako pro Tvrzení 117.

(b) Stačí použít (a) na $(B_{X^{**}}, w^*)$ a díky Faktu 118 metriku přesunout na B_X pomocí kanonického vnoření ε.

□

Důsledkem předchozích výsledků je následující důležitá charakterizace reflexivních prostorů.

VĚTA 120. *Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li X reflexivní, pak pro kanonické vnoření ε platí, že $\varepsilon(B_X) = B_{X^{**}}$. Slabá kompaktnost B_X tedy plyne z Důsledku 116 (použitého na X^*) spolu s Faktem 118.

$\Leftarrow$ Dle předpokladu a Faktu 118 je $(\varepsilon(B_X), w^*)$ kompaktní. Protože w^*-topologie je Hausdorffova, plyne odtud (a z toho, že ε je izometrie), že $\varepsilon(B_X)$ je w^*-uzavřená podmnožina $B_{X^{**}}$. Z Goldstineovy věty (Věta 114) pak dostáváme, že $\varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$. Odtud a z linearity ε již snadno plyne, že X je reflexivní.

□

VĚTA 121. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset B_X$. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dle Věty 2.32(b) je Y reflexivní prostor, který je zřejmě separabilní. Podle Tvrzení 2.33 je Y^* separabilní, takže podle Věty 120 a Tvrzení 119(b) je (B_Y, w) metrizovatelný kompakt. Protože $\{x_n\} \subset B_Y$, lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost, která konverguje v (B_Y, w), a tedy i v (Y, w), a tedy i v (X, w) dle Tvrzení 91.

□

TVRZENÍ 122. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}$ je lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$. Tedy každý normovaný lineární prostor je izometrický podprostoru $C(K)$ pro nějaký Hausdorffův kompakt K.*

DŮKAZ. Pro každé $x \in X$ je ε_x je w^*-spojitý funkcionál na X^* (Důsledek 87). Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$ je lineární izometrie do X^{**} (Tvrzení 2.26). Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}$ je tedy lineární izometrie z X do $C((B_{X^*}, w^*))$, neboť $\|\varepsilon_x \restriction_{B_{X^*}}\|_{C((B_{X^*}, w^*))} = \sup_{f \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(f)| = \|\varepsilon_x\|_{X^{**}} = \|x\|$. Druhá část je důsledkem první části a Důsledku 116.

□

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^\#\colon Y^\# \to X^\#$ předpisem $T^\# f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^\#$ a $x \in X$. Snadno nahlédneme, že $T^\#$ opravdu zobrazuje do $X^\#$ a že je to lineární zobrazení. Důkaz následujícího lemmatu je *mutatis mutandis* stejný jako důkaz Věty 4.6(b) pro spojitý případ.

LEMMA 123. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární bijekce. Pak $T^\#$ je bijekce a $(T^\#)^{-1} = (T^{-1})^\#$.*

LEMMA 124. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, Y je vektorový prostor, $M \subset Y^\#$ je neprázdná a nechť $T : (X, \tau) \to (Y, \sigma(Y, M))$ je lineární izomorfismus. Pak $\tau = \sigma(X, T^\#(M))$.*

DŮKAZ. Rovnost topologií plyne z následující série ekvivalencí:

$$x_\gamma \xrightarrow{\tau} x \iff Tx_\gamma \xrightarrow{\sigma(Y,M)} Tx \iff \forall f \in M : f(Tx_\gamma) \to f(Tx) \iff$$
$$\iff \forall f \in M : T^\# f(x_\gamma) \to T^\# f(x) \iff \forall g \in T^\#(M) : g(x_\gamma) \to g(x).$$

□

PŘÍKLAD 125. Pro $p \in (0, 1]$ uvažujme ℓ_∞ jako duál k prostoru ℓ_p reprezentovaný standardní dualitou z Příkladu 66. Označme w_p^* topologii w^* na ℓ_∞ danou touto dualitou. Přesněji, nechť $I_p : \ell_\infty \to \ell_p^*$ je lineární bijekce z Příkladu 66 a položme $w_p^* = \{I_p^{-1}(G);\ G \in \sigma(\ell_p^*, \varepsilon_p(\ell_p))\}$, kde $\varepsilon_p : \ell_p \to (\ell_p^*)^\#$ je kanonické vnoření (ε_p je prosté, neboť ℓ_p^* odděluje body ℓ_p, vizte Příklad 66). Pro $0 < p < q \leq 1$ pak platí, že $w_p^* \subsetneqq w_q^*$, i když tyto topologie splývají na omezených podmnožinách ℓ_∞.

Označme $\widetilde{\varepsilon_p} = I_p^\# \circ \varepsilon_p$, tedy $\widetilde{\varepsilon_p} : \ell_p \to \ell_\infty^\#$. Dle Lemmatu 124 je $w_p^* = \sigma(\ell_\infty, \widetilde{\varepsilon_p}(\ell_p))$, neboť I_p je izomorfismus (ℓ_∞, w_p^*) a $\big(\ell_p^*, \sigma(\ell_p^*, \varepsilon_p(\ell_p))\big)$. Rozmysleme si, že $\ell_p \subsetneqq \ell_q$ pro $0 < p < q \leq 1$ (jakožto množiny): Je-li $x \in B_{\ell_p}$, platí pro každou souřadnici $n \in \mathbb{N}$ odhad $|x_n|^q \leq |x_n|^p$, a tedy $x \in B_{\ell_q}$. Na druhou stranu, $x = \big(\frac{1}{n^{1/p}}\big)_{n=1}^\infty \in \ell_q$, ale $x \notin \ell_p$. Dále si všimněme, že $\widetilde{\varepsilon_p} = \widetilde{\varepsilon_1} \restriction_{\ell_p}$. Vskutku, je-li $0 < q \leq 1$, $x \in \ell_q$ a $u \in \ell_\infty$, pak $\widetilde{\varepsilon_q}(x)(u) = I_q^\#\big(\varepsilon_q(x)\big)(u) = \varepsilon_q(x)(I_q(u)) = I_q(u)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n u_n$. Použijeme-li tuto rovnost pro $q = p$ a $q = 1$, dostaneme požadovaný vztah.

Je-li nyní $0 < p < q \leq 1$, pak z prostoty $\widetilde{\varepsilon_1}$ (plynoucí z Lemmatu 123) a toho, že $\ell_p \subsetneqq \ell_q$, plyne, že $\widetilde{\varepsilon_p}(\ell_p) = \widetilde{\varepsilon_1}(\ell_p) \subsetneqq \widetilde{\varepsilon_1}(\ell_q) = \widetilde{\varepsilon_q}(\ell_q)$. Dle Tvrzení 82 je tedy $w_p^* \subsetneqq w_q^*$.

Konečně, ukažme, že restrikce w_p^* a w_q^* na B_{ℓ_∞} se shodují. Dle Důsledku 116 je B_{ℓ_∞} kompaktní v topologii w_1^*. Protože w_p^* je Hausdorffova topologie slabší než w_1^*, jsou obě topologie na B_{ℓ_∞} shodné, jelikož kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

◇

Kapitola 7

Teorie distribucí

Ve fyzice je často obtížné určit nějakou veličinu jakožto bodovou funkci (tj. určit konkrétní hodnotu v každém bodě definičního oboru), spíše jsme schopni určit (naměřit, předpovědět) její průměrné hodnoty – např. „okamžitá rychlost“ se často určuje jako průměrná rychlost za krátké časové okamžiky. To je jedna z motivací k tomu, chápat veličinu f nikoli jako bodově určenou funkci, ale pomocí její „akce“ na vhodné „testovací funkce“ φ, tj. jako integrální průměry $\int f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro vhodné hustoty φ. Že to pro vhodně zvolenou množinu testovacích funkcí může fungovat nám napovídá následující lemma, které říká, že pomocí „akce“ na testovacích funkcích je již funkce určena jednoznačně (v příslušné třídě; např. ve třídě spojitých funkcí je určena bodově). Též to osvětluje název prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.

LEMMA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť μ je borelovská komplexní míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.

(c) Nechť μ je borelovská komplexní míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

K důkazu se nám bude hodit následující „hladké oddělovací lemma“.

LEMMA 2. *Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že* $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. *Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že* $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ *a* $\varphi = 1$ *na A.*

DŮKAZ. Je-li $A = \emptyset$, pak stačí vzít $\varphi = 0$. Je-li $U = \mathbb{R}^d$, pak stačí vzít $\varphi = 1$. Nyní tedy můžeme předpokládat, že $A \neq \emptyset$ a $U \neq \mathbb{R}^d$. Nechť $\delta = \frac{1}{3} \operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U)$. Pak $\delta \in (0, +\infty)$. Položme $B = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le \delta\}$ a $C = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le 2\delta\}$ a uvědomme si, že B i C jsou uzavřené (Fakt 15.4). Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0, \delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}\lambda = 1$ a položme $\varphi = \chi_B * g$ (vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^d$). Pak $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.12). Zjevně $\varphi \ge 0$ a $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(y) g(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \le \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále $\operatorname{supp} \varphi \subset B + B(0, \delta) \subset C \subset U$ (Věta 5.7(b)). Konečně, je-li $x \in A$, pak pro každé $y \in B(0, \delta)$ platí $x - y \in B$, a tedy $\varphi(x) = \int_{B(0,\delta)} g(y) \chi_B(x-y) \,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{B(0,\delta)} g(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) = 1$ (Věta 5.2(a)).

□

DŮSLEDEK 3. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na U.*

DŮKAZ. Je-li $K = \emptyset$, pak stačí vzít $U = \emptyset$ a $\varphi = 0$. Nyní tedy můžeme předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Položme $\delta = \min\{\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus G), 1\}$. Dle Lemmatu 15.5 je $\delta \in (0, +\infty)$. Položme dále $U = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \frac{\delta}{2}\}$ a $V = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$. Pak U, V jsou otevřené (Fakt 15.4), $K \subset U \subset V \subset G$, V je omezená a $\operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus V) \ge \frac{\delta}{2}$. Dle Lemmatu 2 existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ na U a $\operatorname{supp} \varphi \subset V$. Tedy φ má kompaktní nosič a $\varphi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(G)$.

□

DŮKAZ LEMMATU 1. (a) Nechť $\mu \neq 0$. Pak existuje borelovská $A \subset \Omega$ taková, že $|\mu(A)| > 0$. Míra $|\mu|$ je konečná a těsná (Věta 15.83), existují tedy kompaktní $K \subset A$ a otevřená $A \subset G \subset \Omega$ takové, že $|\mu|(G \setminus K) < \frac{1}{2}|\mu(A)|$ (Lemma 15.79). Pak $|\mu(K)| = |\mu(A) - \mu(A \setminus K)| \ge |\mu(A)| - |\mu|(A \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)|$.

Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dle předpokladu pak platí $0 = \left|\int_\Omega \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_G \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_K \varphi \, d\mu + \int_{G\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \ge |\mu(K)| - \left|\int_{G\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \ge |\mu(K)| - \int_{G\setminus K} \varphi \, d|\mu| \ge |\mu(K)| - |\mu|(G \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)| - |\mu|(G \setminus K) > 0$, což je spor.

(b) Předpokládejme, že $f \neq 0$ na nějaké množině kladné míry. Ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(x,\delta) \subset \Omega$ a f je integrovatelná na $U(x,\delta)$. Z Lindelöfovy vlastnosti plyne, že Ω lze pokrýt spočetně mnoha příslušnými okolími $U(x,\delta)$. Existuje tedy $U(z,\delta)$ takové, že $U(z,\delta) \subset \Omega$, f je integrovatelná na $U(z,\delta)$ a f není nulová s. v. na $U(z,\delta)$. Proto existuje měřitelná množina $E \subset U(z,\delta)$ taková, že $\int_E f \, d\lambda \neq 0$ ([R, Věta 1.39]).

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že E je borelovská ([R, Věta 2.20]). Definujme nyní borelovskou komplexní míru μ na $U(z,\delta)$ předpisem $\mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset U(z,\delta)$ (že je to míra plyne z Věty 15.93). Protože μ je nenulová ($\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \neq 0$), existuje dle (a) nezáporná funkce $\varphi \in \mathcal{D}(U(z,\delta),\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{R})$ taková, že $\int_{U(z,\delta)} \varphi \, d\mu \neq 0$. Tedy dle Věty 15.93 máme $0 \neq \int_{U(z,\delta)} \varphi \, d\mu = \int_{U(z,\delta)} \varphi f \, d\lambda = \int_\Omega \varphi f \, d\lambda = 0$, což je spor.

(c) Stačí dokázat, že za daných předpokladů je $\mu \ll \lambda$. Pak totiž dle Radonovy-Nikodymovy věty existuje $h \in L_1(\lambda,\Omega)$ taková, že $\mu(A) = \int_A h \, d\lambda$ pro každou $A \subset \Omega$ borelovskou. Protože díky Větě 15.93 je $\int_\Omega \varphi h \, d\lambda = \int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega \varphi f \, d\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je dle (b) $f = h$ skoro všude.

Předpokládejme, že existuje $E \subset \Omega$ borelovská taková, že $\lambda(E) = 0$ a $\mu(E) \neq 0$. Dle Věty 15.83 je $|\mu|$ těsná a zevně regulární. Existuje tedy kompaktní $K \subset E$ taková, že $|\mu|(E \setminus K) = |\mu|(E) - |\mu|(K) < |\mu(E)|$. Pak $\delta = |\mu(K)| = |\mu(E) - \mu(E \setminus K)| \ge |\mu(E)| - |\mu(E \setminus K)| \ge |\mu(E)| - |\mu|(E \setminus K) > 0$. Dále díky kompaktnosti K existuje otevřená $U \supset K$ taková, že $\int_U |f| \, d\lambda$ je konečný. Protože $\int_K |f| \, d\lambda = 0$, z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu a vnější regularity λ plyne existence otevřené $G \supset K$ takové, že $\int_G |f| \, d\lambda < \frac{\delta}{2}$. Konečně, z vnější regularity $|\mu|$ plyne existence otevřené H takové, že $K \subset H \subset G$ a $|\mu|(H \setminus K) < \frac{\delta}{2}$. Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dostáváme tak (s využitím Důsledku 15.95), že

$$\begin{aligned}
\delta = |\mu(K)| &= \left|\int_K \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_H \varphi \, d\mu - \int_{H\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \le \left|\int_H \varphi \, d\mu\right| + \left|\int_{H\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \le \\
&\le \left|\int_\Omega \varphi \, d\mu\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \, d|\mu| = \left|\int_\Omega f\varphi \, d\lambda\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \, d|\mu| \le \left|\int_H f\varphi \, d\lambda\right| + |\mu|(H \setminus K) < \\
&< \int_H |f| \, d\lambda + \frac{\delta}{2} < \delta,
\end{aligned}$$

což je spor.

□

1. Slabé derivace

Pracujeme-li s funkcemi tak, jak bylo naznačeno v úvodu, tj. pomocí integrálních průměrů dle testovacích funkcí, pak by se nám hodilo v tomto systému vyvinout např. něco jako diferenciální kalkulus. Opět, nemusí nás zajímat, jak je derivace definována bodově (ani to nejde, neboť samotné funkce nejsou definovány bodově), spíše nás zajímá, jak se „něco jako derivace" chová v průměru. Protože nemáme k dispozici bodové hodnoty, první potíží je, jakým způsobem vůbec „derivaci" definovat. Samozřejmě pro hladké funkce by vše mělo fungovat jako v klasickém případě.

Následující pozorování nám dává nápovědu, jak k problému přistoupit. Též je vidět, proč je výhodné za prostor testovacích funkcí zvolit funkce hladké a s kompaktním nosičem.

TVRZENÍ 4. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in C^1((a,b))$. Pak*

$$\int_a^b f'\varphi \, d\lambda = -\int_a^b f\varphi' \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

DŮKAZ. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pro platnost vzorce je klíčový fakt, že $\operatorname{supp}\varphi$ leží uvnitř (a,b), tj. existuje uzavřený interval $[c,d] \subset (a,b)$ takový, že $\operatorname{supp}\varphi \subset [c,d]$. Funkce $f\varphi$ je tedy rovna 0 na (a,c) a (d,b), odkud plyne, že $\lim_{x\to a+} f\varphi(x) = \lim_{x\to b-} f\varphi(x) = 0$ a $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_c^d f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda \in \mathbb{R}$. Funkce f a φ' jsou spojité, podle věty o integraci per partes pro Newtonův integrál tedy máme $\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = [f\varphi]_a^b - \int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$.

□

DEFINICE 5. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a,b) je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

Následující věta plyne ihned z Lemmatu 1.

VĚTA 6. *Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivací f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a,b) slabou derivací f, pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a,b) slabou derivací f, pak $g \in L_1((a,b))$ a $\mu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a,b)$.*

PŘÍKLAD 7. Slabou derivací funkce $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$ je funkce sgn: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^{+\infty} x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 -\varphi(x) \,\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}\lambda.$$

Slabou derivací funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ je míra $2\delta_0$: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 -\varphi' \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^{+\infty} \varphi' \,\mathrm{d}\lambda = [-\varphi]_{-\infty}^0 + [\varphi]_0^{+\infty} = -\varphi(0) - \varphi(0) = -2\varphi(0) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}(2\delta_0).$$

◇

TVRZENÍ 8. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ takové, že $f = c$ s. v. na (a,b)).*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = c[\varphi]_a^b = 0 = -\int_a^b 0\varphi \,\mathrm{d}\lambda$.

$\Rightarrow$ Nechť $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná funkce splňující $\int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$. Položme $c = \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$. Ukážeme, že $f = c$ s. v. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná. Položme $\psi(x) = \int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$ pro $x \in (a,b)$. Pak $\psi'(x) = \varphi(x) - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Zjevně $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Nechť $\alpha, \beta \in (a,b)$ jsou taková, že $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi_0 \subset [\alpha,\beta]$. Zjevně $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in (a,\alpha)$. Protože $\int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda$ a $\int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$ pro každé $x \in (\beta,b)$, je též $\psi(x) = 0$ pro $x \in (\beta,b)$. Tedy $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$. Dle definice slabé derivace tak platí $\int_a^b f\psi' \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Proto $\int_a^b f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f\big(\psi' + \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0\big) \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi \,\mathrm{d}\lambda$. Dle Lemmatu 1(b) odtud plyne, že $f = c$ s. v.

□

Z klasických výsledků reálné analýzy je znám následující výsledek:

VĚTA 9. *Nechť* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$.

(a) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a,b]$, *pak má vlastní derivaci s. v.,* $f' \in L_1((a,b))$ *a* f' *je slabou derivací* f. *Obráceně, má-li* f *slabou derivaci* $g \in L_1((a,b))$, *pak existuje funkce* f_0 *absolutně spojitá na* $[a,b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. Potom je* $g = f_0'$ *s. v.*

(b) Funkce f *má slabou derivaci v* $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, *právě když existuje funkce* f_0 *lokálně absolutně spojitá na* (a,b) *taková, že* $f = f_0$ *s. v.*

(c) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. *Funkce* f *má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře* μ *na* $[a,b]$,*právě když existuje zleva spojitá funkce* f_0 *konečné variace na* $[a,b]$ *taková, že* $f = f_0$ *s. v. V tom případě pro každé* $x \in [a,b]$ *platí* $\mu([a,x)) = f_0(x) - f_0(a)$. *Navíc* μ *je reálná, právě když lze* f_0 *volit reálnou, a* μ *je (konečná) nezáporná, právě když lze* f_0 *volit neklesající.*

■■■[důkaz do appendixu]

POZNÁMKA. Obecně neplatí, že má-li funkce f na (a,b) vlastní derivaci f' s. v., pak f' je slabou derivací f na (a,b): Je-li f Cantorova funkce na $[0,1]$, pak $f' = 0$ s. v., ale f nemá nulovou slabou derivaci na $(0,1)$, neboť by dle Tvrzení 8 musela být s. v. konstantní, což není. Na druhou stranu, f má konečnou variaci, a tedy dle Věty 9 je její slabou derivací jistá míra na $(0,1)$.

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Při budování teorie distribucí vycházíme z prostoru testovacích funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$. Tento prostor vybavíme vhodnou lokálně konvexní topologií τ a „zobecněné funkce“, tj. distribuce, pak chápeme jako spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Operace na těchto zobecněných funkcích jsou pak definovány pomocí akce zobecněných funkcí na příslušným způsobem transformované testovací funkce.

Vhodnou topologii τ zkonstruujeme postupně v několika krocích.

DEFINICE 10. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Snadno nahlédneme, že každá z funkcí $\|\cdot\|_N$ je normou na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Posloupnost norem $\{\|\cdot\|_N\}_{N=0}^\infty$ na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ generuje Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ_ρ metrizovatelnou translačně invariantní metrikou

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^\infty \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}$$

pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (vizte Lemma 6.61).

Poznamenejme, že často se za kanonickou metriku na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ bere metrika slabší než ρ, která dává jen lokálně stejnoměrnou konvergenci. Pro naše účely – vybudování základů teorie distribucí – na tom ovšem nezáleží, proto používáme jednodušší metriku stejnoměrné konvergence ρ.

VĚTA 11. *Metrika* ρ *má následující vlastnosti:*

(a) Nechť $\{\varphi_n\}$ *je posloupnost v* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *a* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) $\varphi_n \to \varphi$ *v metrice* ρ.
   (ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ *pro každé* $N \in \mathbb{N}_0$.
   (iii) Pro každý multiindex α *délky* d *platí, že* $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.

(b) Je-li α *multiindex délky* d, *pak zobrazení* $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ *je spojité jakožto zobrazení z* $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ *do* $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.

(c) Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ *je* $(\mathcal{D}(K), \rho)$ *úplný metrický prostor.*

Poznamenejme, že je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, pak na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ metrika ρ není úplná. To je zdrojem potíží, jak uvidíme dále.

DŮKAZ. (a) Ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Věty 6.58(c) a Lemmatu 6.61, ekvivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii) je zjevná.

Tvrzení (b) plyne snadno z (a) (iii).

(c) Nechť $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Snadno odvodíme, že $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská v každé z norem $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$. Vskutku, nechť $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon \in (0,1)$ je dáno. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geq n_0$ platí $\rho(\varphi_n, \varphi_m) < \frac{\varepsilon}{2^N}$. Pak $\frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi_n - \varphi_m\|_N, 1\} < \frac{\varepsilon}{2^N}$ pro $n, m \geq n_0$, což implikuje, že $\|\varphi_n - \varphi_m\|_N < \varepsilon$ pro $n, m \geq n_0$. Odtud plyne, že pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $\psi_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d)$ taková, že $D^\alpha \varphi_n \to \psi_\alpha$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Speciálně, pro $\varphi = \psi_0$ platí, že $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty z analýzy (vizte Větu **??**) je pak $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Odtud plyne, že $D^\alpha \varphi = \psi_\alpha$, tedy $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Protože $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je i $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, a tedy $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Konečně, z (a) plyne, že $\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.

□

Všimněme si, že díky definici norem $\|\cdot\|_N$ tvoří bázi okolí nuly v topologii τ_ρ množiny $U_{\|\cdot\|_N, \varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$. Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní označme τ_K topologii podprostoru na $\mathcal{D}(K)$ zděděnou z τ_ρ. Dle Věty 11(c) je $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ Fréchetův prostor. Pro účely teorie distribucí je ovšem topologie τ_ρ příliš slabá. Níže definujeme vhodnější lokálně konvexní topologii na prostoru testovacích funkcí.

VĚTA 12. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Položme*

$$\mathcal{U} = \big\{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.
(b) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.
(c) Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.
(d) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v τ, právě když existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.
(e) Je-li Ω neprázdná, pak $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ je první kategorie v sobě.

DŮKAZ. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 6.8. Pokud $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, pak $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$: pro každý kompakt $K \subset \Omega$ platí $U \cap \mathcal{D}(K) = (U_1 \cap \mathcal{D}(K)) \cap (U_2 \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$. Dále, nechť $U \in \mathcal{U}$. Pak pro $V = \frac{1}{2}U$ je $V \cap \mathcal{D}(K) = \frac{1}{2}(U \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$, takže $V \in \mathcal{U}$, a díky konvexitě U je $V + V = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U$. Konečně, je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pak $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pro nějakou kompaktní $K \subset \Omega$. Protože $U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, je $U \cap \mathcal{D}(K)$ pohlcující v $\mathcal{D}(K)$, takže existuje $\lambda > 0$ takové, že $t\varphi \in U \cap \mathcal{D}(K) \subset U$ pro $t \in [0, \lambda]$. To znamená, že U je pohlcující v $\mathcal{D}(\Omega)$. Systém $\mathcal{U}$ je tedy bází okolí lokálně konvexní topologie τ na $\mathcal{D}(\Omega)$. Hausdorffovost τ je důsledkem (a) níže.

(a) Nechť $U \in \tau_\rho(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau_\rho(0)$, $V \subset U$. Položme $V_\Omega = V \cap \mathcal{D}(\Omega)$. Pak pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní je $V_\Omega \cap \mathcal{D}(K) = V \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, takže $V_\Omega \in \mathcal{U} \subset \tau(0)$. Tedy i $U \cap \mathcal{D}(\Omega) \in \tau(0)$.

(b) Ukážeme, že $\mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$ je τ-otevřená. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$. Pak existuje $x \in \Omega \setminus K$ takové, že $\delta = |\varphi(x)| > 0$. Položme $W = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \|\psi - \varphi\|_0 < \delta\}$. Množina W je otevřená v $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)}$, a je tedy dle (a) i τ-otevřená. Zjevně $\psi(x) \neq 0$ pro každé $\psi \in W$, takže $W \subset \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$.

Dále, podle (a) je $\tau_K(0) \subset \tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0)$. Na druhou stranu, $\mathcal{U} \restriction_{\mathcal{D}(K)} \subset \tau_K(0)$ z definice $\mathcal{U}$, a tedy $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0) \subset \tau_K(0)$.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $K_n = B(0,n) \cap \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$. Pak K_n jsou kompaktní podmnožiny Ω takové, že $K_n \subset K_{n+1}$ a pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset K_n$.

Pokračujme sporem: předpokládejme, že A neleží v žádném podprostoru $\mathcal{D}(K)$, $K \subset \Omega$ kompaktní. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují bod $x_n \in \Omega \setminus K_n$ a funkce $\varphi_n \in A$ tak, že $\varphi_n(x_n) \neq 0$. Položme

$$U = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ |\psi(x_n)| < \frac{1}{n}|\varphi_n(x_n)| \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pak $U \in \mathcal{U}$. Vskutku, snadno vidíme, že $\psi \mapsto |\psi(x_n)|$ jsou pseudonormy, takže U je absolutně konvexní, jakožto průnik absolutně konvexních množin. Dále, je-li $K \subset \Omega$ kompaktní, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset K_n$, a tedy $x_k \notin K$ pro $k \geq n$. Tedy

$$\begin{aligned} U \cap \mathcal{D}(K) &= \left\{ \psi \in \mathcal{D}(K);\ |\psi(x_k)| < \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)| \text{ pro } 1 \leq k < n \right\} \supset \\ &\supset \left\{ \psi \in \mathcal{D}(K);\ \|\psi\|_0 < \min_{1 \leq k < n} \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)| \right\} \in \tau_K(0). \end{aligned}$$

Z definice U ovšem vidíme, že je-li $t > 0$ libovolné, pak pro $n = \lceil t \rceil$ je $\frac{1}{t}\varphi_n \notin U$, takže $\varphi_n \notin tU$. Tedy A není τ-omezená, což je spor.

(d) $\Leftarrow$ Z předpokladu speciálně plyne, že $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, tvrzení tedy plyne z (b) a Věty 11(a).

$\Rightarrow$ Množina $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$ je omezená (Poznámka 6.29), tedy dle (c) existuje kompaktní $K \subset \Omega$ tak, že $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Zbytek plyne z (b) a Věty 11(a).

(e) Pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní má $\mathcal{D}(K)$ prázdný vnitřek v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$: pokud by tomu tak nebylo, pak by podprostor $\mathcal{D}(K)$ obsahoval τ-okolí 0, tedy pohlcující podmnožinu $\mathcal{D}(\Omega)$, což by znamenalo, že $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(\Omega)$. To ovšem není pravda, neboť existuje $x \in \Omega \setminus K$ a funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi(x) \neq 0$, takže $\varphi \notin \mathcal{D}(K)$. Dle (b) jsou tedy podprostory $\mathcal{D}(K)$ řídké v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Konečně, jsou-li $K_n \subset \Omega$ kompaktní podmnožiny z důkazu (c), pak zjevně $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(K_n)$.

□

Všimněme si, že topologie indukovaná metrikou ρ je „nezávislá“ na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – stačí vzít prostě restrikci τ_ρ z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ na podprostor $\mathcal{D}(\Omega)$. To ale neplatí o výše zavedené topologii τ. Ta zásadním způsobem závisí právě na volbě množiny Ω. Označíme-li τ_Ω příslušnou topologii na $\mathcal{D}(\Omega)$, pak je snadno vidět, že $\tau_{\mathbb{R}^d}\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau_\Omega$. Na druhou stranu, vezmeme-li např. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\operatorname{supp}\varphi = B(0,1)$, a položíme-li $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi\big(x - (1 - \frac{1}{n})e_1\big)$ a $\Omega = U(0,2)$, pak $\varphi_n \to 0$ v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{\mathbb{R}^d}\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)})$, ale nikoli v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_\Omega)$, neboť $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}\varphi_n} \not\subset \Omega$. Tedy $\tau_{\mathbb{R}^d}\restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subsetneq \tau_\Omega$.

Pro čtenáře se znalostí uniformních prostorů poznamenejme, že prostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ není metrizovatelný, což lze odvodit z toho, že je sekvenciálně úplný a první kategorie v sobě. Sekvenciální úplnost snadno dostaneme z Věty 12(b) a úplnosti prostoru $(\mathcal{D}(K), \rho)$ (Věta 11(c)).

TVRZENÍ 13. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, Y je lokálně konvexní prostor a $T\colon (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.
(ii) Pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergující k 0 v τ je množina $\{T(\varphi_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.
(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $T\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) dle Věty 6.33.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Protože $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$ (Věta 12(b)) a τ_K je metrizovatelná, plyne tato implikace též z Věty 6.33.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť V je absolutně konvexní okolí 0 v Y. Položme $U = T^{-1}(V)$. Pak U je absolutně konvexní množina v $\mathcal{D}(\Omega)$. Pro každý kompakt $K \subset \Omega$ díky předpokladu platí, že $U \cap \mathcal{D}(K) = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ T(\varphi) \in V\} \in \tau_K(0)$, takže $U \in \tau(0)$. Tedy vzory okolí 0 v Y jsou okolí 0 v $\mathcal{D}(\Omega)$, což znamená, že T je spojité.

□

DEFINICE 14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ se nazývají distribuce na Ω. Prostor všech distribucí na Ω je tedy prostor $\mathcal{D}(\Omega)^* = (\mathcal{D}(\Omega), \tau)^*$.

Z Tvrzení 13 plyne následující charakterizace distribucí:

VĚTA 15. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je lineární. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, právě když pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Jelikož $\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ je spojitá a $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$, existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| < 1$ pro $\varphi \in U_{\|\cdot\|_N,\varepsilon} \cap \mathcal{D}(K)$. Pak ale $|\Lambda(\varphi)| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|_N$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

$\Leftarrow$ Dle Tvrzení 13 stačí ověřit spojitost $\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ pro každou kompaktní $K \subset \Omega$. Nechť tedy $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou příslušné konstanty z předpokladu. Pak $|\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(K)}| \leq C$ na $U_{\|\cdot\|_N,1} \cap \mathcal{D}(K)$, a tedy $\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ je spojitý dle Věty 6.33.

□

Konstanty N a C z předchozí věty obecně závisejí na volbě kompaktní podmnožiny $K \subset \Omega$. Někdy se ovšem může stát, že hodnota N na volbě K nezávisí:

DEFINICE 16. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

PŘÍKLADY 17. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

- Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Definujme
$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$
pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_f je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_f(\varphi)| \leq \int_K |f\varphi| \,\mathrm{d}\lambda \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f| \,\mathrm{d}\lambda$. Distribuce tohoto tvaru se nazývají regulární distribuce.
- Nechť μ je borelovská komplexní míra na Ω. Definujme
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$$
pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_μ je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| \leq \|\varphi\|_0 |\mu|(\Omega) = \|\mu\|\|\varphi\|_0$.
- Nechť $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \varphi^{(k)}(0)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu k. Vskutku, zjevně $|\Lambda(\varphi)| = |\varphi^{(k)}(0)| \leq \|\varphi\|_k$. Na druhou stranu, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je taková, že $\varphi = 1$ na $(-1, 1)$. Položme $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \sin(nx)$ pro k liché, resp. $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \cos(nx)$ pro k sudé. Pak pro $\varphi_n = \varphi \cdot \psi_n \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \varphi)$ je $|\Lambda(\varphi_n)| = |\psi_n^{(k)}(0)| = n$, zatímco z Leibnizova[1] vzorce plyne, že posloupnost $\{\|\varphi_n\|_{k-1}\}_{n=1}^\infty$ je omezená. Tedy Λ není řádu $k-1$.
- Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi^{(n)}(n)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu ∞. Vskutku, nejprve si uvědomme, že funkcionál Λ je dobře definován, neboť pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ obsahuje řada v definici pouze konečně mnoho nenulových členů. Dále, je-li $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset [-N, N]$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pak platí $|\Lambda(\varphi)| = \left|\sum_{n=1}^N \varphi^{(n)}(n)\right| \leq \sum_{n=1}^N |\varphi^{(n)}(n)| \leq N\|\varphi\|_N$. Konečně, pro libovolné pevné $N \in \mathbb{N}_0$ zkonstruujeme podobně jako v předchozím příkladu posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}([N+1-\frac{1}{2}, N+1+\frac{1}{2}])$ takovou, že $\|\varphi_n\|_N \leq 1$, ale $\Lambda(\varphi_n) = \varphi_n^{(N+1)}(N+1) \to +\infty$. Tedy Λ není konečného řádu.

POZNÁMKA 18. Dle příkladu výše lze každou lokálně integrovatelnou funkci, resp. každou komplexní borelovskou míru na Ω chápat jako distribuci. V tomto smyslu jsou tedy distribuce zobecněním funkcí i zobecněním měr. Z Lemmatu 1 plynou následující pozorování:

- Jsou-li $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ takové, že $\Lambda_f = \Lambda_g$, pak $f = g$ s. v.
- Jsou-li borelovské komplexní míry μ, ν na Ω takové, že $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$, pak $\mu = \nu$.
- Jsou-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a borelovská komplexní míra μ na Ω takové, že $\Lambda_f = \Lambda_\mu$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Jinými slovy, zobrazení $f \mapsto \Lambda_f$ a $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ jsou prostá, neboli různé funkce (ve smyslu tříd ekvivalence s. v.) a různé míry určují různé distribuce.

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz

POZNÁMKA. Nechť $\Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$ jsou otevřené množiny a Λ je distribuce na Ω_1. Pak Λ je i „distribuce na Ω_2“, přesněji $\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(\Omega_2)} \in \mathcal{D}(\Omega_2)^*$. To plyne snadno z Věty 15, případně z toho, že $\tau_{\Omega_1}\restriction_{\mathcal{D}(\Omega_2)} \subset \tau_{\Omega_2}$ (vizte poznámku před Tvrzením 13).

3. Operace s distribucemi

Jako motivace pro definici derivací distribuce nám bude sloužit následující lemma.

LEMMA 19. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny parciální derivace až do řádu k omezené a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný. Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $0 < |\alpha| \leq k$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ takové, že $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$. Je-li tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak díky Lemmatu 5.25 a s využitím indukčního předpokladu obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial D^{\alpha - e_j} f}{\partial x_j} \varphi \, d\lambda = - \int_{\mathbb{R}^d} D^{\alpha - e_j} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\lambda = \\ &= -(-1)^{|\alpha| - 1} \int_{\mathbb{R}^d} f D^{\alpha - e_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \, d\lambda,\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí díky větě o záměnnosti parciálních derivací.

□

Lemma výše ukazuje, že akce regulární distribuce určené funkcí $D^\alpha f$ na testovací funkci φ je stejná jako akce regulární distribuce určené funkcí f na testovací funkci $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$. Tento fakt motivuje následující definici:

DEFINICE 20. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme součin funkce f a distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

V případě, že $d = 1$, používáme pro derivace distribucí klasické značení, tj. $D^1 \Lambda = \Lambda'$, $D^2 \Lambda = \Lambda''$, $D^k \Lambda = \Lambda^{(k)}$, apod.

Uvědomme si, že pro konstantní funkci $f(x) = c$ je $f\Lambda(\varphi) = \Lambda(f\varphi) = \Lambda(c\varphi) = c(\Lambda(\varphi)) = (c\Lambda)(\varphi)$, kde úplně vpravo je násobení prvku vektorového prostoru skalárem. Značení je tedy konzistentní.

TVRZENÍ 21. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.
(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.
(e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, pak
- *$\Lambda_g' = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, právě když h je slabou derivací g;*
- *$\Lambda_g' = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a, b), právě když μ je slabou derivací g.*

Pro důkaz (b) budeme potřebovat následující kvalitativní verzi Leibnizova vzorce:

FAKT 22. *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c_\beta^\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta \leq \alpha$ (nerovnost vektorů zde chápeme po složkách) takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c_\beta^\alpha D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

DŮKAZ. Důkaz se snadno provede indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný s konstantou $c_0^0 = 1$. Nechť nyní $|\alpha| > 0$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro multiindexy menšího řádu. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha-e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy dle indukčního předpokladu máme

$$D^\alpha(fg) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha-e_j}} c_\beta^{\alpha-e_j} D^\beta f D^{\alpha-e_j-\beta} g\Bigg) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha-e_j}} c_\beta^{\alpha-e_j} \frac{\partial(D^\beta f D^{\alpha-e_j-\beta} g)}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha-e_j}} c_\beta^{\alpha-e_j} \big(D^{\beta+e_j} f D^{\alpha-(\beta+e_j)} g + D^\beta f D^{\alpha-\beta} g\big).$$

Odtud již snadno plyne požadovaný vzorec.

□

DŮKAZ TVRZENÍ 21. (a) Funkcionál $D^\alpha\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci z Věty 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ máme $|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| = |(-1)^\alpha \Lambda(D^\alpha\varphi)| \leq C\|D^\alpha\varphi\|_N \leq C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}$. Tedy $D^\alpha\Lambda$ též splňuje podmínku z Věty 15.

(b) Funkcionál $f\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci z Věty 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ díky Faktu 22 platí

$$|(f\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(f\varphi)| \leq C\|f\varphi\|_N = C\max_{|\alpha|\leq N}\|D^\alpha(f\varphi)\|_\infty \leq C\max_{|\alpha|\leq N}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c_\beta^\alpha \|D^\beta f D^{\alpha-\beta}\varphi\|_\infty \leq$$

$$\leq C\|\varphi\|_N \max_{|\alpha|\leq N}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c_\beta^\alpha \max_{x\in K}|D^\beta f(x)|.$$

Tedy $f\Lambda$ též splňuje podmínku z Věty 15.

(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak i $fg \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $(f\Lambda_g)(\varphi) = \Lambda_g(f\varphi) = \int_\Omega gf\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{fg}(\varphi)$.

(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, a tedy $\Lambda_{D^\alpha g}$ je definována. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp}\varphi$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Definujme $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ předpisem $\tilde{g} = \psi g$ na Ω a $\tilde{g} = 0$ mimo Ω. Snadno nahlédneme, že $\tilde{g} \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$, neboť je nulová na otevřené množině $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\psi$ obsahující $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dále $\operatorname{supp}\tilde{g} \subset \operatorname{supp}\psi$, tedy $\tilde{g}$ má kompaktní nosič, odkud plyne, že všechny parciální derivace $\tilde{g}$ až do řádu $|\alpha|$ jsou omezené. Uvědomíme-li si ještě, že $\tilde{g} = g$ na U a díky otevřenosti U je i $D^\alpha\tilde{g} = D^\alpha g$ na U, můžeme využít Lemma 19 k výpočtu

$$D^\alpha\Lambda_g(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_g(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_U gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_U \tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_U D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_U D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{D^\alpha g}(\varphi).$$

(e) Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pak $\Lambda'_g(\varphi) = -\Lambda_g(\varphi') = -\int_a^b g\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$. Na druhou stranu, pro $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je $\Lambda_h(\varphi) = \int_a^b h\varphi \,\mathrm{d}\lambda$. Tedy $\Lambda'_g = \Lambda_h$, právě když pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b h\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b g\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$, neboli právě když h je slabou derivací g. Analogicky pro borelovskou komplexní míru μ.

□

PŘÍKLAD 23. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $\Lambda \in \mathcal{D}((a,b))^*$ je taková, že $\Lambda' = 0$. Pak $\Lambda = \Lambda_c$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$ (tj. Λ je regulární distribuce reprezentující konstantní funkci ve smyslu Příkladu 17).

Důkaz je téměř shodný s důkazem Tvrzení 8: Nechť $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná funkce splňující $\int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$. Položme $c = \Lambda(\varphi_0)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná. Položíme-li $\psi(x) = \int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$ pro $x \in (a,b)$, pak $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$ (vizte důkaz Tvrzení 8). Tedy

$$0 = \Lambda'(\psi) = -\Lambda(\psi') = -\Lambda\Big(\varphi - \big(\textstyle\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda\big)\varphi_0\Big) = -\Lambda(\varphi) + \big(\textstyle\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda\big)\Lambda(\varphi_0) = -\Lambda(\varphi) + \textstyle\int_a^b c\varphi \,\mathrm{d}\lambda.$$

◇

PŘÍKLAD 24. Nechť $\Lambda_{\log|x|}$ je regulární distribuce na $\mathbb{R}$ určená lokálně integrovatelnou funkcí $x \mapsto \log|x|$. Pak její derivace $\Lambda'_{\log|x|}$ je distribuce $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ daná předpisem

$$\Lambda_{\frac{1}{x}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(Upozorněme, že symbol $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ zde neznačí regulární distribuci reprezentující funkci $\frac{1}{x}$, neboť tato funkce není lokálně integrovatelná na $\mathbb{R}$ a integrál $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x) \,\mathrm{d}\lambda$ obecně existuje pouze ve smyslu hlavní hodnoty.) Dále je

$$x\Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_1,$$

kde symbol „x“ zcela vlevo značí poněkud nepřesně (ale zato čitelně) funkci $x \mapsto x$.

Vskutku, pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\log|x|}(\varphi) &= -\Lambda_{\log|x|}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log|x| \,\mathrm{d}\lambda = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \varphi'(x)\log|x| \,\mathrm{d}\lambda = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left([-\varphi(x)\log(-x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + [-\varphi(x)\log x]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda \right) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \big(-\varphi(-\varepsilon)\log\varepsilon + \varphi(\varepsilon)\log\varepsilon\big) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\log\varepsilon \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\log\varepsilon \cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + 0 \cdot 2\varphi'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili Důsledek 15.73 a integraci per partes (buďto pro Newtonův integrál spolu se vztahem Newtonova a Lebesgueova integrálu, nebo pro absolutně spojité funkce s využitím kompaktnosti nosiče φ). Všimněme si též, že z předchozího výpočtu čteného zprava doleva lze odvodit existenci vlastní limity $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda$. Dále pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je

$$x\Lambda_{\frac{1}{x}}(\varphi) = \Lambda_{\frac{1}{x}}\big(x \mapsto x\varphi(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}\lambda \right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_1(\varphi).$$

◇

PŘÍKLAD 25. Na $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ nelze zavést násobení $\cdot\colon \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \times \mathcal{D}(\mathbb{R})^* \to \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, které je asociativní, komutativní a splňuje to, že $\Lambda_f \cdot \Lambda = f\Lambda$ pro každé $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

Vskutku, předpokládejme, že $\cdot$ je násobení s uvedenými vlastnostmi. Nechť Λ_{δ_0} je distribuce určená Diracovou mírou v bodě 0 a $\Lambda_{\frac{1}{x}}$ je distribuce z Příkladu 24. Pak $x\Lambda_{\delta_0}(\varphi) = \Lambda_{\delta_0}(x \mapsto x\varphi(x)) = 0$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tedy

$$\begin{aligned}0 = 0\Lambda_{\frac{1}{x}} &= \Lambda_0 \cdot \Lambda_{\frac{1}{x}} = (x\Lambda_{\delta_0}) \cdot \Lambda_{\frac{1}{x}} = (\Lambda_x \cdot \Lambda_{\delta_0}) \cdot \Lambda_{\frac{1}{x}} = (\Lambda_{\delta_0} \cdot \Lambda_x) \cdot \Lambda_{\frac{1}{x}} = \Lambda_{\delta_0} \cdot (\Lambda_x \cdot \Lambda_{\frac{1}{x}}) = \\ &= \Lambda_{\delta_0} \cdot (x\Lambda_{\frac{1}{x}}) = \Lambda_{\delta_0} \cdot \Lambda_1 = \Lambda_1 \cdot \Lambda_{\delta_0} = 1\Lambda_{\delta_0} = \Lambda_{\delta_0},\end{aligned}$$

což je spor.

◇

4. Prostor distribucí

Prostor distribucí je duální prostor k lokálně konvexnímu prostoru testovacích funkcí. Jak jsme viděli v oddílu 6.9, přirozenou topologií na duálu (nemáme-li k dispozici *a priori* jinou topologii) je topologie w^*. V tomto oddílu uvidíme, že pro prostor distribucí je vskutku topologie w^* opět přirozenou volbou. Na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)^*$ budeme tedy vždy pracovat s topologií w^*.

PŘÍKLAD 26. Prostor $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná otevřená množina, není metrizovatelný. Vskutku, dle Tvrzení 6.99 je tento prostor metrizovatelný právě tehdy, když $\varepsilon(\mathcal{D}(\Omega))$ má spočetnou algebraickou bázi. Kanonické zobrazení $\varepsilon\colon \mathcal{D}(\Omega) \to (\mathcal{D}(\Omega)^*)^\#$ je prosté, neboť τ je Hausdorffova lokálně konvexní topologie. Stačí tedy ukázat, že $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje nespočetnou lineárně nezávislou množinu.

Za tím účelem nalezněme $u, v \in \mathbb{R}^d$, $v \neq 0$, a $r > 0$ tak, že $B(u + tv, r) \subset \Omega$ pro každé $t \in [0, 1]$. Nechť $\psi_t \in \mathcal{D}(\Omega)$, $t \in [0, 1]$ jsou funkce takové, že $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \psi_t(x) \neq 0\} = U(u + tv, r)$ (vizte Příklad 5.11). Pak množina $\{\psi_t;\ t \in [0, 1]\}$ je lineárně nezávislá (a má mohutnost kontinua): Indukcí dle n ukážeme, že $\psi_{t_1}, \dots, \psi_{t_n}$, $t_j \in [0, 1]$ po dvou různé, jsou lineárně nezávislé. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Indukční krok: Bez újmy na obecnosti nechť $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Pak existuje $x \in U(u + t_1v, r)$ takové, že $x \notin U(u + t_jv, r)$, $j \in \{2, \dots, n\}$. Je-li $\alpha_1\psi_{t_1} + \cdots + \alpha_n\psi_{t_n} = 0$, pak $\alpha_1\psi_{t_1}(x) = 0$, a tedy $\alpha_1 = 0$. Z indukčního předpokladu pak plyne, že $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

◇

TVRZENÍ 27. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $g \in C^\infty(\Omega)$. Pak zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha\Lambda$ a $\Lambda \mapsto g\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení prostoru $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$ do sebe.

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(c) Zobrazení $\varphi \mapsto \Lambda_\varphi$ je prosté spojité lineární zobrazení $(\mathcal{D}(\Omega), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$.

(d) Je-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

DŮKAZ. (a) Linearita obou zobrazení je zřejmá z definice. Je-li $\{\Lambda_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ usměrněný soubor v $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$ konvergující k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy platí $D^\alpha\Lambda_\gamma(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_\gamma(D^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) = D^\alpha\Lambda(\varphi)$. Podobně, pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy platí $(g\Lambda_\gamma)(\varphi) = \Lambda_\gamma(g\varphi) \to \Lambda(g\varphi) = (g\Lambda)(\varphi)$.

(b) Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $|\Lambda_{f_n}(\varphi) - \Lambda_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f_n\varphi \,\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f_n - f||\varphi| \,\mathrm{d}\lambda \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$.

(c) Linearita je snadno vidět z definice. Spojitost plyne ihned z (b), neboť $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Prostota pak plyne z Poznámky 18.

(d) plyne ihned z (b), neboť pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí díky Hölderově nerovnosti (pro $1 < p < \infty$) $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda = \int_K |f_n - f| \cdot 1 \,\mathrm{d}\lambda \leq \left(\int_K |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} \left(\int_K 1^q \,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/q} \leq \|f_n - f\|_{L_p} \lambda(K)^{1/q}$, kde q je sdružený exponent k p. Uvědomme si, že nerovnost mezi výrazy zcela vlevo a zcela vpravo platí i v případě, že $p = 1$ nebo $p = \infty$.

□

VĚTA 28. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

DŮKAZ. Dle Faktu 6.39 je Λ lineární forma na $\mathcal{D}(\Omega)$. Spojitost Λ je přímým důsledkem Baireovy věty o bodech spojitosti funkcí 1. Baireovy třídy. Zde podáme alternativní důkaz pomocí charakterizace z Věty 15. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $A_k = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k$ pro každé $n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k\}$. Každá z množin A_k je uzavřená v $(\mathcal{D}(K), \rho)$, neboť $\Lambda_n \restriction_{\mathcal{D}(K)}$ jsou spojité. Dále $\mathcal{D}(K) = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, neboť pro pevné $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je posloupnost $\{\Lambda_n(\varphi)\}$ konvergentní, a tedy omezená. Prostor $(\mathcal{D}(K), \rho)$ je úplný (Věta 11(c)), podle důsledku Baireovy věty (Důsledek 15.11) tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že A_k má neprázdný vnitřek. Nechť $\psi \in \mathcal{D}(K)$ a $\delta > 0$ jsou taková, že $B(\psi, \delta) \subset A_k$.

Uvědomme si, že je-li $\varphi \in A_k$, pak $|\Lambda(\varphi)| \le k$. Nalezněme $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} < \frac{\delta}{2}$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $\varphi \ne 0$. Položme $\tilde\varphi = \frac{\delta}{4\|\varphi\|_N}\varphi$. Pak $\rho(\pm\tilde\varphi, 0) \le \sum_{j=0}^N \frac{1}{2^j}\|\tilde\varphi\|_j + \sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} 1 \le 2\|\tilde\varphi\|_N + \frac{\delta}{2} = \delta$, takže $\psi \pm \tilde\varphi \in B(\psi, \delta) \subset A_k$. Odtud plyne, že $|\Lambda(\tilde\varphi)| = \left|\Lambda\left(\frac{1}{2}(\tilde\varphi + \psi + \tilde\varphi - \psi)\right)\right| \le \frac{1}{2}\big(|\Lambda(\psi + \tilde\varphi)| + |\Lambda(\psi - \tilde\varphi)|\big) \le k$, a tedy $|\Lambda(\varphi)| = \frac{4}{\delta}\|\varphi\|_N |\Lambda(\tilde\varphi)| \le \frac{4k}{\delta}\|\varphi\|_N$.

□

5. Nosič distribuce

DEFINICE 29. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

VĚTA 30. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H$ je nulová pro $\Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.*

DŮKAZ. Množina G je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, pak díky kompaktnosti $\operatorname{supp}\varphi$ existují otevřené množiny $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$ nulové pro Λ takové, že $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{j=1}^n H_j$. Stačí tedy ukázat, že konečné sjednocení množin nulových pro Λ je opět nulová množina pro Λ. Díky principu matematické indukce to stačí ukázat pro dvě množiny H_1, H_2.

Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(H_1 \cup H_2)$. Položme $K = \operatorname{supp}\varphi \setminus H_2$. Pak K je kompaktní a $K \subset H_1$. Dle Důsledku 3 existují $U \subset H_1$ otevřená, $U \supset K$ a $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Funkce $(1-\psi)\varphi$ je nulová na U, a protože $\mathbb{R}^d \setminus U$ je uzavřená, je $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus K) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset H_2$. Tedy $\psi\varphi \in \mathcal{D}(H_1)$ a $(1-\psi)\varphi \in \mathcal{D}(H_2)$, odkud dostáváme, že $\Lambda(\varphi) = \Lambda\big((1-\psi)\varphi + \psi\varphi\big) = \Lambda\big((1-\psi)\varphi\big) + \Lambda(\psi\varphi) = 0 + 0 = 0$.

To, že G je největší nulová pro Λ, plyne přímo z definice G.

□

DEFINICE 31. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Nosič distribuce Λ definujeme jako $\operatorname{supp}\Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ.

POZNÁMKA 32. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Uvědomme si, že pokud $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda)$, pak $\Lambda(\varphi) = 0$, neboť $\Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda$ je nulová množina pro Λ. Odtud plyne, že jsou-li $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi = \psi$ na okolí $\operatorname{supp}\Lambda$, pak $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi)$. Vskutku, pak $\varphi - \psi = 0$ na otevřené množině $U \supset \operatorname{supp}\Lambda$, takže $\operatorname{supp}(\varphi - \psi) \subset \Omega \cap \overline{\mathbb{R}^d \setminus U} = \Omega \setminus U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}\Lambda$.

Na druhou stranu rovnost na $\operatorname{supp}\Lambda$ nestačí: Položme $\Lambda(\varphi) = \varphi'(0)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak $\operatorname{supp}\Lambda = \{0\}$ (např. Věta 34(d)). Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ taková, že $\varphi = 1$ na okolí 0, pak pro funkci $\psi(x) = x\varphi(x)$ platí, že $\psi(0) = 0$, ale $\Lambda(\psi) = 1 \ne 0$.

POZNÁMKA 33. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Pak $\operatorname{supp} D^\alpha \Lambda \subset \operatorname{supp} \Lambda$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Vskutku, nechť $G = \Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda$. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, pak též $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(G)$, takže $D^\alpha \Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi) = 0$. To znamená, že G je nulová pro $D^\alpha \Lambda$, a tedy $\operatorname{supp} D^\alpha \Lambda \subset \Omega \setminus G = \operatorname{supp} \Lambda$.

Připomeňme, že je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak její nosič je definován jako $\operatorname{supp} \mu = \Omega \setminus \bigcup\{G \subset \Omega$ otevřená; $|\mu|(G) = 0\}$.

VĚTA 34. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω.*

(a) Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\operatorname{supp} \Lambda_f = \operatorname{supp} f$.
(b) Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \operatorname{supp} \mu$.
(c) Pokud je $\operatorname{supp} \Lambda$ *kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.*
(d) $\operatorname{supp} \Lambda = \{z\}$ *pro $z \in \Omega$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ ne všechny nulové.*

DŮKAZ. (a) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_f. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$, pak $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$, tedy $\Omega \setminus \operatorname{supp} f \subset G$, neboli $\operatorname{supp} \Lambda_f \subset \operatorname{supp} f$. Na druhou stranu $\Lambda_f \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (vizte Poznámku 18) je $f = 0$ s. v. na G. Ze spojitosti pak plyne, že $f = 0$ na G, neboli $\operatorname{supp} f \subset \Omega \setminus G = \operatorname{supp} \Lambda_f$.

(b) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_μ a nechť $H = \bigcup\{U \subset \Omega$ otevřená; $|\mu|(U) = 0\}$. Je-li $U \subset \Omega$ otevřená taková, že $|\mu|(U) = 0$, a je-li $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, pak $|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| = 0$, a tedy $U \subset G$. Odtud plyne, že $H \subset G$. Na druhou stranu $\Lambda_\mu \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (vizte Poznámku 18) je $\mu \restriction_G = 0$, neboli $G \subset H$. Tedy $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \Omega \setminus G = \Omega \setminus H = \operatorname{supp} \mu$.

(c) Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp} \Lambda$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Dle Věty 15 existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \psi)$. Z Faktu 22 analogicky jako v důkazu Tvrzení 21(b) plyne existence $D \geq 0$ takového, že $\|\psi\varphi\|_N \leq D\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Pak $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \psi)$ a $\psi\varphi = \varphi$ na U. Podle Poznámky 32 je tedy $|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi\varphi)| \leq C\|\psi\varphi\|_N \leq CD\|\varphi\|_N$.

(d) $\Leftarrow$ Množina $\Omega \setminus \{z\}$ je zjevně nulová pro Λ_{δ_z}, takže $\operatorname{supp} \Lambda_{\delta_z} \subset \{z\}$. Podle Poznámky 33 je i $\operatorname{supp} D^\alpha \Lambda_{\delta_z} \subset \{z\}$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, takže $\operatorname{supp} \Lambda \subset \{z\}$. Pro opačnou inkluzi si stačí uvědomit, že $\operatorname{supp} \Lambda \neq \emptyset$, právě když $\Lambda \neq 0$. Nechť $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ je taková, že $c_\beta \neq 0$. Položme $h(x) = (x_1 - z_1)^{\beta_1} \cdots (x_d - z_d)^{\beta_d}$. Přímočarý výpočet dává, že $D^\alpha h(z) = 0$ pro $\alpha \neq \beta$ a $D^\beta h(z) = \beta! = \beta_1! \cdots \beta_d!$. Nechť $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je taková, že $\psi = 1$ na okolí z. Položme $\varphi = \psi h$. Pak $D^\alpha \varphi(z) = 0$ pro $\alpha \neq \beta$ a $D^\beta \varphi(z) = \beta!$, takže $\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\beta|} c_\beta \beta! \neq 0$.

$\Rightarrow$ Dle (c) existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ukážeme, že $\Lambda \in \operatorname{span}\{D^\alpha \Lambda_{\delta_z};\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N + 1\}$. Dle Lemmatu 6.78 stačí ověřit, že $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ splňující $D^\alpha \varphi(z) = 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N + 1$. Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je taková.

Z věty o Peanově tvaru zbytku pro Taylorův polynom více proměnných ([Z, 2.103]) snadno odvodíme, že

$$D^\alpha \varphi(x) = o(\|x - z\|^{N+1-|\alpha|}), \quad x \to z$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$. Odtud plyne, že existuje $0 < r \leq 1$ takové, že $U(z, r) \subset \Omega$ a $|D^\alpha \varphi(x)| \leq \|x - z\|^{N+1-|\alpha|}$ pro $x \in U(z, r)$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$. Dále dle Lemmatu 2 existuje $\psi \in \mathcal{D}(U(0, 1))$ taková, že $\psi = 1$ na $U(0, \frac{1}{2})$. Položme $\psi_\varepsilon(x) = \psi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)$ pro $\varepsilon > 0$. Všimněme si, že $\psi_\varepsilon \varphi \in \mathcal{D}(U(z, \varepsilon))$ a $\psi_\varepsilon \varphi = \varphi$ na $U(z, \frac{\varepsilon}{2})$, takže pro $\varepsilon \leq r$ je dle Poznámky 32

$$|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi_\varepsilon \varphi)| \leq C\|\psi_\varepsilon \varphi\|_N. \tag{1}$$

Označme

$$A = \max\Big\{ \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ \beta \leq \alpha}} c_\beta^\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N \Big\},$$

kde konstanty c^α_β pocházejí z Faktu 22. Zvolme nyní libovolné $0 < \varepsilon < r$. Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq N$ je $D^\alpha(\psi_\varepsilon\varphi)(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(z,\varepsilon)$, zatímco pro $x \in B(z,\varepsilon)$ dle Faktu 22 platí, že

$$|D^\alpha(\psi_\varepsilon\varphi)(x)| = \Big|\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c^\alpha_\beta D^\beta\psi_\varepsilon(x)D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\Big| = \Big|\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c^\alpha_\beta \frac{1}{\varepsilon^{|\beta|}} D^\beta\psi\big(\tfrac{x-z}{\varepsilon}\big)D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\Big| \leq$$

$$\leq \|\psi\|_N \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c^\alpha_\beta \frac{1}{\varepsilon^{|\beta|}}\|x-z\|^{N+1-|\alpha-\beta|} \leq \|\psi\|_N \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\alpha}} c^\alpha_\beta \varepsilon^{N+1-|\alpha|} \leq A\|\psi\|_N\varepsilon.$$

To znamená, že $\|\psi_\varepsilon\varphi\|_N \leq A\|\psi\|_N\varepsilon$. Vrátíme-li se zpět k odhadu (1), dostáváme, že $|\Lambda(\varphi)| \leq AC\|\psi\|_N\varepsilon$. Protože ε lze volit libovolně malé, plyne odtud, že $\Lambda(\varphi) = 0$, což bylo k dokázání.

□

TVRZENÍ 35. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Množina všech distribucí na Ω s kompaktním nosičem je hustá v $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$. Dokonce pro každou $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ existuje posloupnost $\{\Lambda_n\}_{n=1}^\infty$ distribucí na Ω s kompaktním nosičem taková, že $\Lambda_n \to \Lambda$ ve w^*-topologii.*

DŮKAZ. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $K_n = B(0,n) \cap \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$. Pak K_n jsou kompaktní podmnožiny Ω takové, že pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset K_n$ pro $n \geq n_0$. Dle Důsledku 3 existují funkce $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ takové, že $\psi_n = 1$ na okolí K_n. Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pak $\operatorname{supp}\psi_n\Lambda \subset \operatorname{supp}\psi_n$, takže $\psi_n\Lambda$ má kompaktní nosič. Vskutku, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}\psi_n$. Pak $\psi_n\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi_n\varphi) = \Lambda(0) = 0$. Tvrdíme, že $\psi_n\Lambda \to \Lambda$. Vskutku, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\operatorname{supp}\varphi \subset K_n$ pro $n \geq n_0$. Pak $\psi_n\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi_n\varphi) = \Lambda(\varphi)$ pro $n \geq n_0$ dle Poznámky 32.

□

6. Schwartzův prostor

V tomto a následujícím oddílu budeme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^d$ s eukleidovskou normou.

Je-li α multiindex délky d pak pro $t \in \mathbb{C}^d$ budeme používat zkratku $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}$. Připomeňme, že každý polynom $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $P(t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\leq k} c_\alpha t^\alpha$, $t \in \mathbb{R}^d$, kde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ jsou příslušné koeficienty. Toto vyjádření je jednoznačné až na nulové koeficienty. Každý polynom na $\mathbb{R}^d$ lze pomocí tohoto vyjádření jednoznačně rozšířit na polynom na $\mathbb{C}^d$ prostým dosazováním komplexních čísel. Daný polynom v d proměnných lze tedy chápat jako polynom na $\mathbb{R}^d$ i jako polynom na $\mathbb{C}^d$.

Tvrzení (e) a (f) ve Větě 5.22 ukazují, že Fourierova transformace převádí derivování na násobení a opačně. To může být výhodné například při řešení diferenciálních rovnic. Nicméně k praktickému využití by bylo třeba umět najít k transformované funkci $\widehat{f}$ zpětně její předlohu f. Potíž spočívá v tom, že obraz $L_1(\mathbb{R}^d)$ při Fourierově transformaci je obtížně identifikovatelný. Jednou z možností, jak se této potíži vyhnout, je najít vhodnější prostor, pro který jeho obraz najdeme snadněji. Dále by se nám hodilo při derivování pracovat s hladkými funkcemi. Prozkoumáme-li předpoklady tvrzení (e) a (f), potřebovali bychom, aby derivace všech řádů byly integrovatelné (tj. něco jako „menší než $\frac{1}{x}$ v nekonečnu“), a též aby byly integrovatelné funkce $x \mapsto x^\alpha f(x)$ pro libovolný multiindex α délky d (tj. aby funkce f byla „menší než převrácená hodnota libovolného polynomu“). Tyto požadavky vedou relativně přirozeně k definici Schwartzova prostoru níže.

Další motivací je pak Fourierova transformace distribucí. Vzhledem k tomu, jak se s distribucemi pracuje, přirozeně se nabízí definovat Fourierovu transformaci distribuce jako akci na Fourierovu transformaci testovací funkce. Ovšem Fourierova transformace testovací funkce už nemusí být testovací funkce! (Vizte Příklad 5.34.) Proto bychom rádi nalezli nějaký prostor příbuzný testovacím funkcím, který bude stabilní na Fourierovu transformaci. Nejprve si ale ještě dokažme lemma, které nám pomůže při porovnávání „polynomiální rychlosti růstu“.

LEMMA 36. *Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na $\mathbb{R}^d$. Pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.*

DŮKAZ. První tvrzení je vidět z rozpisu $(1+\|x\|^2)^N = \left(1+\sum_{j=1}^d x_j^2\right)^N$. Dále nechť $P(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k} c_\alpha x^\alpha$. Položme $C = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha|$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in \{1,\dots,d\}$ máme $|x_j| \le \|x\| \le 1+\|x\|^2$ (poslední nerovnost ověříme zvlášť pro $\|x\| \le 1$ a zvlášť pro $\|x\| > 1$). Tedy $|P(x)| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha||x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d} \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|\le k}|c_\alpha|(1 + \|x\|^2)^{|\alpha|} \le C(1 + \|x\|^2)^k$.

□

Vidíme tedy, že polynomiální rychlost růstu stačí testovat pouze pomocí speciálních polynomů $(1 + \|x\|^2)^N$, $N \in \mathbb{N}$.

DEFINICE 37. Schwartzův[2] prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C});\ PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\right\}.$$

Všimněme si, že díky Lemmatu 36 lze v definici Schwartzova prostoru testovat pouze polynomy tvaru $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$.

Ihned je vidět, že $\mathcal{S}_d$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ a je to také vektorový podprostor $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$. Naopak, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je podprostor $\mathcal{S}_d$. Dále je zjevné, že $f \in \mathcal{S}_d$, právě když f je hladká a pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a každé $N \in \mathbb{N}$ existuje $C_{\alpha,N} > 0$ takové, že $|D^\alpha f(x)| \le \frac{C_{\alpha,N}}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Jinými slovy, funkce f a všechny její parciální derivace „jdou v nekonečnu k nule“ rychleji než převrácená hodnota libovolného polynomu.

PŘÍKLAD 38. Nechť $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $f \in \mathcal{S}_d \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Zjevně $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále f je kladná na $\mathbb{R}^d$, a tedy $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Abychom ukázali, že $f \in \mathcal{S}_d$, uvědomme si nejprve, že je-li P libovolný polynom na $\mathbb{R}^d$ a $j \in \{1,\dots,d\}$, pak $\frac{\partial Pf}{\partial x_j}(x) = Q(x)f(x)$, kde $Q(x) = \frac{\partial P}{\partial x_j}(x) - 2x_j P(x)$ je opět polynom na $\mathbb{R}^d$. Odtud snadno indukcí plyne, že pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existuje polynom P na $\mathbb{R}^d$ takový, že $D^\alpha f = Pf$. Stačí tedy ukázat, že pro každý polynom R na $\mathbb{R}^d$ je funkce Rf omezená. Podle Lemmatu 36 existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|R(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $|R(x)f(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N e^{-\|x\|^2}$, takže si stačí rozmyslet, že funkce $g(t) = (1+t)^N e^{-t}$ je omezená na $[0,+\infty)$. To ovšem plyne z její spojitosti a toho, že $\lim_{x\to+\infty} g(t) = 0$.

◇

LEMMA 39. *Nechť $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mathbb{R}^d)$.*

DŮKAZ. Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice (vizte [Z, Příklad 2.137]) a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}\right)^p \mathrm{d}\lambda = \\
&\quad= \int_{(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)} \frac{1}{(1+r^2)^{pN}} r^{d-1}\sin^{d-2}\varphi_1 \sin^{d-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{d-2}\,\mathrm{d}\lambda = \\
&\quad= \int_0^{+\infty}\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}}\sin^{d-2}\varphi_1\sin^{d-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{d-2}\,\mathrm{d}\varphi_{d-1}\,\mathrm{d}\varphi_{d-2}\cdots\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r = \\
&\quad= C_d\int_0^{+\infty}\frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}}\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

kde konstanta $C_d > 0$ závisí jen na dimenzi d. Poslední integrál ovšem konverguje, neboť $2pN - d + 1 > 1$.

□

TVRZENÍ 40. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

[2] Laurent Schwartz

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1\le p<\infty} L_p(\mathbb{R}^d)$.
(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax+b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.
(c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* α *multiindex délky* d, *pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.
(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a jestliže* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li* $g \in \mathcal{S}_d$*), pak* $fg \in \mathcal{S}_d$.
(e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *polynom, pak* $Pf \in \mathcal{S}_d$.

DŮKAZ. (a) Vztahy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ již známe. Nechť $1 \le p < \infty$. Podle Lemmatu 39 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ leží v $L_p(\mathbb{R}^d)$. Je-li nyní $f \in \mathcal{S}_d$, pak existuje $C > 0$ takové, že $|f(x)|^p \le \frac{C^p}{(1+\|x\|^2)^{pN}}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, takže podle srovnávacího kritéria $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

(b) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $P(x)D^\alpha h(x) = P(x)a^{|\alpha|}D^\alpha f(ax+b) = Q(ax+b)D^\alpha f(ax+b)$, kde $Q(y) = a^{|\alpha|}P(\frac{1}{a}(y-b))$ je polynom na $\mathbb{R}^d$. Tedy $PD^\alpha h$ je omezená na $\mathbb{R}^d$.

(c) Je-li $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $PD^\beta(D^\alpha f) = PD^{\alpha+\beta} f$, což je omezená funkce, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 22 je $PD^\alpha(fg) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d,\beta\le\alpha} c_\beta PD^\beta f D^{\alpha-\beta} g$ pro nějaké konstanty c_β. Funkce vpravo je ovšem omezená, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(e) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a Q polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 22 je $QD^\alpha(Pf) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d,\beta\le\alpha} c_\beta QD^\beta P D^{\alpha-\beta} f$ pro nějaké konstanty c_β. Funkce vpravo je ovšem omezená díky tomu, že $QD^\beta P$ je polynom a $f \in \mathcal{S}_d$.

□

Na Schwartzově prostoru nyní zavedeme topologii. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha|\le N} \left\| x \mapsto (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty.$$

Snadno nahlédneme, že každá z funkcí ν_N je normou na $\mathcal{S}_d$. Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ. Tato topologie je metrizovatelná metrikou z Lemmatu 6.61. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ je posloupnost $\{\nu_N(f)\}_{N=0}^\infty$ neklesající. Odtud plyne, že bázi $\sigma(0)$ tvoří množiny $U_{\nu_N,\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$.

VĚTA 41. *Metrika z Lemmatu 6.61 příslušná systému* $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ *je úplná. Prostor* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ *je tedy Fréchetův prostor. Topologie* σ *má následující vlastnosti:*
(a) Nechť $\{f_n\}$ *je posloupnost v* $\mathcal{S}_d$ *a* $f \in \mathcal{S}_d$. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
  (i) $f_n \to f$ *v topologii* σ.
  (ii) Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ *a každý multiindex* α *délky* d *platí, že* $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.
  (iii) Pro každý polynom P *a každý multiindex* α *délky* d *platí, že* $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.
(b) Jestliže $f_n \to f$ *v prostoru* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, *pak* $f_n \to f$ *v* $L_p(\mathbb{R}^d)$ *pro každé* $1 \le p < \infty$.
(c) Je-li α *multiindex délky* d, P *polynom na* $\mathbb{R}^d$ *a* $g \in \mathcal{S}_d$, *pak zobrazení* $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ *a* $f \mapsto gf$ *jsou spojitá lineární zobrazení z* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ *do* $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

DŮKAZ. (a) (i)⇔(ii) plyne z Věty 6.58(c) a z toho, že je-li $N \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak $\left\|(1+\|x\|^2)^N D^\alpha g\right\|_\infty \le \nu_M(g)$ pro $M = \max\{N, |\alpha|\}$.

(iii)⇒(ii) je triviální a (ii)⇒(iii) plyne z Lemmatu 36.

Označme nyní metriku z Lemmatu 6.61 jako ρ a dokažme její úplnost. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Z nerovnosti $\nu_N(f-g) \le 2^N \rho(f,g)$ platné pro $f, g \in \mathcal{S}_d$, $\rho(f,g) < \frac{1}{2^N}$ plyne, že $\{f_n\}$ je cauchyovská v každé z norem ν_N, $N \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každé $N \in N_0$ a každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\left\{(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n\right\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $g_{N,\alpha} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ taková, že $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Speciálně, pro $f = g_{0,0}$ platí, že $f_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty z analýzy (vizte Větu **??**) pak $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Je-li nyní $N \in N_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$ bodově na $\mathbb{R}^d$. Zároveň ale $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$, odkud plyne, že $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f = g_{N,\alpha}$ a $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f$

stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože $g_{N,\alpha} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, dostáváme (též díky Větě 15.1), že $f \in \mathcal{S}_d$. Podle (a) to pak znamená, že $f_n \to f$ v metrice ρ.

(b) Nechť $f_n \to f$ v topologii σ a $1 \le p < \infty$. Podle Lemmatu 39 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{Np}} \,\mathrm{d}\lambda < +\infty$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $|(f_n - f)(x)| \le \frac{\nu_N(f_n - f)}{(1+\|x\|^2)^N}$, a tedy $\|f_n - f\|_p \le C^{1/p}\nu_N(f_n - f) \to 0$.

(c) Linearita zobrazení je zřejmá. Díky Větě 6.33 stačí ukázat, že $D^\alpha f_n \to 0$, $Pf_n \to 0$ a $gf_n \to 0$, jestliže $f_n \to 0$ v topologii σ. To ukážeme pomocí (a) (iii). Nechť Q je polynom a $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Pak $QD^\beta(D^\alpha f_n) = QD^{\alpha+\beta} f_n \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Dále, podle Faktu 22 je $QD^\beta(Pf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} Q_\gamma D^\delta f_n$, kde Q_γ jsou polynomy. Každá z funkcí v této sumě ovšem konverguje k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Konečně, podle Faktu 22 je $QD^\beta(gf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta} QD^\gamma g D^\delta f_n$, kde $c_{\gamma,\delta}$ jsou konstanty. Protože funkce $D^\gamma g$ jsou omezené, konverguje opět každá z funkcí v sumě k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

□

PŘÍKLAD 42. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ není normovatelný. Vskutku, v opačném případě dle Věty 6.64 existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $U_{\nu_N,\varepsilon}$ je omezené. Existuje tedy $t > 0$, pro které je $U_{\nu_N,\varepsilon} \subset tU_{\nu_{2N+1},1}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ nyní vezměme funkce

$$f_n(x) = \varphi(x)\frac{\sin(nx_1)}{n^{2N}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

kde $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je taková, že $\varphi = 1$ na nějakém okolí 0. Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le N$, pak podle Faktu 22 existují konstanty $c_k \in \mathbb{N}$ takové, že pro $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$D^\alpha f_n(x) = \frac{1}{n^{2N}} \sum_{k=0}^{\alpha_1} c_k D^{\alpha - ke_1}\varphi(x) n^k \sin^{(k)}(nx_1).$$

Tedy $|D^\alpha f_n(x)| \le \frac{1}{n^N} \sum_{k=0}^{\alpha_1} c_k |D^{\alpha-ke_1}\varphi(x)|$. Díky kompaktnosti nosiče φ odtud plyne, že $\lim_n \nu_N(f_n) = 0$, takže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n \in U_{\nu_N,\varepsilon}$ pro $n \ge n_0$. Na druhou stranu, díky tomu, že $f_n(x) = \frac{\sin(nx_1)}{n^{2N}}$ na nějakém okolí 0, dostáváme odhad

$$\nu_{2N+1}(f_n) \ge \left|\frac{\partial^{2N+1} f_n}{\partial x_1^{2N+1}}(0)\right| = n^{2N+1}\frac{\cos 0}{n^{2N}} = n.$$

Tedy pokud $f_n \in tU_{\nu_{2N+1},1}$, pak $n < t$, což je spor.

◇

Funkce z $\mathcal{S}_d$ jsou integrovatelné (Tvrzení 40(a)), takže mají Fourierovu transformaci. Díky vlastnostem Schwartzova prostoru jsou pro funkce z $\mathcal{S}_d$ automaticky splněny předpoklady pro derivování Fourierovy transformace, takže na $\mathcal{S}_d$ je kalkulus Fourierovy transformace snadno zformulovatelný:

TVRZENÍ 43. *Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

DŮKAZ. (a) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.22(e), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 40(c) a (a).

(b) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.22(f), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ dle Tvrzení 40(e) a (a).

□

Následující věta hovoří o tom, že Schwartzův prostor se chová výborně vzhledem k inverzní Fourierově transformaci.

VĚTA 44. *Fourierova transformace je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ na sebe. Navíc pro $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad a \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f.$$

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 43(b) platí, že $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{h}$ pro nějakou funkci $h \in \mathcal{S}_d$ (Tvrzení 40(e)). Protože $\widehat{h}$ je spojitá dle Věty 5.22(a), plyne odtud s pomocí Věty 15.1, že $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále, je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, pak použijeme-li Tvrzení 43(b) a (a), dostaneme $t^\beta D^\alpha \widehat{f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}}(it)^\beta \widehat{m_\alpha f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta(m_\alpha f)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ (uvědomme si, že $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d$ dle Tvrzení 40(e)). Funkce napravo je ovšem omezená (Věta 5.22(a)). Odtud snadno plyne, že $PD^\alpha \widehat{f}$ je omezená pro libovolný polynom P a libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, což znamená, že $\widehat{f} \in \mathcal{S}_d$. Tedy Fourierova transformace zobrazuje $\mathcal{S}_d$ do $\mathcal{S}_d$.

Již víme, že Fourierova transformace je prosté lineární zobrazení (Důsledek 5.29). Pro důkaz spojitosti stačí dle Věty 6.33 ukázat, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ kdykoli $f_n \to 0$ v σ. Nechť tedy $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ jdoucí k 0 v topologii σ. Nechť dále $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$. Stejně jako výše obdržíme, že $t^\beta D^\alpha \widehat{f_n}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta(m_\alpha f_n)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Dvojnásobnou aplikací Věty 41(c) dostaneme, že $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v σ. Podle Věty 41(b) tedy $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$. Díky Větě 5.22(a) tak platí, že $\widehat{D^\beta(m_\alpha f_n)} \to 0$ v prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$, tj. stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože to platí pro každý multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, plyne odtud, že $PD^\alpha \widehat{f_n} \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$. Věta 41(a) konečně říká, že to znamená, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ.

Pro lepší přehlednost označme $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ a dále $\mathcal{F}^n = \overbrace{\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \cdots \circ \mathcal{F}}^{n \text{ krát}}$. Z věty o inverzi (Věta 5.28) dostáváme, že $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ a každé $x \in \mathbb{R}^d$. Aplikujeme-li předchozí vztah na $\mathcal{F}^2 f$ místo na f, dostaneme, že $\mathcal{F}^4 f(x) = \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^2 f)(x) = \mathcal{F}^2 f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je na a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

□

7. Temperované distribuce

Následující tvrzení nám osvětlí vztah prostorů $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)$ a $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, což nám umožní vybudovat teorii Fourierovy transformace i pro distribuce.

LEMMA 45. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*

DŮKAZ. Funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ je na K omezená, což znamená, že normy ν_N a $\|\cdot\|_N$ jsou na $\mathcal{D}(K)$ ekvivalentní. Odtud lze snadno odvodit, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

□

TVRZENÍ 46. *Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojité a na hustou podmnožinu.*

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Vezměme nějakou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\varphi = 1$ na $B(0,1)$ (vizte např. Lemma 2), a položme $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{1}{n}x)$ a $f_n = \varphi_n f$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tvrdíme, že $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$. Vskutku, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 22 je

$$PD^\alpha(f - f_n) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ \beta \leq \alpha}} c_\beta PD^\beta f D^{\alpha-\beta}(1 - \varphi_n)$$

pro nějaké konstanty c_β. Protože $D^\gamma \varphi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} D^\gamma \varphi(\frac{1}{n}x)$, je pro pevné γ posloupnost funkcí $\{D^\gamma(1 - \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ stejně omezená na $\mathbb{R}^d$. Dále je $D^\gamma(1 - \varphi_n)(x) = 0$ pro $x \in B(0,n)$. Dle Tvrzení 40(c), (e) a (a) je $PD^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, odkud plyne, že posloupnost $\{PD^\beta f D^{\alpha-\beta}(1 - \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně k 0 na $\mathbb{R}^d$. Tedy $f_n \to f$ v $\mathcal{S}_d$ (Věta 41(a)).

Je-li $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak dle Lemmatu 45 je $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$, takže $Id\colon (\mathcal{D}(K), \tau_K) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojitá. Dle Tvrzení 13 je tedy $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ spojitá.

□

Připomeňme, že prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je metrizovatelný úplnou metrikou, řekněme ρ_σ. Pak z Tvrzení 46 plyne, že prostor $(\mathcal{S}_d, \rho_\sigma)$ je zúplněním prostoru $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho_\sigma)$. Dále z Tvrzení 46 plyne, že je-li $\Phi \in (\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, pak $\Phi \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)^*$, neboli restrikce Φ na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$.

DEFINICE 47. Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionálů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají temperované distribuce.

Protože díky hustotě $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ jsou spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ určeny jednoznačně svými restrikcemi na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, je obvyklé ztotožňovat temperované distribuce s funkcionály z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$. Zkráceně budeme též psát $(\mathcal{S}_d, \sigma)^* = \mathcal{S}_d^*$.

Následující věta charakterizuje ty distribuce z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$, které jsou temperované. Srovnejte též s Větou 15.

VĚTA 48. *Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Λ je temperovaná.
(ii) Λ je spojitá i v (slabší) topologii σ.
(iii) Existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\nu_N(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) plyne z definice temperované distribuce.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Jelikož množiny $U_{\nu_N,\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ tvoří bázi $\sigma(0)$, existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| < 1$ pro každou $\varphi \in U_{\nu_N,\varepsilon} \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak ale $|\Lambda(\varphi)| \leq \frac{2}{\varepsilon}\nu_N(\varphi)$ pro kadou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) můžeme Λ rozšířit z podprostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ na celý prostor $\mathcal{S}_d$ tak, že toto rozšíření $\tilde{\Lambda}$ splňuje $|\tilde{\Lambda}(f)| \leq C\nu_N(f)$ pro $f \in \mathcal{S}_d$. Pak $|\tilde{\Lambda}| \leq C$ na $U_{\nu_N,1}$, a tedy $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{S}_d^*$ dle Věty 6.33.

□

PŘÍKLADY 49. Uveďme následující příklady temperovaných distribucí:

- Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ je distribuce s kompaktním nosičem. Dle Věty 34(c) existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ tak, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N \leq C\nu(\varphi)_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tedy Λ je temperovaná dle Věty 48.

  Chceme-li vypočítat hodnotu $\Lambda(f)$ pro $f \in \mathcal{S}_d$ (ve smyslu jednoznačného rozšíření), zvolme libovolnou $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\psi = 1$ na otevřené množině obsahující supp Λ. Označíme-li $L = \operatorname{supp}\psi$, pak $Q\colon (\mathcal{S}_d, \sigma) \to (\mathcal{D}(L), \tau_L)$, $Q(f) = \psi f$ je spojité lineární zobrazení (Věta 41(c) a Lemma 45). Položíme-li $\Phi(f) = \Lambda(\psi f) = \Lambda(Q(f))$ pro $f \in \mathcal{S}_d$, pak $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak platí, že $\Phi(\varphi) = \Lambda(\psi\varphi) = \Lambda(\varphi)$ (Poznámka 32), a tedy Φ je hledaným rozšířením distribuce Λ.
- Nechť μ je nezáporná borelovská míra na $\mathbb{R}^d$ taková, že $\int (1 + \|x\|^2)^{-N} \,\mathrm{d}\mu = C < +\infty$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$. Pak Λ_μ je temperovaná distribuce a vzorec $\Lambda_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$ platí pro všechny $f \in \mathcal{S}_d$. Vskutku,
$$|\Lambda_\mu(f)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\| y \mapsto (1 + \|y\|^2)^N f(y) \right\|_\infty (1 + \|x\|^2)^{-N} \,\mathrm{d}\mu(x) \leq C\nu_N(f).$$
- Nechť g je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ taková, že $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-N} g(x) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a $1 \leq p \leq \infty$. (Toto speciálně platí pro funkce z $L_p(\mathbb{R}^d)$ nebo pro funkce majorizované nějakým polynomem.) Pak Λ_g je temperovaná distribuce a vzorec $\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} fg \,\mathrm{d}\lambda$ platí pro všechny $f \in \mathcal{S}_d$. Vskutku, nechť q je sdružený exponent k p. Označme $s(x) = 1 + \|x\|^2$. Dle Lemmatu 39 existuje $M \in \mathbb{N}_0$ takové, že $s^{N-M} \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Pak díky Hölderově nerovnosti je
$$\begin{aligned}|\Lambda_g(f)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |fg| \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} |s^M f| \cdot |s^{-N} g| \cdot |s^{N-M}| \,\mathrm{d}\lambda \leq \\ &\leq \|s^M f\|_\infty \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \leq \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \nu_M(f).\end{aligned}$$

TVRZENÍ 50. *Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha\Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce*

- *$D^\alpha\Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha f)$,*
- *$(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ a*
- *$(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$*

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. *Dále zobrazení* $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ *a* $\Lambda \mapsto P\Lambda$ *jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru* $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ *do sebe.*

DŮKAZ. Všechna uvedená tvrzení snadno plynou z Věty 41(c), výše uvedených vzorců a vlastností w^*-topologie.

$\square$

Poznamenejme že dle Důsledku 6.101(b) není $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ metrizovatelný, neboť $\mathcal{S}_d$ je zjevně nekonečněrozměrný.

Pro temperované distribuce nyní můžeme zavést jejich Fourierovu transformaci, jak bylo avizováno v úvodu předchozího oddílu.

DEFINICE 51. Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Z Věty 44 plyne, že Fourierova transformace temperované distribuce je opět temperovaná distribuce. První část následující věty říká, že definice Fourierovy transformace je konzistentní ve smyslu ztotožňování funkce f a příslušné distribuce Λ_f.

VĚTA 52.

(a) Je-li $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, *pak* $\Lambda_{\widehat{g}}$ *je temperovaná distribuce a* $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. *Je-li* $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, *pak* $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, *kde* F *je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty (Věta 5.32).*

(b) Je-li Λ *temperovaná distribuce na* $\mathbb{R}^d$ *a* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, *pak*

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, *kde* $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, *a*
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ *temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru* $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ *na sebe. Platí pro ni, že* $\mathcal{F}^4 = Id$.

DŮKAZ. (a) Nechť $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Pak $\widehat{g} \in C_0(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.22(a)), a tedy $\Lambda_{\widehat{g}}$ je distribuce. (Mohli bychom použít faktu, že $\widehat{g} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, takže $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná, ale obejdeme se bez toho – temperovanost vyplyne z rovnosti níže.) Pro $f \in \mathcal{S}_d$ pak díky Větě 5.22(h) platí, že

$$\widehat{\Lambda_g}(f) = \Lambda_g(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g} \,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{\widehat{g}}(f).$$

Je-li $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, pak lze postupovat analogicky, jako výše, pouze je třeba ověřit, že $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f F(g) \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$: Označme $L_2 = L_2(\mathbb{R}^d)$ a $L_1 = L_1(\mathbb{R}^d)$. Protože $L_2 \cap L_1$ je hustá v L_2 (vizte důkaz Věty 5.32), existuje posloupnost $\{g_n\} \subset L_2 \cap L_1$ taková, že $g_n \to g$ v L_2. Podle Věty 5.32 je tedy $\widehat{g_n} = F(g_n) \to F(g)$ v L_2. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Protože $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} hf \,\mathrm{d}\lambda$ a $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h\widehat{f} \,\mathrm{d}\lambda$ jsou spojité lineární funkcionály na L_2 (Věta 2.15, Tvrzení 40(a), Věta 44), platí s využitím Věty 5.22(h), že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g_n} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f F(g) \,\mathrm{d}\lambda.$$

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, pak díky Tvrzení 50, Tvrzení 43(b) a linearitě $\widehat{\Lambda}$ platí, že

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha \Lambda}(f) = D^\alpha \Lambda(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\widehat{m_\alpha f}) = \\ = (-1)^{|\alpha|} \widehat{\Lambda}(m_\alpha f) = \widehat{\Lambda}(s_\alpha f) = (s_\alpha \widehat{\Lambda})(f). \end{aligned}$$

Podobně, díky Tvrzení 50, Tvrzení 43(a) a linearitě Λ platí, že

$$\begin{aligned} (D^\alpha \widehat{\Lambda})(f) = (-1)^{|\alpha|} \widehat{\Lambda}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(s_\alpha \widehat{f}) = \\ = \Lambda(m_\alpha \widehat{f}) = (m_\alpha \Lambda)(\widehat{f}) = \widehat{m_\alpha \Lambda}(f). \end{aligned}$$

(c) Snadno je vidět, že $\mathcal{F}$ je lineární. Nechť $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{S}_d^*$ je usměrněný soubor, který w^*-konverguje k $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ pak $\mathcal{F}(\Phi_\gamma)(f) = \Phi_\gamma(\widehat{f}) \to \Phi(\widehat{f}) = \mathcal{F}(\Phi)(f)$. Tedy $\mathcal{F}$ je spojité. Dále pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ je dle Věty 44

$$\mathcal{F}^4(\Phi)(f) = \mathcal{F}^3(\Phi)(\widehat{f}) = \cdots = \Phi(\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}) = \Phi(f),$$

neboli $\mathcal{F}^4 = Id$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id = \mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F}$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je bijekce a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

$\square$

Kapitola 8

Bochnerův integrál

V této kapitole vybudujeme analogii teorie Lebesgueova integrálu pro integraci vektorových zobrazení, tzv. Bochnerův integrál. Stejně jako ve skalární teorii hrají důležitou roli měřitelná zobrazení, přičemž jejich charakterizace daná Větou 17 umožňuje v řadě případů ověřit silnou měřitelnost potřebnou k bochnerovské integraci. Poznamenejme ještě, že podstatnou roli bude v naší teorii hrát úplnost uvažované míry.

1. Měřitelná zobrazení

Připomeňme, že jsou-li $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ měřitelné prostory, pak $f: X \to Y$ se nazývá měřitelné, pokud $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ pro každou $T \in \mathcal{T}$. Je-li X topologický prostor, pak pokud není řečeno jinak, uvažujeme na X borelovskou σ-algebru.

Následující tvrzení je zobecněním základní věty z teorie míry pro měřitelné (komplexní či numerické) funkce.

TVRZENÍ 1. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost měřitelných zobrazení, která bodově konverguje k $f: \Omega \to X$. Vezměme libovolnou uzavřenou $F \subset X$. Položme $G_k = \{x \in X;\ \operatorname{dist}(x, F) < \frac{1}{k}\}$. Pak G_k jsou otevřené množiny takové, že $F \subset G_k$ a $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k}$. Tvrdíme, že

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k),$$

odkud plyne měřitelnost f, neboť množina vpravo je zjevně měřitelná. Vskutku, nechť $t \in f^{-1}(F)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je G_k okolí $f(t)$, takže existuje $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. Tedy $t \in \bigcap_{n=n_k}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$. To znamená, že $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Na druhou stranu, je-li $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje n_k takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. To znamená, že $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \overline{G_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, neboli $f(t) \in F$.

□

Víme, že v teorii integrace skalárních funkcí hrají důležitou roli jednoduché funkce. Tento koncept bude zásadní i pro teorii vektorového integrálu.

DEFINICE 2. Nechť Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f: \Omega \to X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Snadno je vidět, že jsou-li Ω, X měřitelné prostory a $f: \Omega \to X$ jednoduché zobrazení takové, že $f^{-1}(x)$ je měřitelná množina pro každé $x \in f(\Omega)$, pak f je měřitelné.

VĚTA 3. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f: \Omega \to X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ plyne ihned z Tvrzení 1.

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v (X,ρ). Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Definujme množiny $A^n_{(k,j)} \subset X$, kde $(k,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ s lexikografickým uspořádáním, následovně:

$$A^n_{(k,j)} = U(x_j, \tfrac{1}{n+1-k}) \setminus \bigcup_{(r,s)<(k,j)} U(x_s, \tfrac{1}{n+1-r}).$$

Tyto množiny jsou zjevně borelovské a po dvou disjunktní. Pro $t \in \Omega$ definujme $f_n(t) = x_j$, je-li $f(t) \in A^n_{(k,j)}$ pro nějaké $(k,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $f_n(t) = x_1$ jinak. Pak f_n je jednoduché měřitelné zobrazení.

Je-li nyní $t \in \Omega$ a $m \in \mathbb{N}$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f(t), x_j) < \frac{1}{m}$, tj. $f(t) \in U(x_j, \frac{1}{m})$. Položme $n_0 = \max\{m, j\}$. Nechť $n \geq n_0$. Pak existuje $(r,s) \in \{1,\dots,n\}^2$ minimální takové, že $f(t) \in U(x_s, \frac{1}{n+1-r})$ a navíc platí, že $(r,s) \leq (n+1-m, j)$. To znamená, že $f(t) \in A^n_{(r,s)}$ a $r \leq n+1-m$. Odtud plyne, že $f_n(t) = x_s$, a tedy $\rho(f_n(t), f(t)) = \rho(x_s, f(t)) < \frac{1}{n+1-r} \leq \frac{1}{m}$. Tím jsme dokázali, že $f_n(t) \to f(t)$.

□

Pro měřitelná zobrazení do neseparabilních prostorů může dojít k nepříjemnému jevu – součet měřitelných zobrazení nemusí být měřitelné zobrazení.

PŘÍKLAD 4. Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že card $X > \mathfrak{c}$ (např. $\ell_2(2^{\mathfrak{c}})$). Definujme zobrazení $f, g \colon X \times X \to X$ předpisy $f(x,y) = x$, $g(x,y) = -y$. Vezměme dále na X borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}$ a na $X \times X$ součinovou σ-algebru $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Pak snadno nahlédneme, že f i g jsou měřitelná zobrazení, ale $h = f + g$ není měřitelné, neboť $h^{-1}(0) = \{(x,x);\ x \in X\}$, což dle Lemmatu 15.72 není měřitelná množina.

◇

Abychom se vyhnuli výše uvedenému jevu, mohli bychom se omezit pouze na zobrazení se separabilním oborem hodnot. Nicméně pro vybudování teorie integrálu se z formálních důvodů zdá výhodné umět integrovat také zobrazení, která se na množině nulové míry mohou chovat jakkoliv. Protože je potřeba, aby integrované zobrazení bylo zároveň měřitelné v klasickém smyslu (abychom dostali měřitelnost funkce $t \mapsto \|f(t)\|$), je nezbytné v celé teorii pracovat s úplnými mírami.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $Æ(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v M.

DEFINICE 5 (Salomon Bochner (1933)). Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $Æ(\Omega, X)$ nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ, pokud je μ-s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.

LEMMA 6. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.*

Poznamenejme, že úplnost μ je zde naprosto zásadní.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Existují jednoduchá měřitelná zobrazení $f_n \colon \Omega \to X$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f_n \to f$ na $\Omega \setminus E$. Dle Tvrzení 1 je $f \restriction_{\Omega \setminus E}$ měřitelné. Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)}$, přičemž množina vpravo je zjevně separabilní (je to uzávěr spočetné množiny).

$\Leftarrow$ Dle Věty 3 je $f \restriction_{\Omega \setminus E}$ bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení definovaných na $\Omega \setminus E$. Nyní stačí tato jednoduchá zobrazení dodefinovat konstantní hodnotou na E.

□

Speciálně, pro zobrazení do separabilních metrických prostorů pojmy měřitelnosti a silné měřitelnosti splývají. Tedy například spojité zobrazení ze separabilního metrického prostoru s mírou, která je zúplněním borelovské míry, do metrického prostoru je silně měřitelné.

PŘÍKLAD 7. Nechť Γ je nespočetná množina a μ je aritmetická míra na Γ. Definujme $f : \Gamma \to c_0(\Gamma)$ předpisem $f(\gamma) = e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$. Pak f je měřitelné, neboť každá podmnožina Γ je μ-měřitelná, ale dle Lemmatu 6 není f silně měřitelné, neboť $f(\Gamma)$ je neseparabilní a míru 0 má pouze prázdná množina.

Poznamenejme, že existence podobného příkladu pro σ-konečnou míru již úzce souvisí s axiomy teorie množin (vizte též Tvrzení 14.10).

$\diamond$

DŮSLEDEK 8. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $\{f_n\} \subset \text{Æ}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné.*

DŮKAZ. Dle předpokladu existuje $H \subset \Omega$ taková, že $\mu(\Omega \setminus H) = 0$ a $f_n \to f$ bodově na H. Dle Lemmatu 6 jsou $f_n \restriction_H$ měřitelná, a tedy i $f \restriction_H$ je měřitelné (Tvrzení 1). Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále dle Lemmatu 6 existují $E_n \subset \Omega$ takové, že $\mu(E_n) = 0$ a $\overline{f_n(\Omega \setminus E_n)}$ je separabilní. Položme $E = (\Omega \setminus H) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak $\mu(E) = 0$. Protože $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus E_n)}$, je $f(\Omega \setminus E)$ separabilní. Dle Lemmatu 6 je tedy f silně měřitelné.

$\square$

LEMMA 9. *Nechť Ω a X jsou měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \colon \Omega \to X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.*

DŮKAZ. Zobrazení $f + g$ je jednoduché, neboť $(f + g)(\Omega) \subset f(\Omega) + g(\Omega)$, kde vpravo je konečná množina. Dále, je-li $x \in (f + g)(\Omega)$, pak

$$(f + g)^{-1}(x) = \bigcup_{\substack{u \in f(\Omega) \\ v \in g(\Omega) \\ u + v = x}} f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v),$$

což je měřitelná množina, neboť sjednocení vpravo je konečné. Tedy $f + g$ je měřitelné.

Je-li $\alpha = 0$, pak je tvrzení o αf triviální. Pro $\alpha \neq 0$ je $(\alpha f)(\Omega) = \alpha(f(\Omega))$ a $(\alpha f)^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{1}{\alpha} x)$, odkud tvrzení ihned plyne.

$\square$

Z definice silné měřitelnosti a Lemmatu 9 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 10. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in \text{Æ}(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.*

Pro praktické ověření silné měřitelnosti není ovšem definice příliš vhodná a i použití Lemmatu 6 přináší nemalé obtíže. Dále si proto ukážeme praktičtější charakterizaci silně měřitelných zobrazení.

DEFINICE 11 (Izrail Moisejevič Gelfand[1] (1938), Billy James Pettis (1938)). Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$ nazveme slabě měřitelným, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Zjevně každé měřitelné zobrazení do normovaného lineárního prostoru je slabě měřitelné.

PŘÍKLAD 12. Nechť $\Omega = [0, 1]$ s Lebesgueovou mírou a $X = \ell_2([0, 1])$. Definujme zobrazení $f \colon [0, 1] \to X$ předpisem $f(t) = e_t$ (připomeňme, že $e_t = \chi_{\{t\}}$). Pak f je slabě měřitelné, ale není měřitelné (a tedy ani silně měřitelné).

Nechť $\phi \in \ell_2([0, 1])^*$ je dáno. Dle Věty 2.15(c) existuje $y \in \ell_2([0, 1])$ takové, že

$$\phi(x) = \sum_{s \in [0,1]} x(s) y(s) \quad \text{pro } x \in \ell_2([0, 1]).$$

Odtud vidíme, že $\phi \circ f(t) = \phi(e_t) = y(t)$ pro každé $t \in [0, 1]$. Jelikož $\sum_{t \in [0,1]} |y(t)|^2 < +\infty$, je množina $\{t \in [0, 1];\ y(t) \neq 0\}$ spočetná (vizte též Větu 1.33(d)). Tedy funkce $\phi \circ f$ je s. v. rovna 0, takže je měřitelná.

Na druhou stranu, je-li $E \subset [0, 1]$ Lebesgueovy míry 0, pak existuje neměřitelná $A \subset [0, 1] \setminus E$ ([R, Věta 2.22]). Položíme-li nyní $G = \bigcup_{t \in A} U(e_t, 1) \subset X$, pak G je otevřená množina a $f^{-1}(G) = A$. Tedy f není měřitelné.

$\diamond$

[1] Израиль Моисеевич Гельфанд

DEFINICE 13. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f\in A}|f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Samotná množina B_{X^*} je 1-normující díky duálnímu vyjádření normy (Důsledek 2.6). Dokonce jen S_{X^*} je 1-normující (Důsledek 2.5).

LEMMA 14. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^*-hustá v B_{X^*}, pak A je 1-normující.*

DŮKAZ. Nechť $x \in X$ a nechť $f \in B_{X^*}$ je takové, že $f(x) = \|x\|$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $g \in A$ takové, že $g \in f + U_{x,\varepsilon}$, tj. $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pak ovšem $g(x) = f(x) + g(x) - f(x) > \|x\| - \varepsilon$.

□

LEMMA 15. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x,r) = \bigcap_{f\in A}\{y \in X;\ |f(y) - f(x)| \le r\}$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in A_\circ$, pak $|f(x)| \le 1$ pro každé $f \in A$, takže $\|x\| = \sup_{f\in A}|f(x)| \le 1$, neboli $x \in B_X$. Na druhou stranu $B_X = (B_{X^*})_\circ \subset A_\circ$.

Obecnější tvrzení plyne z následujícího výpočtu (využívajícího Tvrzení 6.109(d)):

$$B(x,r) = x + rB_X = x + rA_\circ = x + \left(\tfrac{1}{r}A\right)_\circ = x + \bigcap_{g\in\frac{1}{r}A}\{z \in X;\ |g(z)| \le 1\} =$$
$$= x + \bigcap_{f\in A}\{z \in X;\ |\tfrac{1}{r}f(z)| \le 1\} = \bigcap_{f\in A}\{x + z;\ z \in X, |f(z)| \le r\} =$$
$$= \bigcap_{f\in A}\{y \in X;\ |f(y - x)| \le r\}.$$

□

Nechť A je podmnožina vektorového prostoru na $\mathbb{K}$. Označme jako $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ množinu všech lineárních kombinací prvků A s racionálními koeficienty (v případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ míněno s racionální reálnou i imaginární částí).

LEMMA 16. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\operatorname{span} A$ a $B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \operatorname{span} A$. Odtud plyne, že je-li $M \subset X$ separabilní, pak $\overline{\operatorname{span}}\, M$ je též separabilní.*

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{span} A$. Pak $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$, kde $x_1, \dots, x_n \in A$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nějaké skaláry. Nechť dále $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$. Pak existují $\beta_j \in \mathbb{Q}$ (resp. $\beta_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) tak, že $|\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{M}$, a tedy $\left\|x - \sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j)x_j\right\| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j|\|x_j\| < \varepsilon$.

Je-li nyní $x \in B_X \cap \operatorname{span} A$, pak dle předchozího existuje $\{x_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ taková, že $x_n \to x$ a $\|x_n\| \le 1 + \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{n}{n+1}x_n \in B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ a $x_n \to x$.

Je-li $M \subset X$ separabilní, pak existuje $A \subset M$ spočetná, hustá v M. Pak $M \subset \overline{A} \subset \overline{\operatorname{span} A}$, a tedy i $\overline{\operatorname{span}}\, M \subset \overline{\operatorname{span} A} \subset \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A}$, kde $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je spočetná.

□

Nyní již můžeme snadno dokázat větu charakterizující silnou měřitelnost. Implikaci (iii)⇒(i) se říká Pettisova věta[2].

VĚTA 17. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je silně měřitelné.
(ii) f je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
(iii) f je slabě měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
(iv) Existují $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ separabilní podprostor a $A \subset B_{Y^*}$ spočetná tak, že $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \operatorname{span} A$ je w^*-hustá v B_{Y^*} a $\phi \circ f$ je měřitelná pro každé $\phi \in A$.

[2]B. J. Pettis (1938), v podstatě totéž tvrdil i I. M. Gelfand (1938).

DŮKAZ. (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Lemmatu 6. (ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Položme $Y = \operatorname{span} f(\Omega \setminus E)$. Pak Y je separabilní dle Lemmatu 16. Dále dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.119(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt. Tedy je to separabilní prostor a existuje spočetná $A \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}. Je-li $\phi \in A$ a $\widetilde{\phi} \in X^*$ jeho rozšíření z Hahnovy-Banachovy věty, pak $\phi \circ f\restriction_{\Omega\setminus E} = \widetilde{\phi} \circ f\restriction_{\Omega\setminus E}$ je měřitelná dle předpokladu.

(iv)$\Rightarrow$(ii) Ukažme, že $g = f\restriction_{\Omega\setminus E}$ je měřitelné. Protože Y je separabilní, existuje spočetná $\{y_n\}$ hustá v Y. Pak každá otevřená množina v Y je spočetným sjednocením koulí tvaru $B(y_n, \frac{1}{k})$, $n, k \in \mathbb{N}$. Stačí tedy ukázat, že $g^{-1}(B(x,r))$ je měřitelná pro každé $x \in Y$ a $r > 0$. Díky předpokladu je dle Lemmatu 16 množina $M = B_{Y^*} \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ w^*-hustá v B_{Y^*} (w^*-topologie je slabší, než normová), takže dle Lemmatu 14 je M 1-normující. Protože M je spočetná, stačí díky Lemmatu 15 ukázat, že pro každé $x \in Y$, $r > 0$ a $\phi \in M$ je množina $g^{-1}(\{y \in Y;\ |\phi(y) - \phi(x)| \leq r\}) = \{t \in \Omega \setminus E;\ \phi \circ f(t) \in B_{\mathbb{K}}(\phi(x), r)\}$ měřitelná. To je ale zřejmé, neboť $\phi \circ f$ je dle předpokladu měřitelná pro každé $\phi \in M$ (lineární kombinace měřitelných funkcí je opět měřitelná funkce).

□

Typickým příkladem použití podmínky (iv) je např. situace, kdy $Y = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ a $A = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina souřadnicových funkcionálů.

TVRZENÍ 18. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Dle Lemmat 6 a 16 existují $E \subset \Omega$ míry 0 a Y separabilní podprostor X tak, že $f(\Omega \setminus E) \subset Y$. Dále dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.119(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt. Tedy je to separabilní prostor a existuje spočetná $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}, a tudíž 1-normující dle Lemmatu 14. Označme $\widetilde{\phi_n}$ rozšíření funkcionálů ϕ_n na X z Hahnovy-Banachovy věty. Dle předpokladu existují $E_n \subset \Omega$ nulové míry takové, že $\widetilde{\phi_n} \circ f = 0$ na $\Omega \setminus E_n$. Položme $A = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak $\mu(A) = 0$ a pro $t \in \Omega \setminus A$ je $f(t) \in Y$, takže $\|f(t)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(f(t))| = 0$.

□

2. Bochnerův integrál

Nejprve definujeme Bochnerův integrál pro schodovité funkce. Poté zavedeme Bochnerův integrál silně měřitelné funkce pomocí limity posloupnosti integrálů ze schodovitých funkcí, tedy procesem technicky poněkud odlišným, ale se shodnými rysy, jako ve skalárním případě.

DEFINICE 19. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f\colon \Omega \to X$ se nazývá schodovité, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

DEFINICE 20. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{x \in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E)x.$$

Uvědomme si, že pro $X = \mathbb{R}$ nebo $X = \mathbb{C}$ je Bochnerův integrál ze schodovité funkce roven Lebesgueovu integrálu. (Pro nezáporné funkce je to přímo definice, pro ostatní si to lze snadno rozmyslet.)

Dále si všimněme, že je-li $f\colon \Omega \to X$ schodovité a $E \subset \Omega$ měřitelná, pak $\chi_E f$ je též schodovité a pro $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $(\chi_E f)^{-1}(x) = f^{-1}(x) \cap E$. Tedy

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{x \in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E)x = \sum_{x \in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu\big((\chi_E f)^{-1}(x)\big)x = \int_\Omega \chi_E f \, d\mu.$$

LEMMA 21. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A\cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.*

DŮKAZ.

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu\big(f^{-1}(x)\cap(A\cup B)\big)x = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \big(\mu(f^{-1}(x)\cap A)+\mu(f^{-1}(x)\cap B)\big)x =$$
$$= \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x)\cap A)x + \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x)\cap B)x = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

VĚTA 22. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega\to X$ jsou schodovitá zobrazení a $\alpha\in\mathbb{K}$. Pak $f+g$ a αf jsou schodovitá a $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$.*

DŮKAZ. Dle Lemmatu 9 jsou $f+g$ a αf jednoduchá měřitelná zobrazení. Protože pro $y\in(f+g)(\Omega)\setminus\{0\}$ je $(f+g)^{-1}(y)\subset\bigcup_{u\in f(\Omega)\setminus\{0\}} f^{-1}(u)\cup\bigcup_{v\in g(\Omega)\setminus\{0\}} g^{-1}(v)$, je $f+g$ schodovité. Vzorec stačí zjevně dokázat pro $E=\Omega$. Označme $E_{u,v}=f^{-1}(u)\cap g^{-1}(v)$ pro $u,v\in X$. Pak $\Omega=\bigcup_{u\in f(\Omega), v\in g(\Omega)} E_{u,v}$ je měřitelný disjunktní rozklad Ω. S pomocí Lemmatu 21 tedy dostáváme, že

$$\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_\Omega \chi_{E_{u,v}}\cdot(f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})(u+v) =$$
$$= \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})u + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})v = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} f\,\mathrm{d}\mu + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} g\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu,$$

přičemž ve třetí a páté rovnosti jsme využili definici integrálu a toho, že integrál z nulového zobrazení je nula.

Konečně, podívejme se na tvrzení o násobku f. Je-li $\alpha=0$, pak tvrzení zřejmě platí. Je-li $\alpha\neq 0$, pak tvrzení plyne téměř ihned z definice a z toho, že $(\alpha f)^{-1}(\alpha x)=f^{-1}(x)$ pro $x\in X$.

□

Uvědomme si, že z věty výše speciálně plyne indukcí, že je-li $f=\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}x_j$ libovolné vyjádření schodovitého zobrazení takové, že $\mu(A_j)<+\infty$ pro všechna $j\in\{1,\dots,n\}$, pak $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)x_j$.

Je-li (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\in Æ(\Omega,X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t\mapsto\|f(t)\|$ je měřitelná na Ω, neboť je složením spojité funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f. Tuto funkci budeme značit $\|f\|$. Následující příklad ukazuje, že slabá měřitelnost f ještě měřitelnost $\|f\|$ nezaručí.

PŘÍKLAD 23. Nechť $\Omega=[0,1]$ s Lebesgueovou mírou a $X=\ell_2([0,1])$. Zobrazení f z Příkladu 12 není měřitelné, ale je slabě měřitelné a $\|f(t)\|=1$ pro každé $t\in[0,1]$, takže funkce $\|f\|$ je měřitelná. Nechť $E\subset[0,1]$ je lebesgueovsky neměřitelná množina a definujme zobrazení $g\colon[0,1]\to X$ předpisem $g(t)=\chi_E(t)f(t)=\chi_E(t)e_t$. Pak g je slabě měřitelné (argument je zcela stejný, jako pro f), ale funkce $\|g\|$ měřitelná není, neboť $\|g\|=\chi_E$.

◇

LEMMA 24. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon\Omega\to X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega\|f\|\,\mathrm{d}\mu<+\infty$. V tom případě je $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\|\le\int_E\|f\|\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$.*

Uvědomme si, že na levé straně nerovnosti je Bochnerův integrál, zatímco na pravé straně je Lebesgueův integrál.

DŮKAZ. Nechť $f = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $\|f\| = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j} \|x_j\|$, a tedy $\int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\|x_j\|$. Odtud již první tvrzení snadno plyne. Dále, pro $E \subset \Omega$ měřitelnou je $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap E)x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap E)\|x_j\| = \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$. □

LEMMA 25. *Nechť* (Ω, μ) *je prostor s mírou,* X *je Banachův prostor,* $f \in Æ(\Omega, X)$ *a* $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ *je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\| \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$. *Pak pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$ *existuje* $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. *Navíc je-li* $g_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ *posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má* $\{f_n\}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.

DŮKAZ. Uvědomme si, že z předpokladu speciálně plyne, že funkce $\|f_n - f\|$ jsou měřitelné. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ je díky Větě 22 a Lemmatu 24

$$\left\|\int_E f_m \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right\| = \left\|\int_E (f_m - f_n) \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_E \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f_m - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \leq$$
$$\leq \int_\Omega \big(\|f_m - f\| + \|f - f_n\|\big) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|f_m - f\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f - f_n\| \,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v X, a protože X je úplný, má tam limitu.

Dokažme nyní druhou část tvrzení. Posloupnost $\{h_n\}$ definovaná jako $h_{2n-1} = f_n$, $h_{2n} = g_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ má stejnou vlastnost jako $\{f_n\}$, podle první části tedy posloupnost $\{\int_E h_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ má limitu v X. Posloupnosti $\{\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ a $\{\int_E g_n \,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ jsou z ní ovšem vybrané, takže musejí mít stejnou limitu. □

Předchozí lemma nám umožňuje definovat Bochnerův integrál jako limitu integrálů ze schodovitých zobrazení.

DEFINICE 26. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Řekneme, že f je bochnerovsky integrovatelné, pokud existuje posloupnost $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Díky Lemmatu 25 je definice korektní, neboť limita existuje a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$. Všimněme si, že z definice přímo plyne, že je-li μ úplná, $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $g \in Æ(\Omega, X)$ je takové, že $g = f$ s. v., pak g je též bochnerovsky integrovatelné a $\int_E g \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Následující věta udává užitečnou charakterizaci bochnerovsky integrovatelných funkcí.

VĚTA 27. *Nechť* (Ω, μ) *je prostor s úplnou mírou,* X *je Banachův prostor a* $f \in Æ(\Omega, X)$. *Pak* f *je bochnerovsky integrovatelné, právě když je silně měřitelné a* $\|f\|$ *je lebesgueovsky integrovatelná. V tom případě je* $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$ *pro každou měřitelnou* $E \subset \Omega$.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$. Pak posloupnost funkcí $\{t \mapsto \|f_n - f\|(t)\}_{n=1}^\infty$ konverguje k 0 v prostoru $L_1(\mu)$. Tudíž existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ bodově s. v. ([R, Věta 3.12]), neboli $f_{n_k} \to f$ bodově s. v. Tedy f je silně měřitelné.

Dále funkce $\|f\|$ je nezáporná měřitelná (Lemma 6), tedy její Lebesgueův integrál existuje. Též existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, takže $\int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, přičemž konečnost předposledního integrálu plyne z Lemmatu 24.

Konečně, nechť $E \subset \Omega$ je měřitelná. Pak $\left\|\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dle Lemmatu 24. Výraz vlevo konverguje dle definice k $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\|$. Pro výraz vpravo je $\left|\int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu - \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E \big|\|f_n\| - \|f\|\big| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Odtud plyne, že $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.

$\Leftarrow$ Nechť $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení (množina $\{t \in \Omega;\ \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|\}$ je měřitelná), pro které $\|g_n\| \le 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy g_n je schodovité (Lemma 24). Snadno si rozmyslíme, že $\|g_n(t) - f(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|g_n - f\| \le \|g_n\| + \|f\| \le 3\|f\|$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = 0$.

□

Je-li $X = \mathbb{K}$, pak pojem silně měřitelné a měřitelné funkce do X splývá. Z předchozí věty a z nerovnosti $\left|\int f_n\,\mathrm{d}\mu - \int f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$ pro *Lebesgueův* integrál tedy speciálně plyne, že ve skalárním případě je Bochnerův integrál totéž jako Lebesgueův.

VĚTA 28. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in Æ(\Omega, X)$ jsou bochnerovsky integrovatelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak zobrazení $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

DŮKAZ. Nechť $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ jsou posloupnosti schodovitých zobrazení takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|g_n - f\|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. Zobrazení $f_n + g_n$ a αf_n jsou schodovitá dle Věty 22. Zobrazení $f + g$ a αf jsou silně měřitelná dle Věty 27 a Důsledku 10, takže funkce $\|f_n + g_n - (f+g)\|$ a $\|\alpha f_n - \alpha f\|$ jsou měřitelné dle Důsledku 10 a Lemmatu 6. Dále $\int_\Omega \|f_n + g_n - (f+g)\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|g_n - g\|\,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|\alpha f_n - \alpha f\|\,\mathrm{d}\mu = |\alpha| \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. Odtud plyne, že $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a (též s využitím Věty 22) že platí příslušné vzorce.

□

VĚTA 29 (o majorizované konvergenci). *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je takové, že $f_n \to f$ bodově s. v., a nechť $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Speciálně, $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Zobrazení f je silně měřitelné dle Důsledku 8. Snadno nahlédneme, že $\|f(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Tedy zobrazení f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná dle Věty 27. Jelikož pro s. v. $t \in \Omega$ platí, že $\|f_n(t) - f(t)\| \le 2g(t)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tvrzení plyne ihned z Lebesgueovy věty. Poslední část věty plyne z odhadu $\left\|\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu$, který platí díky Větám 28 a 27.

□

VĚTA 30. *Nechť (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \to f$ stejnoměrně s. v. na Ω. Pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Nechť $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na E. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_E \|f_n - f\| \le 1$ pro $n \ge n_0$. Pak pro $n \ge n_0$ je $\|f_n(t)\| \le \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t)\| \le g(t)$ pro $t \in E$, kde $g = \|f\| + 1$, což je integrovatelná funkce díky Větě 27 a konečnosti míry μ. Můžeme tedy použít Větu 29.

□

Z Věty 27 a z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu ([R, cvičení 1.12]) ihned dostáváme následující větu:

VĚTA 31 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

VĚTA 32. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $T\circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$\int_E T\circ f \,\mathrm{d}\mu = T\Big(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\Big).$$

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že f je schodovité. Nechť $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $T\circ f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} T(x_j)$, odkud snadno plyne, že $T\circ f$ je schodovité. Dále $\int_E T\circ f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)T(x_j) = T\big(\sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)x_j\big) = T\big(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\big)$.

Dokažme nyní obecný případ. Díky spojitosti T snadno nahlédneme, že zobrazení $T\circ f$ je silně měřitelné. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$. Pak $\{T\circ f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení a

$$\int_\Omega \|T\circ f_n - T\circ f\|\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|T(f_n(t)-f(t))\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|T\|\cdot\|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu = \|T\|\int_\Omega \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Zobrazení $T\circ f$ je tedy bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$ díky předchozímu odstavci a spojitosti T dostáváme, že

$$\int_E T\circ f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E T\circ f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} T\Big(\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\Big) = T\Big(\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\Big) = T\Big(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\Big).$$

□

FAKT 33. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $x\in X$ a $f\in L_1(\mu)$. Pak $\int_E f(t)x\,\mathrm{d}\mu(t) = \big(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\big)x$ pro každou měřitelnou $E\subset\Omega$.*

DŮKAZ. Definujme $T\colon \mathbb{K}\to X$ předpisem $T(s) = sx$. Pak $T\in\mathcal{L}(\mathbb{K},X)$. Tvrzení tedy plyne z Věty 32.

□

PŘÍKLAD 34. Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou a $f\in Æ(\Omega,\mathbb{K}^n)$. Označme $f_1,\dots,f_n \in Æ(\Omega,\mathbb{K})$ komponenty zobrazení f, tj. $f = (f_1,\dots,f_n)$. Pak f je silně měřitelné, právě když $f_1,\dots,f_n$ jsou měřitelné a f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $f_1,\dots,f_n\in L_1(\mu)$. V tom případě pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \big(\int_\Omega f_1\,\mathrm{d}\mu,\dots,\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu\big)$.

Vskutku, předně si uvědomme, že $\mathbb{K}^n$ je separabilní, a tedy pojmy silné měřitelnosti a měřitelnosti splývají. Označme $e_1,\dots,e_n$ kanonickou bázi $\mathbb{K}^n$ a $\phi_1,\dots,\phi_n$ souřadnicové funkcionály na $\mathbb{K}^n$. Je-li f měřitelné, pak $f_j = \phi_j\circ f$ je též měřitelná díky spojitosti ϕ_j. Je-li navíc f bochnerovsky integrovatelné, pak integrovatelnost f_j spolu se vzorcem pro $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ plyne z Věty 32.

Obráceně, jsou-li $f_1,\dots,f_n$ měřitelné, pak $t\mapsto f_j(t)e_j$ je měřitelné, neboť $s\mapsto se_j$ je spojité. Protože $f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)e_j$, je f (silně) měřitelné, jakožto součet (silně) měřitelných zobrazení (Důsledek 10). Jsou-li navíc $f_1,\dots,f_n\in L_1(\mu)$, pak z Faktu 33 plyne bochnerovská integrovatelnost zobrazení $t\mapsto f_j(t)e_j$ a integrovatelnost f plyne z linearity Bochnerova integrálu (Věta 28).

◇

PŘÍKLAD 35. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina, μ je aritmetická míra na Γ a X je Banachův prostor. Pak $f\colon\Gamma\to X$ je bochnerovsky integrovatelné, právě když je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$ absolutně konvergentní. V tom případě je $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$.

Vskutku, předpokládejme, že f je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $F\subset\Gamma$ konečná, pak $\sum_{\gamma\in F}\|f(\gamma)\| = \int_F\|f\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega\|f\|\,\mathrm{d}\mu$, takže i $\sup\big\{\sum_{\gamma\in F}\|f(\gamma)\|;\ F\subset\Gamma \text{ konečná}\big\} \le \int_\Omega\|f\|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ (Věta 27). Zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$ je tedy absolutně konvergentní dle Tvrzení 1.34.

Opačně, je-li řada $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|f(\gamma)\|$ konvergentní, pak dle Věty 1.33(d) je množina $\{\gamma\in\Gamma;\ f(\gamma)\ne 0\}$ spočetná; nechť $\{\gamma_n\}\subset\Gamma$ je libovolná prostá posloupnost obsahující všechny její prvky. Položme $f_n = \chi_{\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}}f$. Pak f_n jsou schodovitá zobrazení a $f_n\to f$ bodově. Tedy f je silně měřitelné. Dle Leviovy věty o monotónní konvergenci a Věty 1.33(e) je $\int_\Gamma\|f\|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma\|f_n\|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n\|f(\gamma_n)\| = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|f(\gamma)\| < +\infty$, takže f je bochnerovsky integrovatelné (Věta 27).

Konečně, protože $\|f_n(\gamma)\| \leq \|f(\gamma)\|$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, dle Vět 29, 1.36(b) a 1.33(e) je $\int_\Gamma f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_\Gamma f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim \sum_{j=1}^n f(\gamma_j) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$.

◇

VĚTA 36. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$, pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Nechť $\phi \in X^*$. Pak dle Věty 32 je $\phi \circ f \in L_1(\mu)$ a $\int_E \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu = \phi\big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big) = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$. To znamená, že $\phi \circ f = 0$ s. v. ([R, Věta 1.39(b)]). Tedy $f = 0$ s. v. dle Tvrzení 18.

□

VĚTA 37. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou $E \subset \Omega$ kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(E).$$

DŮKAZ. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. $x = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \notin \overline{\operatorname{conv}}\, f(E)$. Dle Věty 6.68(b) existuje $\phi \in X^*$ takové, že $\alpha = \sup_E \operatorname{Re}\phi \circ f < \operatorname{Re}\phi(x)$. Je-li $\mu(E) < +\infty$, pak díky Větě 32 platí, že

$$\alpha < \operatorname{Re}\phi(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu\right) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \operatorname{Re}\phi \circ f \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha \,\mathrm{d}\mu = \alpha,$$

což je spor. Je-li $\mu(E) = +\infty$, pak $x = 0$, takže $\alpha < \phi(0) = 0$. Je tedy (znovu díky Větě 32)

$$-\infty < \operatorname{Re}\phi\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_E \operatorname{Re}\phi \circ f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \alpha \,\mathrm{d}\mu = -\infty,$$

což je opět spor.

□

VĚTA 38. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, Y je Banachův prostor, P je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $f\colon P \times \Omega \to Y$. Předpokládejme, že $t \mapsto f(x, t)$ je silně měřitelné pro každé $x \in P$ a $x \mapsto f(x, t)$ je spojité v x_0 pro s. v. $t \in \Omega$. Dále předpokládejme, že existuje $g \in L_1(\mu)$ taková, že pro každé $x \in P$ je $\|f(x, t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak zobrazení $F\colon P \to Y$, $F(x) = \int_\Omega f(x, t) \,\mathrm{d}\mu(t)$ je spojité v x_0.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset P$ je libovolná posloupnost konvergující k x_0. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $f_n\colon \Omega \to Y$ předpisem $f_n(t) = f(x_n, t)$. Pak zobrazení f_n jsou silně měřitelná, $f_n(t) \to f(x_0, t)$ pro s. v. $t \in \Omega$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Dle Věty 29 je tedy $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(t) \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega f(x_0, t) \,\mathrm{d}\mu(t) = F(x_0)$.

□

VĚTA 39 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál). *Nechť (Ω_1, μ_1) a (Ω_2, μ_2) jsou prostory se σ-konečnými úplnými mírami a nechť ν je zúplněním součinové míry $\mu_1 \times \mu_2$. Nechť X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k ν. Potom pro μ_1-s. v. $s \in \Omega_1$ je zobrazení $t \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_2, pro μ_2-s. v. $t \in \Omega_2$ je zobrazení $s \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_1; zobrazení $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s, t) \,\mathrm{d}\mu_2(t)$ a $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s, t) \,\mathrm{d}\mu_1(s)$ definovaná s. v. na Ω_1, resp. Ω_2 jsou bochnerovsky integrovatelná a*

$$\int_{\Omega_1} \psi_1 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2 \,\mathrm{d}\mu_2.$$

DŮKAZ. Zjevně stačí dokázat část věty týkající se ψ_1, které budeme nadále značit ψ. Řezy zobrazení budeme značit takto: $f^s(t) = f(s, t)$ pro $s \in \Omega_1$. Podle Lemmatu 6 existují separabilní uzavřený podprostor $Y \subset X$ a množina $N \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ tak, že $\nu(N) = 0$ a $f(\Omega_1 \times \Omega_2 \setminus N) \subset Y$. Dle Důsledku 6.116 a Tvrzení 6.119(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt, tedy existuje spočetná $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}. Díky Fubiniově větě pro Lebesgueův integrál použité na funkce χ_N a $\|f\|$ existuje $E_0 \subset \Omega_1$ taková, že $\mu_1(\Omega_1 \setminus E_0) = 0$ a pro každé $s \in E_0$ platí, že $\mu_2(N^s) = 0$, kde $N^s = \{t \in \Omega_2;\ (s, t) \in N\}$, funkce $\|f\|^s$ je integrovatelná na Ω_2 a funkce $g(u) = \int_{\Omega_2} \|f\|^u \,\mathrm{d}\mu_2$ je integrovatelná na Ω_1.

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $\phi_n \circ f$ měřitelná vzhledem k ν, a tedy existuje $E_n \subset \Omega_1$ taková, že $\mu_1(\Omega_1 \setminus E_n) = 0$ a $\phi_n \circ f^s = (\phi_n \circ f)^s$ je μ_2-měřitelná pro každé $s \in E_n$. Položme $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$. Pak $\mu_1(\Omega_1 \setminus E) = 0$. Je-li $s \in E$, pak $f^s(\Omega_2 \setminus N^s) \subset Y$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\phi_n \circ f^s$ měřitelná. Tedy dle Věty 17 je f^s silně měřitelné na Ω_2. Dále je $\|f^s\| = \|f\|^s$, a tedy f^s je bochnerovsky integrovatelné na Ω_2 dle Věty 27.

Pro $s \in E$ je $\psi(s) = \int_{\Omega_2} f^s \, d\mu_2 = \int_{\Omega_2 \setminus N^s} f^s \, d\mu_2 \in Y$. Je-li nyní $\phi \in X^*$, pak dle Věty 32 je $\phi \circ \psi(s) = \int_{\Omega_2} \phi \circ f^s \, d\mu_2 = \int_{\Omega_2} (\phi \circ f)^s \, d\mu_2$ pro $s \in E$. Na druhou stranu, $\phi \circ f \in L_1(\nu)$ (Věta 32), a tedy dle Fubiniovy věty pro Lebesgueův integrál je funkce $\psi_\phi(s) = \int_{\Omega_2} (\phi \circ f)^s \, d\mu_2$ definovaná s. v. na Ω_1, je tam integrovatelná a $\int_{\Omega_1} \psi_\phi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \phi \circ f \, d\nu$. Tedy speciálně $\phi \circ \psi = \psi_\phi$ s. v. na Ω_1, odkud plyne, že $\phi \circ \psi$ je měřitelná na Ω_1. Dle Věty 17 je tedy ψ silně měřitelné na Ω_1. Dále je $\|\psi(s)\| \leq \int_{\Omega_2} \|f^s\| \, d\mu_2 = g(s)$ pro $s \in E$, odkud plyne, že ψ je bochnerovsky integrovatelné (Věta 27).

Konečně, pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi\big(\int_{\Omega_1} \psi \, d\mu_1\big) = \int_{\Omega_1} \phi \circ \psi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \psi_\phi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \phi \circ f \, d\nu = \phi\big(\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\nu\big)$, přičemž jsme dvakrát využili Větu 32. Protože X^* odděluje body X, plyne odtud, že $\int_{\Omega_1} \psi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\nu$.

□

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

V tomto oddílu zavedeme vektorovou analogii skalárních Lebesgueových prostorů L_p.

DEFINICE 40. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z Æ(Ω, X) takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \big\|t \mapsto \|f(t)\|\big\|_{L_p(\mu)}$.

Všimněme si, že podle Věty 27 je $L_1(\mu, X)$ množina všech bochnerovsky integrovatelných zobrazení z Æ(Ω, X).

VĚTA 41. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p \leq \infty$.*
(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$.
(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle_{L_2(\mu,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t)\rangle \, d\mu.$$

DŮKAZ. (a) Nechť $f, g \in L_p(\mu, X)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Zobrazení $f + g$ a αf jsou silně měřitelná (Důsledek 10). Dále $\|f\|, \|g\| \in L_p(\mu)$, takže i $\|f\| + \|g\| \in L_p(\mu)$. Protože $0 \leq \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, plyne odtud, že $\|f + g\| \in L_p(\mu)$ a $\big\|\|f + g\|\big\|_{L_p(\mu)} \leq \big\|\|f\| + \|g\|\big\|_{L_p(\mu)} \leq \big\|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)} + \big\|\|g\|\big\|_{L_p(\mu)}$. Podobně, $\big\|\|\alpha f\|\big\|_{L_p(\mu)} = \big\||\alpha|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)} = |\alpha|\big\|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)}$. Konečně, je-li $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = 0$, pak $\|f\| = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ s. v. To znamená, že $L_p(\mu, X)$ je vektorový prostor a $f \mapsto \|f\|_{L_p(\mu,X)}$ je norma na $L_p(\mu, X)$. Důkaz úplnosti je slovo od slova stejný jako důkaz pro $L_p(\mu)$ v [R, Věta 3.11], zaměníme-li všechny výskyty absolutní hodnoty za normu v X.

(b) Zvolme pevně $f, g \in L_2(\mu, X)$ a ukažme, že funkce $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ je měřitelná. Díky spojitosti funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ (Tvrzení 1.86(b)) stačí ukázat měřitelnost zobrazení $\Psi\colon \Omega \to X \times X$, $\Psi(t) = (f(t), g(t))$. Po odstranění množiny nulové míry a přejmenování můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f, g jsou definována na Ω, jsou měřitelná ve smyslu σ-algeber a zobrazují po řadě do separabilních podprostorů Y a Z. Prostor $Y \times Z$ je separabilní metrický prostor, má tedy bázi otevřených množin skládající se ze spočetného systému množin tvaru $U(x, r) \times U(y, r)$. Stačí tedy ukázat, že vzor libovolné množiny $U(x, r) \times U(y, r) \subset Y \times Z$ při zobrazení Ψ je měřitelná množina. To je ale zřejmé z toho, že $\Psi^{-1}(U(x, r) \times U(y, r)) = f^{-1}(U(x, r)) \cap g^{-1}(U(y, r))$.

Dále z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti (Tvrzení 1.83) dostáváme, že $|\langle f(t), g(t)\rangle| \leq \|f(t)\|\|g(t)\|$ pro každé $t \in \Omega$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle \in L_1(\mu)$, takže výraz $\langle f, g\rangle_{L_2(\mu,X)}$ je dobře definován. Fakt, že uvedený vzorec dává skalární součin, který navíc generuje kanonickou normu na $L_2(\mu, X)$, je nyní snadno vidět.

□

VĚTA 42. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p < \infty$.*
(a) Množina schodovitých zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.
(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

DŮKAZ. (a) Důkaz je prakticky shodný s důkazem Věty 27, kde se vlastně dokazuje případ $p = 1$: Nechť $f \in L_p(\mu, X)$. Nechť $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení, pro které $\|g_n\| \leq 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|^p$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy podobně jako v Lemmatu 24 si lze rozmyslet, že g_n je schodovité. Dále $\|f(t) - g_n(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|f - g_n\|^p \leq (\|f\| + \|g_n\|)^p \leq 3^p\|f\|^p$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$.

(b) Množina $\mathcal{A} = \{\chi_E;\ E \subset \Omega, \mu(E) < +\infty\}$ je podmnožina separabilního metrického prostoru $L_p(\mu)$, tedy existuje spočetná $\mathcal{E} \subset \{E \subset \Omega;\ \mu(E) < +\infty\}$ taková, že $\{\chi_E;\ E \in \mathcal{E}\}$ je hustá v $\mathcal{A}$ v metrice prostoru $L_p(\mu)$. Dále existuje spočetná $Q \subset X$ hustá v X. Snadno nahlédneme, že množina všech schodovitých zobrazení z Ω do X tvaru $\sum_{j=1}^n \chi_{E_j} x_j$, kde $E_j \in \mathcal{E}$ a $x_j \in Q$, je spočetná. Dle (a) stačí ukázat, že tato množina je hustá v množině všech schodovitých zobrazení z Ω do X v metrice prostoru $L_p(\mu, X)$.

Nechť tedy $f\colon \Omega \to X$ je schodovité, $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde $\mu(A_j) < +\infty$, a nechť $\varepsilon \in (0, 1)$. Položme $M = \max\bigl\{\|x_1\| + 1, \dots, \|x_n\| + 1, \|\chi_{A_1}\|_{L_p(\mu)}, \dots, \|\chi_{A_n}\|_{L_p(\mu)}\bigr\}$. Pak existují $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ a $y_1, \dots, y_n \in Q$ tak, že $\|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_{L_p(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ a $\|x_j - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. Tudíž

$$\begin{aligned}
\Bigl\|f - \sum_{j=1}^n \chi_{B_j} y_j\Bigr\|_{L_p(\mu,X)} &= \Bigl\|\sum_{j=1}^n (\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j)\Bigr\|_{L_p(\mu,X)} \leq \sum_{j=1}^n \|\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j\|_{L_p(\mu,X)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \bigl(\|\chi_{A_j} x_j - \chi_{A_j} y_j\|_{L_p(\mu,X)} + \|\chi_{A_j} y_j - \chi_{B_j} y_j\|_{L_p(\mu,X)}\bigr) = \\
&= \sum_{j=1}^n \Bigl(\bigl\|\|x_j - y_j\|\chi_{A_j}\bigr\|_{L_p(\mu)} + \bigl\|\|y_j\| \cdot |\chi_{A_j} - \chi_{B_j}|\bigr\|_{L_p(\mu)}\Bigr) = \\
&= \sum_{j=1}^n \bigl(\|x_j - y_j\| \cdot \|\chi_{A_j}\|_{L_p(\mu)} + \|y_j\| \cdot \|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_{L_p(\mu)}\bigr) < \\
&< \sum_{j=1}^n \Bigl(\frac{\varepsilon}{2Mn} M + M \frac{\varepsilon}{2Mn}\Bigr) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Kapitola 9

Hlubší vlastnosti lokálně konvexních topologií, slabá kompaktnost

1. Kompaktní konvexní množiny

DEFINICE 1. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že $x \in C$ je extremálním bodem množiny C, jestliže x není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v C, tj. pokud $u, v \in C$ a $x = \lambda u + (1-\lambda)v$ pro nějaké $\lambda \in (0,1)$, pak $u = v$. Množinu všech extremálních bodů C značíme $\operatorname{ext} C$.

Snadno si lze rozmyslet, že $x \in \operatorname{ext} C$, právě když x není středem žádné nedegenerované úsečky ležící v C, a právě když $C \setminus \{x\}$ je konvexní.

Uvědomme si, že pokud A je podmnožina vektorového prostoru, pak $\operatorname{ext}\operatorname{conv} A \subset A$. Vskutku, je-li $x \in \operatorname{conv} A \setminus A$, pak $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, kde $n > 1$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 \notin \operatorname{conv}\{x_2, \dots, x_n\}$. Položíme-li $\mu = \sum_{i=2}^n \lambda_i$, pak $y = \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\mu} x_i \in \operatorname{conv} A$, $x = \lambda_1 x_1 + \mu y$ a $x_1 \neq y$, takže $x \notin \operatorname{ext}\operatorname{conv} A$.

Dále je-li C konvexní podmnožina topologického vektorového prostoru X, pak $\operatorname{ext} C \subset \partial C$. Vskutku, je-li $x \in \operatorname{Int} C$, pak existuje U vyvážené okolí 0 takové, že $x + U \subset C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je netriviální, takže existuje $y \in U$, $y \neq 0$ (U je pohlcující). Pak úsečka s krajními body $x + y$ a $x - y$ leží v C a x je její vnitřní bod, takže $x \notin \operatorname{ext} C$.

Ne každá uzavřená konvexní množina má nějaký extremální bod: stačí vzít např. libovolnou přímku v $\mathbb{R}^2$. Extremální body tedy hrají roli především při studiu uzavřených omezených konvexních množin.

PŘÍKLAD 2. Extremálními body uzavřeného čtverce v rovině jsou právě jeho vrcholy. Extremálními body uzavřeného kruhu v rovině jsou právě body jeho hraniční kružnice.

$\diamond$

Připomeňme, že afinní podprostor vektorového prostoru X je množina tvaru $x + Y$, kde $x \in X$ a Y je vektorový podprostor X. Afinní zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y je zobrazení tvaru $x \mapsto a + L(x)$, kde $L\colon X \to Y$ je lineární a $a \in Y$. Posunutí zachovává konvexitu, takže obrazem i vzorem konvexní množiny při afinním zobrazení je opět konvexní množina.

DEFINICE 3. Nechť C je konvexní podmnožina reálného vektorového prostoru X. Afinní nadrovina $W \subset X$ se nazývá opěrnou nadrovinou množiny C (v bodě $x \in C$), pokud $W \cap C \neq \emptyset$ (resp. $x \in W \cap C$) a C leží celá v jednom z poloprostorů určených W (tj. existují nenulová lineární forma f na X a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \leq \alpha$).

FAKT 4. *Nechť C je konvexní množina ve vektorovém prostoru X.*
(a) Je-li $B \subset C$ konvexní, pak $B \cap \operatorname{ext} C \subset \operatorname{ext} B$.
(b) Je-li Y vektorový prostor a $T\colon X \to Y$ afinní zobrazení, pak T zachovává konvexní kombinace. Je-li T prosté, pak $\operatorname{ext} T(C) = T(\operatorname{ext} C)$.
(c) Je-li X reálný a $W \subset X$ opěrná nadrovina množiny C, pak $\operatorname{ext}(C \cap W) = W \cap \operatorname{ext} C$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in B \cap \operatorname{ext} C$. Pak x není vnitřním bodem žádné úsečky ležící v C, a tedy ani v B, takže $x \in \operatorname{ext} B$.

(b) Nechť $T = a + L$, kde $a \in Y$ a $L\colon X \to Y$ je lineární. Pak $T\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\big) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i L(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a + L(x_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)$ kdykoli $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a $x_i \in X$. Je-li T prosté, pak pro každou nedegenerovanou úsečku $[x, y] \subset C$ je T bijekce mezi $[x, y]$ a nedegenerovanou úsečkou $[T(x), T(y)]$ v $T(C)$. Odtud již rovnost $\operatorname{ext} T(C) = T(\operatorname{ext} C)$ snadno plyne.

(c) $\supset$ plyne z (a) pro $B = C \cap W$.

$\subset$ Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a f je lineární forma na X taková, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \leq \alpha$. Nechť $z \in \operatorname{ext}(C \cap W)$. Jsou-li $x, y \in C$ takové, že $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, pak $x, y \in W$. V opačném případě by totiž platilo, že $\alpha = f(z) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) < \alpha$, což je spor. To ale znamená, že $x = y = z$, neboli $z \in \operatorname{ext} C$.

□

VĚTA 5. [1] *Je-li C kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak každý bod množiny C je konvexní kombinací nejvýše $n + 1$ extremálních bodů množiny C. Tedy $C = \operatorname{conv} \operatorname{ext} C$.*

V důkazu využijeme následující lemma:

LEMMA 6. *Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní. Pak buďto $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$, nebo C leží v nějaké afinní nadrovině v $\mathbb{R}^n$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že C leží v afinní nadrovině W. Je-li x vnitřní bod C, pak $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}(C - x) \subset W - x$, neboť okolí 0 je pohlcující a $W - x$ je nadrovina. To je spor.

Na druhou stranu, nechť C neleží v žádné afinní nadrovině. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 \in C$, a tedy $\operatorname{span} C = \mathbb{R}^n$. Pak existují lineárně nezávislé vektory $x_1, \dots, x_n \in C$. Lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(e_i) = x_i$, kde $e_1, \dots, e_n$ jsou kanonické bázové vektory v $\mathbb{R}^n$, je izomorfismus (Věta 1.68). Označme $A = \operatorname{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\} = \{t \in [0, 1]^n;\ \sum_{i=1}^n t_i \leq 1\}$. Snadno spočteme, že $B_\infty\big((\frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}), \frac{1}{2n}\big) \subset A$ (koule v normě $\|\cdot\|_\infty$), takže A má neprázdný vnitřek. Protože $T(A) \subset C$, má i C neprázdný vnitřek.

□

DŮKAZ VĚTY 5. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $C \neq \emptyset$. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je C uzavřený interval a tvrzení je tak zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro dimenzi $n - 1$ a nechť $C \subset \mathbb{R}^n$. Předpokládejme nejprve, že $\operatorname{Int} C = \emptyset$. Podle Lemmatu 6 leží C v nějaké afinní nadrovině W. Pak existuje afinní bijekce $T : \mathbb{R}^{n-1} \to W$, která je homeomorfismus (Věta 1.68). Množina $T^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je kompaktní a konvexní, takže můžeme využít indukčního předpokladu v $\mathbb{R}^{n-1}$. Tvrzení věty pro C pak plyne z Faktu 4(b).

Nechť nyní $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$ a $x \in C$. Je-li $x \in \partial C$, pak podle oddělovací věty (Věta 6.68(a)) použité na množiny $\operatorname{Int} C$ a $\{x\}$ a podle Tvrzení 6.12(e) existuje $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ takový, že $f(y) \leq \alpha = f(x)$ pro každé $y \in C$, neboli $W = f^{-1}(\alpha)$ je opěrná nadrovina množiny C v bodě x. Podle indukčního předpokladu (vizte argument výše) je x konvexní kombinací nejvýše n extremálních bodů kompaktní konvexní množiny $C \cap W$, což jsou podle Faktu 4(c) též extremální body C.

Zbývá případ, kdy $x \in \operatorname{Int} C$. Protože $\partial C \neq \emptyset$ (v opačném případě by C i $\mathbb{R}^n \setminus C$ byly uzavřené, a tedy C by byla obojetná, což není možné), dle předchozího existuje $z_1 \in \operatorname{ext} C$. Přímka procházející body z_1 a x protíná kompaktní konvexní množinu C v úsečce $[z_1, y]$, kde $y \in \partial C$. Podle předchozího je y konvexní kombinací nejvýše n extremálních bodů $z_2, \dots, z_k$ množiny C. Tedy $y = \sum_{j=2}^k \alpha_j z_j$, kde $\alpha_j \geq 0$ a $\sum_{j=2}^k \alpha_j = 1$. Dále $x = \alpha y + (1 - \alpha) z_1$ pro nějaké $\alpha \in (0, 1)$, takže $x = \sum_{j=2}^k \alpha \alpha_j z_j + (1 - \alpha) z_1$, což je konvexní kombinace $k \leq n + 1$ extremálních bodů $z_1, \dots, z_k$.

□

DŮSLEDEK 7. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \operatorname{conv} A$, pak existuje nejvýše $(n + 1)$-prvková podmnožina $B \subset A$ taková, že $x \in \operatorname{conv} B$.*

DŮKAZ. Nechť $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ je konvexní kombinace prvků z A. Množina $C = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ je kompaktní (je spojitým obrazem kompaktní množiny $\big\{\lambda \in [0, 1]^m;\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\big\}$ při zobrazení $\lambda \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$), takže podle Věty 5 je $x \in \operatorname{conv} B$, kde $B \subset \operatorname{ext} C$ má nejvýše $n + 1$ prvků. Ale $\operatorname{ext} C \subset \{x_1, \dots, x_m\} \subset A$.

□

DŮSLEDEK 8. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Pak* $\operatorname{conv} K$ *je též kompaktní.*

[1] H. Minkowski v $\mathbb{R}^3$ (nejpozději 1909), v $\mathbb{R}^n$ pak C. Carathéodory (1911) a Ernst Steinitz (1913).

DŮKAZ. Položme $\Delta = \{\lambda \in [0,1]^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$. Pak Δ je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$. Definujme zobrazení $\Phi\colon \Delta \times K^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\Phi(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Pak Φ je spojité, a tedy $\operatorname{Rng} \Phi$ je kompaktní. Podle Důsledku 7 je $\operatorname{conv} K \subset \operatorname{Rng} \Phi \subset \operatorname{conv} K$, takže $\operatorname{conv} K = \operatorname{Rng} \Phi$ je kompaktní.

□

V nekonečněrozměrných prostorech máme následující verzi:

TVRZENÍ 9. *Nechť X je Fréchetův prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ jsou kompaktní.*

DŮKAZ. Množina K je totálně omezená (Tvrzení 6.28), takže i $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ je totálně omezený (Tvrzení 6.106, 6.65(b) a 6.27(e)). Nechť ρ je translačně invariantní úplná metrika generující topologii X. Dle Faktu 6.30 je $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ totálně omezený v metrice ρ. Navíc je $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ uzavřený, a tedy úplný v metrice ρ. To znamená, že je kompaktní.

Dále položme $L = \bigcup_{|\alpha| \le 1} \alpha K$. Pak L je vyvážená a kompaktní (je spojitým obrazem kompaktu $B_{\mathbb{K}}(0,1) \times K$ při spojitém zobrazení $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$), takže podle předchozího je $\overline{\operatorname{conv}}\, L$ kompaktní. Protože $\overline{\operatorname{aconv}}\, K \subset \overline{\operatorname{conv}}\, L$ (Tvrzení 6.106, Fakt 6.44(a)), je i $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ kompaktní.

□

Příklad 6.66 ukazuje, že bez lokální konvexity předchozí tvrzení neplatí.

V nekonečněrozměrných prostorech je situace kolem extremálních bodů poněkud komplikovanější.

PŘÍKLAD 10. Jednotková koule v c_0 nemá žádný extremální bod. Je-li totiž $z \in B_{c_0}$ libovolný bod, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_n| \le \frac{1}{2}$. Položíme-li $x = z + \frac{1}{2} e_n$ a $y = z - \frac{1}{2} e_n$, kde e_n je příslušný kanonický bázový vektor, pak $x, y \in B_{c_0}$, $x \neq y$ a $z = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y$, takže z není extremálním bodem B_{c_0}.

◇

DEFINICE 11. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že neprázdná $E \subset C$ je extremální podmnožinou C, pokud žádný bod E není netriviální konvexní kombinací bodů z C, z nichž některý leží mimo E, tj. je-li $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$, pak $x, y \in E$.

Všimněme si, že x je extremálním bodem C, právě když $\{x\}$ je extremální podmnožinou C. Dále je snadno vidět, že sjednocení, resp. neprázdný průnik libovolného systému extremálních podmnožin C je opět extremální podmnožina C.

PŘÍKLADY 12.

- Je-li C konvexní podmnožina vektorového prostoru, pak C a $\operatorname{ext} C$ jsou extremální podmnožiny C (jsou-li neprázdné).
- Libovolná hrana uzavřeného čtverce v rovině, resp. sjednocení libovolných hran je jeho extremální podmnožinou.
- Je-li C konvexní podmnožina reálného vektorového prostoru X a W je opěrná nadrovina C, pak $C \cap W$ je extremální podmnožina C. Vskutku, nechť f je nenulová lineární forma na X taková, že $W = f^{-1}(\alpha)$ a $\sup_C f \le \alpha$. Předpokládejme, že $u = \lambda x + (1-\lambda) y \in C \cap W$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$. Je-li $f(x) < \alpha$ nebo $f(y) < \alpha$, pak $\alpha = f(u) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) < \alpha$, což je spor. Tedy $x, y \in W$.

  Dále pokud je navíc X topologický vektorový prostor, pak $C \cap W \subset \partial C$: Nechť $x \in C \cap W$. Předpokládejme, že $x \in \operatorname{Int} C$. Nechť $e \in X$ je takový, že $f(e) = 1$. Protože $C - x$ je okolím 0, množina $C - x$ je pohlcující, a tedy existuje $t > 0$ takové, že $te \in C - x$. Ale $f(x + te) = f(x) + t f(e) = \alpha + t > \alpha$, což je spor.
- Je-li C uzavřená konvexní podmnožina topologického vektorového prostoru, která má neprázdný vnitřek, pak ∂C je extremální podmnožinou C (je-li neprázdná). Vskutku, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že prostor je reálný. Pro každý bod $x \in \partial C$ existuje podle oddělovací věty (Věta 6.68(a)) a Tvrzení 6.12(e) opěrná nadrovina C v bodě x (vizte též důkaz Věty 5). Tedy (i díky druhé části předchozího bodu) $\partial C = \bigcup \{C \cap W;\ W \text{ je opěrná nadrovina } C\}$ a můžeme použít předchozí bod.

DEFINICE 13. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že funkce $f\colon C \to \mathbb{R}$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in C$ a $\lambda \in [0,1]$ platí, že $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

LEMMA 14. *Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru, $f\colon C \to \mathbb{R}$ je konvexní a E je extremální podmnožina C. Pak množina bodů, ve kterých f nabývá maxima na E, je buďto prázdná, nebo je to extremální podmnožina C.*

DŮKAZ. Označme $F = \{x \in E;\ f(x) = \max_E f\}$ a předpokládejme, že je neprázdná. Dále označme $M = \max_E f$. Nechť $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0,1)$. Pak dle předpokladu $x, y \in E$, čili $f(x) \le M$ a $f(y) \le M$. Pokud x nebo y neleží v F, pak $f(x) < M$ nebo $f(y) < M$, takže $M = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) < M$, což je spor. Tedy F je extremální podmnožina C.
□

Připomeňme, že systém množin se nazývá centrovaný, pokud každý jeho konečný podsystém má neprázdný průnik, a že centrovaný systém uzavřených podmnožin kompaktního prostoru má neprázdný průnik.

LEMMA 15. *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a nechť $C \subset X$ je konvexní. Pak každá kompaktní extremální podmnožina C obsahuje extremální bod C.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný. Uvědomme si, že X je Hausdorffův, neboť podle předpokladu je (X, w) Hausdorffův. Nechť $E \subset C$ je kompaktní extremální podmnožina C. Položme

$$\mathcal{K} = \{K \subset E;\ K \text{ je kompaktní extremální podmnožina } C\}.$$

Pak $(\mathcal{K}, \supset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje E). Je-li $\mathcal{R}$ řetězec v $\mathcal{K}$, pak $\bigcap_{K \in \mathcal{R}} K$ je kompaktní extremální podmnožina C (je neprázdná, neboť $\mathcal{R}$ je centrovaný a $K \in \mathcal{K}$ jsou uzavřené díky Hausdorffovosti X), která je zjevně horní závorou $\mathcal{R}$. Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $F \in \mathcal{K}$. Tvrdíme, že F je jednobodová množina (a tedy je to extremální bod C). Jsou-li $x, y \in F$, $x \neq y$, pak dle předpokladu existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) < f(y)$. Protože F je kompaktní, nabývá f na F maxima, takže dle Lemmatu 14 je $H = \{z \in F\colon f(z) = \max_F f\}$ extremální podmnožina C. Dále je H zjevně uzavřená podmnožina F, takže je kompaktní. Protože $x \notin H$, je $F \supsetneq H$, což je spor s maximalitou F.
□

Připomeňme, že reálná funkce f na topologickém prostoru X se nazývá shora polospojitá, pokud pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X;\ f(x) \ge \alpha\}$ uzavřená.

VĚTA 16 (Bauerův princip maxima[2]). *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor), nechť $K \subset X$ je neprázdná kompaktní konvexní množina a $f\colon K \to \mathbb{R}$ je shora polospojitá konvexní funkce. Pak f nabývá maxima na K v extremálním bodě K.*

DŮKAZ. Označme $M = \{x \in K;\ f(x) = \max_K f\}$. Podle Tvrzení 15.62 je M neprázdná, takže podle Lemmatu 14 je M extremální podmnožina K. Dále je M zjevně uzavřená podmnožina K, a tedy je kompaktní. Podle Lemmatu 15 obsahuje M extremální bod K.
□

VĚTA 17 (Krejnova-Milmanova[3]). *Nechť X je topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X (např. Hausdorffův lokálně konvexní prostor) a nechť $K \subset X$ je kompaktní a konvexní. Pak $K = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$.*

[2]Heinz Bauer (1958)

[3]Větu dokázal Griffith Baley Price (1937) pro normově kompaktní množiny ve striktně konvexních prostorech, Marko Grigorovič Krejn (Марко Григорович Крейн) a David Pinchusovič Milman (Давид Пинхусович Мильман) (1940) a nezávisle Kósaku Yosida (吉田 耕作) a Masanori Fukamiya (深宮 政範) (1941) pro w^*-kompaktní množiny v duálu Banachova prostoru, a konečně John Leroy Kelley (1951) pro topologické vektorové prostory.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný a K je neprázdná. Uvědomme si, že X je Hausdorffův, neboť podle předpokladu je (X, w) Hausdorffův. Dle Lemmatu 15 je množina $\operatorname{ext} K$ neprázdná. Zřejmě $\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K \subset K$ (K je uzavřená díky Hausdorffovosti X) a je to konvexní kompaktní množina. Předpokládejme, že existuje $x \in K \setminus \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$. Podle předpokladu je (X, w) Hausdorffův, takže $\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$ je kompaktní (a tedy uzavřená) i ve slabé topologii. Dle oddělovací věty použité v lokálně konvexním prostoru (X, w) (Věta 6.68(b)) a Důsledku 6.87(a) existuje $f \in (X, w)^* = X^*$ takový, že $f(x) > \sup_{\overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K} f$. To je ovšem spor s Bauerovým principem maxima (Věta 16).

□

PŘÍKLAD 18 (Stefan Straszewicz (1935)). Množina $\operatorname{ext} K$ nemusí být uzavřená ani v $\mathbb{R}^3$: Položme $A = \{(x, y, 0);\ (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$. Pak $\operatorname{ext} \operatorname{conv} A = A \setminus \{(0,0,0)\}$.

◇

2. Svazy vektorových topologií

Připomeňme, že systém $\mathcal{T}$ všech topologií na nějaké množině uspořádaný inkluzí tvoří úplný svaz: libovolný podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ má supremum a infimum, tj. nejmenší horní závoru a největší dolní závoru; platí, že $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ a $\bigcup \mathcal{A}$ tvoří subbázi topologie $\sup \mathcal{A}$. Je-li některá z topologií v $\mathcal{A}$ Hausdorffova, pak $\sup \mathcal{A}$ je zjevně Hausdorffova, na druhou stranu $\inf \mathcal{A}$ nemusí být Hausdorffova ani pokud jsou všechny topologie v $\mathcal{A}$ Hausdorffovy (a ani pro dvouprvkovou $\mathcal{A}$, vizte Příklad 15.37).

Uvědomme si, že chceme-li dokázat, že částečně uspořádaná množina M je úplný svaz, stačí ukázat, že každá podmnožina M má supremum (ekvivalentně každá neprázdná podmnožina M má supremum a M má nejmenší prvek). Pak totiž $\inf A = \sup\{x \in M;\ x \text{ je dolní závora } A\}$.

Pokud bude třeba zdůraznit, že supremum, resp. infimum se bere v částečně uspořádané množině M, budeme používat značení $\sup_M$, resp $\inf_M$.

TVRZENÍ 19. *Nechť X je vektorový prostor. Označme $\mathcal{T}$ systém všech topologií na X a $\mathcal{V}$ systém všech vektorových topologií na X uspořádané inkluzí. Je-li $\mathcal{A}$ nějaký systém vektorových topologií na X, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je vektorová topologie, tj. $\sup_{\mathcal{V}} \mathcal{A} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. Systém $\mathcal{V}$ je tedy úplný svaz.*

Dále je-li $\mathcal{A}$ neprázdný a pro každé $\sigma \in \mathcal{A}$ je dána nějaká báze $\mathcal{U}_\sigma$ okolí 0 v topologii σ tvořená vyváženými množinami, pak $\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} \mathcal{U}_\sigma$ je subbází okolí 0 v topologii $\sup_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$. Bázi okolí 0 pro topologii $\inf_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$ pak tvoří systém všech množin $U_1 \subset X$ takových, že existuje posloupnost neprázdných vyvážených množin $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených ve všech topologiích $\sigma \in \mathcal{A}$ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{A}$ prázdný, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je indiskrétní topologie, která je zřejmě vektorová. Předpokládejme tedy, že $\mathcal{A}$ je neprázdný. Není příliš obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ je $\{x + U;\ U \in \mathcal{S}\}$ subbází filtru okolí x v topologii $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 generovaná subbází $\mathcal{S}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 6.8, odkud plyne, že $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je vektorová topologie. (ii) plyne z toho, že průnik konečně mnoha pohlcujících množin je pohlcující, (iii) plyne z toho, že libovolný průnik vyvážených množin je vyvážený. Pro důkaz (i) zvolme $U \in \mathcal{U}$. Pak $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$, kde $U_j \in \mathcal{U}_{\sigma_j}$. Existují tedy $V_j \in \mathcal{U}_{\sigma_j}$ takové, že $V_j + V_j \subset U_j$. Položíme-li $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$, pak $V \in \mathcal{U}$. Jsou-li nyní $x, y \in V$, pak $x + y \in V_j + V_j \subset U_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $x + y \in U$. To znamená, že $V + V \subset U$.

Nechť dále $\mathcal{B}$ je systém všech množin $U_1 \subset X$ takových, že existuje posloupnost neprázdných vyvážených množin $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených ve všech topologiích $\sigma \in \mathcal{A}$ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každou $U_1 \in \mathcal{B}$ je zjevně příslušná U_2 též prvkem $\mathcal{B}$ a snadno nahlédneme, že $\mathcal{B}$ je báze filtru ($\mathcal{B}$ je neprázdný, neboť $X \in \mathcal{B}$), takže dle Věty 6.8 je $\mathcal{B}$ báze okolí 0 pro nějakou vektorovou topologii τ na X. Zjevně je $\tau \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Na druhou stranu, nechť ρ je vektorová topologie na X taková, že $\rho \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Je-li U_1 otevřené vyvážené okolí 0 v ρ, pak existuje posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených vyvážených okolí 0 v ρ taková, že $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou ovšem U_n otevřené v každé topologii $\sigma \in \mathcal{A}$, takže $U_1 \in \mathcal{B}$. Odtud plyne, že $\rho \subset \tau$, takže $\tau = \inf_{\mathcal{V}} \mathcal{A}$.

□

TVRZENÍ 20. *Nechť X je vektorový prostor. Označme $\mathcal{T}$ systém všech topologií na X a $\mathcal{C}$ systém všech lokálně konvexních topologií na X uspořádané inkluzí. Je-li $\mathcal{A}$ nějaký systém lokálně konvexních topologií na X, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je lokálně konvexní topologie, tj. $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$. Systém $\mathcal{C}$ je tedy úplný svaz.*

Dále je-li každá $\sigma \in \mathcal{A}$ generovaná nějakým systémem pseudonorem $\mathcal{P}_\sigma$, pak topologie $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ je generovaná systémem pseudonorem $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$. Topologie $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ je pak generovaná systémem všech pseudonorem na X, které jsou spojité ve všech topologiích z $\mathcal{A}$.

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{A}$ prázdný, pak $\sup_{\mathcal{T}} \mathcal{A}$ je indiskrétní topologie, která je zřejmě lokálně konvexní. Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný, pak stačí použít Tvrzení 19 na báze $\mathcal{U}_\sigma$ tvořené absolutně konvexními množinami.

Označme τ topologii generovanou systémem pseudonorem $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$. Pak zjevně $\sigma \subset \tau$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$. Na druhou stranu, nechť ρ je lokálně konvexní topologie na X taková, že $\sigma \subset \rho$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{R}$ je systém pseudonorem generující ρ. Je-li $p \in \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} \mathcal{P}_\sigma$, pak p je spojitá v nějaké $\sigma \in \mathcal{A}$, a tedy i v ρ. Proto je $U_{p,\varepsilon} \in \rho(0)$ pro každé $\varepsilon > 0$. Odtud plyne, že $\tau \subset \rho$. To znamená, že $\tau = \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$.

Označme nyní $\mathcal{P}$ systém všech pseudonorem na X, které jsou spojité ve všech topologiích z $\mathcal{A}$. Pak $\mathcal{P}$ je neprázdný, neboť $0 \in \mathcal{P}$. Dále označme τ lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem $\mathcal{P}$. Pak $\tau \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$, neboť $U_{p,\varepsilon} \in \sigma(0)$ pro každé $p \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$. Na druhou stranu, nechť ρ je lokálně konvexní topologie na X taková, že $\rho \subset \sigma$ pro každou $\sigma \in \mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{R}$ je systém pseudonorem generující ρ. Pak $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ (Věta 6.58(a)), a tedy $\rho \subset \tau$. To znamená, že $\tau = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$.

□

Všimněme si, že $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \inf_{\mathcal{T}} \mathcal{C}$ je indiskrétní topologie. Snadno je vidět, že v této topologii jsou jediná spojitá pseudonorma na X a jediný spojitý lineární funkcionál na X nulové. Dále topologie $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \sup_{\mathcal{T}} \mathcal{C}$ je nejsilnější možná lokálně konvexní topologie na X. Tato topologie je zjevně generována systémem všech pseudonorem na X a její bázi okolí 0 tvoří všechny absolutně konvexní pohlcující podmnožiny X. (Je-li U absolutně konvexní a pohlcující, pak $\frac{1}{2}U$ je též absolutně konvexní a pohlcující a $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U$. Tedy lze aplikovat Větu 6.8.) Každá lineární forma na X je v této topologii spojitá, tj. $X^* = X^\#$.

Dále připomeňme, že je-li X konečněrozměrný vektorový prostor, pak na X existuje jen jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie (a je to topologie generovaná eukleidovskou normou) (Důsledek 6.41).

PŘÍKLAD 21. Nechť X je nekonečněrozměrný vektorový prostor. Položme

$$\mathcal{A} = \{\sigma(X, M);\ M \subset X^\# \text{ odděluje body } X\}.$$

Pak všechny topologie v $\mathcal{A}$ jsou Hausdorffovy (Tvrzení 6.83), ale $\inf \mathcal{A}$ (ve svazu lokálně konvexních topologií) je indiskrétní topologie.

Vskutku, předpokládejme, že p je nenulová pseudonorma na X. Pak existuje posloupnost $\{x_n\}$ lineárně nezávislých vektorů v X taková, že $p(x_n) \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: Dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(b)) existuje nenulová $f \in X^\#$ taková, že $|f| \leq p$. Protože X je nekonečněrozměrný, $\operatorname{Ker} f$ je též nekonečněrozměrný (Lemma 1.123), takže existuje posloupnost $\{y_n\} \subset \operatorname{Ker} f$ lineárně nezávislých vektorů. Nechť $x \in X$ je takový, že $f(x) = 1$. Položme $x_n = y_n + x$. Vektory $x, y_1, y_2, \ldots$ jsou lineárně nezávislé, takže i posloupnost $\{x_n\}$ je lineárně nezávislá. Konečně, $p(x_n) \geq |f(x_n)| = |f(x)| = 1$.

Doplňme $\{x_n\}$ na bázi B prostoru X. Pro každé $v \in B$ definujme lineární formu f_v na X pomocí hodnot na bázi jako $f_v(u) = \delta_{u,v}$ (Kroneckerovo delta) pro $u \in B$. Pak $M = \{f_v;\ v \in B\}$ odděluje body X, neboť je-li $x \in X \setminus \{0\}$, pak $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde $v_i \in B$ a $\alpha_i \neq 0$, takže $f_{v_1}(x) = \alpha_1 \neq 0$. Nicméně p není spojitá v $\sigma(X, M)$, a tedy ani v $\inf \mathcal{A}$, neboť $x_n \to 0$ v $\sigma(X, M)$ (pro každé $v \in B$ je $f_v(x_n) \neq 0$ nejvýše pro jeden index n), ale $p(x_n) \not\to 0$.

◇

LEMMA 22. *Nechť X je vektorový prostor a $U_1, U_2 \subset X$ jsou pohlcující absolutně konvexní množiny. Je-li f lineární funkcionál na X, pro který $|f| \leq 1$ na $U_1 \cap U_2$, pak existují $f_1, f_2 \in X^\#$ takové, že $|f_1| \leq 1$ na U_1, $|f_2| \leq 1$ na U_2 a $f = f_1 + f_2$.*

DŮKAZ. Na vektorovém prostoru $X \times X$ definujme funkci $p(x, y) = \max\{\mu_{U_1}(x), \mu_{U_2}(y)\}$. S pomocí Věty 6.49(d) snadno ověříme, že p je pseudonorma. Dále označme $Y = \{(x, x);\ x \in X\}$. Pak Y je podprostor $X \times X$ a předpis $g(x, x) = f(x)$ definuje lineární funkcionál g na Y. Protože $|f| \leq 1$ na

$U_1 \cap U_2$, plyne z Věty 6.49(g), že $|f| \leq \mu_{U_1 \cap U_2}$. Tedy $|g(x,x)| = |f(x)| \leq \mu_{U_1 \cap U_2}(x) \leq p(x,x)$ pro každé $x \in X$, přičemž poslední nerovnost plyne z toho, že $q = \max\{\mu_{U_1}, \mu_{U_2}\}$ je nezáporně homogenní, $\{x \in X;\ q(x) < 1\} = \{x \in X;\ \mu_{U_1}(x) < 1, \mu_{U_2}(x) < 1\} \subset U_1 \cap U_2$ a z Věty 6.49(g). Je tedy $|g| \leq p$ na Y a z Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(b)) plyne existence lineárního funkcionálu G na $X \times X$ rozšiřujícího g, pro který je $|G| \leq p$. Položíme-li $f_1(x) = G(x,0)$ a $f_2(x) = G(0,x)$, pak zjevně $f_1, f_2 \in X^\#$, $|f_1(x)| \leq p(x,0) = \mu_{U_1}(x) \leq 1$ pro $x \in U_1$, $|f_2(x)| \leq p(0,x) = \mu_{U_2}(x) \leq 1$ pro $x \in U_2$ a $f_1(x) + f_2(x) = G(x,x) = g(x,x) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

TVRZENÍ 23. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{A}$ je libovolný neprázdný podsystém svazu lokálně konvexních topologií na X. Pak $(X, \inf \mathcal{A})^* = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^*$ a $(X, \sup \mathcal{A})^* = \operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^*$.*

DŮKAZ. Inkluze $(X, \inf \mathcal{A})^* \subset \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^*$ je zjevná. Na druhou stranu, je-li $f \in \bigcap_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^*$, pak pseudonorma $|f|$ je spojitá ve všech topologiích z $\mathcal{A}$, takže je spojitá i v $\inf \mathcal{A}$ (Tvrzení 20). Funkcionál f je tedy spojitý v $\inf \mathcal{A}$, neboť je omezený na $U_{|f|,1}$.

Dále inkluze $\operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^* \subset (X, \sup \mathcal{A})^*$ je zjevná. Na druhou stranu, je-li $f \in (X, \sup \mathcal{A})^*$, pak $U_{|f|,1}$ je okolí 0 v topologii $\sup \mathcal{A}$, takže dle Tvrzení 20 je $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U_{|f|,1}$ pro nějaké pseudonormy $p_1, \dots, p_n$ a $\varepsilon > 0$, přičemž p_i je spojitá v $\sigma_i \in \mathcal{A}$. Podle Lemmatu 22 existují $f_1, \dots, f_n \in X^\#$ takové, že $f = f_1 + \cdots + f_n$ a $|f_i| \leq 1$ na $U_{p_i,\varepsilon}$, $i = 1, \dots, n$. Funkcionál f_i je tedy omezený na okolí 0 v topologii σ_i, neboli je spojitý v σ_i. To znamená, že $f \in \operatorname{span} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} (X,\sigma)^*$.

□

FAKT 24. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ je neprázdná. Pak $\sigma(X, M)$ je nejslabší topologie ve svazu všech topologií na X taková, že všechny funkce z M jsou v ní spojité.*

DŮKAZ. Označme $\sigma = \sigma(X, M)$. Každá z funkcí v M je σ-spojitá (Věta 6.84). Na druhou stranu, je-li τ taková topologie na X, že všechny funkce z M jsou v ní spojité, pak pro každé $x \in X$, $f \in M$ a $\varepsilon > 0$ je $x + U_{f,\varepsilon} = f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \in \tau(x)$. Odtud plyne, že $\sigma(x) \subset \tau(x)$ pro každé $x \in X$, a tedy $\sigma \subset \tau$.

□

DEFINICE 25. Nechť X je vektorový prostor, M je podprostor $X^\#$ a $\mathcal{A}$ je systém všech lokálně konvexních topologií τ na X takových, že $(X, \tau)^* = M$. Topologie $\mu(X, M) = \sup \mathcal{A}$ se nazývá Mackeyova topologie.

Dle Tvrzení 20 je $\mu(X, M)$ lokálně konvexní.

VĚTA 26 (G. W. Mackey (1946)). *Nechť X je vektorový prostor a M je podprostor $X^\#$. Pak $(X, \mu(X, M))^* = M$. Tedy pro lokálně konvexní topologii τ na X platí, že $(X, \tau)^* = M$, právě když $\sigma(X, M) \subset \tau \subset \mu(X, M)$.*

DŮKAZ. Věta plyne ihned z Tvrzení 23 a Faktu 24.

□

VĚTA 27 (G. W. Mackey (1946)). *Nechť τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na vektorovém prostoru X takové, že $(X, \tau_1)^* = (X, \tau_2)^*$. Pak (X, τ_1) a (X, τ_2) mají stejné omezené množiny.*

DŮKAZ. Označme $X^* = (X, \tau_1)^*$. Zjevně stačí ukázat, že (X, τ_1) a $(X, \sigma(X, X^*))$ mají stejné omezené množiny. To ale plyne z Věty 6.94.

□

DŮSLEDEK 28. *Nechť (X, τ) je pseudometrizovatelný lokálně konvexní prostor. Pak $\mu(X, X^*) = \tau$.*

DŮKAZ. Z definice plyne, že $\tau \subset \mu(X, X^*)$. Na druhou stranu, podle Vět 6.33, 26 a 27 je $Id\colon (X, \tau) \to (X, \mu(X, X^*))$ spojitá, neboli $\mu(X, X^*) \subset \tau$.

□

Z předchozího důsledku speciálně plyne, že pokud X je normovaný lineární prostor, pak $\mu(X, X^*)$ je normová topologie na X.

Stejně jako v důkazu Věty 27 z Věty 6.93(b) plyne následující:

VĚTA 29. *Nechť τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na vektorovém prostoru X takové, že $(X,\tau_1)^* = (X,\tau_2)^*$. Pak (X,τ_1) a (X,τ_2) mají stejné konvexní uzavřené množiny.*

■■■[kanonické zobrazení ε je definováno jen pro TVS]

VĚTA 30 (Richard Friederich Arens (1947)). *Nechť X je vektorový prostor a M je podprostor $X^\#$. Pak Mackeyova topologie $\mu(X,M)$ je generována systémem pseudonorem*

$$\big\{p_K;\ K \subset M \text{ je } \sigma(M,\varepsilon(X))\text{-kompaktní absolutně konvexní}\big\},$$

kde $p_K(x) = \sup_{f\in K}|f(x)|$ pro $x \in X$.

DŮKAZ. Označme τ topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_K\}$ a $\mu = \mu(X,M)$. Ukážeme nejprve, že $\mu \subset \tau$. Existuje báze $\mu(0)$ tvořená uzavřenými absolutně konvexními množinami (Důsledek 6.57). Nechť tedy $V \in \mu(0)$ je μ-uzavřená absolutně konvexní. Množina $V^\circ \subset M$ je absolutně konvexní (Tvrzení 6.109(a)) a $\sigma(M,\varepsilon(X))$-kompaktní (Věta 6.115). To znamená, že $U_{p_{V^\circ},1} \in \tau(0)$. Podle věty o bipoláře (Věta 6.110) je $V = (V^\circ)_\circ = \{x \in X;\ \sup_{f\in V^\circ}|f(x)| \le 1\} = \{x \in X;\ p_{V^\circ}(x) \le 1\} \supset U_{p_{V^\circ},1}$, takže $V \in \tau(0)$.

Pro opačnou inkluzi stačí ukázat, že $(X,\tau)^* = M$ a použít Větu 26. Podle předchozího odstavce již víme, že $\mu \subset \tau$, a tedy $M = (X,\mu)^* \subset (X,\tau)^*$. Na druhou stranu, nechť $f \in (X,\tau)^*$. Pak existují $\delta > 0$ a $\sigma(M,\varepsilon(X))$-kompaktní absolutně konvexní množiny $K_1,\dots,K_n \subset M$ takové, že $|f| \le 1$ na $U_{p_{K_1},\dots,p_{K_n},\delta}$. Podle Lemmatu 22 existují $f_1,\dots,f_n \in X^\#$ takové, že $f = f_1 + \dots + f_n$ a $|f_i| \le 1$ na $U_{p_{K_i},\delta}$ pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$. Dle Faktu 6.47 je $U_{p_{K_i},\delta} = \frac{\delta}{2}U_{p_{K_i},2} \supset \frac{\delta}{2}(K_i)_\circ$, takže díky Tvrzení 6.109(d) a větě o bipoláře (použité např. v prostoru (X,μ); Věta 6.110) je $f_i \in (U_{p_{K_i},\delta})^\circ \subset \big(\frac{\delta}{2}(K_i)_\circ\big)^\circ = \frac{2}{\delta}((K_i)_\circ)^\circ = \frac{2}{\delta}K_i \subset M$. Odtud plyne, že $f \in M$.

□

3. Topologie w_b^*

DEFINICE 31. Nechť X je normovaný lineární prostor. Definujme

$$w_b^* = \{G \subset X^*;\ \text{pro každou omezenou } B \subset X^* \text{ je } G \cap B \text{ relativně } w^*\text{-otevřená v } B\}.$$

Vzhledem k tomu, že $w^* \restriction_B$ je topologie na B, je ihned vidět, že w_b^* je topologie na X^*. Též je zřejmé, že $w^* \subset w_b^*$.

FAKT 32. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) $G \subset X^*$ je w_b^*-otevřená, právě když existuje posloupnost $\{r_n\} \subset (0,+\infty)$, $r_n \to +\infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $G \cap B(0,r_n)$ relativně w^*-otevřená v $B(0,r_n)$.

(b) $F \subset X^*$ je w_b^*-uzavřená, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $F \cap B$ relativně w^*-uzavřená v B, a právě když existuje posloupnost $\{r_n\} \subset (0,+\infty)$, $r_n \to +\infty$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $F \cap B(0,r_n)$ w^*-uzavřená.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ je triviální. $\Leftarrow$ Nechť $B \subset X^*$ je omezená a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $B \subset B(0,r_n)$. Podle předpokladu existuje $U \in w^*$ taková, že $G \cap B(0,r_n) = U \cap B(0,r_n)$. Tedy $G \cap B = (G \cap B(0,r_n)) \cap B = (U \cap B(0,r_n)) \cap B = U \cap B$, takže $G \cap B$ je relativně w^*-otevřená v B.

(b) F je w_b^*-uzavřená, právě když $X^* \setminus F \in w_b^*$, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $(X^* \setminus F) \cap B$ relativně w^*-otevřená v B, právě když pro každou omezenou $B \subset X^*$ je $B \setminus ((X^* \setminus F) \cap B) = F \cap B$ relativně w^*-uzavřená v B. Druhá část se dokáže stejně jako (a), navíc použijeme fakt, že $B_{X^*}(0,r_n)$ jsou w^*-uzavřené (například z Tvrzení 6.109(a)).

□

LEMMA 33 (S. Banach (1929, 1932), J. Dieudonné (1950)). *Nechť X je topologický vektorový prostor, $F \subset X$ je uzavřená, $C \subset X$ je slabě uzavřená absolutně konvexní a $U \subset X$ je otevřené okolí $F \cap C$. Pak pro každou kompaktní $K \subset X$ existuje konečná $M \subset C^\circ$ taková, že $F \cap K \cap M_\circ \subset U$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že pro nějakou kompaktní $K \subset X$ tvrzení neplatí. Pak pro každou konečnou $M \subset C^\circ$ je množina $K_M = F \cap K \cap M_\circ \cap (X \setminus U)$ neprázdná. Množina $M_\circ$ je uzavřená (Tvrzení 6.109(a)), množina K_M je tedy relativně uzavřená podmnožina kompaktu K. Označme $\mathcal{M}$ systém všech konečných podmnožin C°. Podle věty o bipoláře (Věta 6.110) a Tvrzení 6.109(e) je $C = (C^\circ)_\circ = \left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right)_\circ = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M_\circ$. Podobně, systém $\{K_M;\ M \in \mathcal{M}\}$ je centrovaný, neboť jsou-li $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{i=1}^n K_{M_i} = K_M$ pro $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$. Odtud plyne, že $\emptyset \neq \bigcap_{M \in \mathcal{M}} K_M = F \cap K \cap (X \setminus U) \cap \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M_\circ = F \cap K \cap (X \setminus U) \cap C$, což je spor.

□

VĚTA 34 (J. Dieudonné (1950)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak w_{b}^* je lokálně konvexní topologie na X^* generovaná systémem pseudonorem*

$$\left\{p_{\{x_n\}};\ \{x_n\} \subset X \text{ je posloupnost konvergující k } 0\right\},$$

kde $p_{\{x_n\}}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)|$ pro $f \in X^*$.

DŮKAZ. Ukážeme nejprve, že w_{b}^* je translačně invariantní, tj. pro každou $G \in w_{\mathrm{b}}^*$ a $f \in X^*$ je $f + G \in w_{\mathrm{b}}^*$. Odtud ihned plyne, že $w_{\mathrm{b}}^*(f) = f + w_{\mathrm{b}}^*(0)$ pro každé $f \in X^*$. Nechť tedy $G \in w_{\mathrm{b}}^*$ a $f \in X^*$. Je-li $B \subset X^*$ omezená, pak $B - f$ je též omezená, takže existuje $U \in w^*$ taková, že $G \cap (B - f) = U \cap (B - f)$. To znamená že $(f + G) \cap B = f + (G \cap (B - f)) = f + (U \cap (B - f)) = (f + U) \cap B$ je relativně w^*-otevřená v B.

Označme $\mathcal{A}$ systém všech posloupností v X konvergujících k 0. Nyní stačí ukázat, že systém $\{U_{p_s,\varepsilon};\ s \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi $w_{\mathrm{b}}^*(0)$ (ve skutečnosti dokonce $\{U_{p_s,1};\ s \in \mathcal{A}\}$ tvoří bázi $w_{\mathrm{b}}^*(0)$). Nechť $\{x_n\} \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Je-li $r > 0$, pak množina $F = \{n \in \mathbb{N};\ \|x_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2r}\}$ je konečná a $|f(x_n)| \leq r\|x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pro $f \in B_{X^*}(0, r)$ a $n \in \mathbb{N} \setminus F$. Tudíž $U_{p_{\{x_n\}},\varepsilon} \cap B_{X^*}(0, r) = \{f \in B_{X^*}(0, r) \colon |f(x_n)| < \varepsilon \text{ pro } n \in F\}$, což je množina relativně w^*-otevřená v $B_{X^*}(0, r)$. Odtud plyne, že $U_{p_{\{x_n\}},\varepsilon} \in w_{\mathrm{b}}^*(0)$.

Na druhou stranu, nechť $V \subset X$ je w_{b}^*-otevřené okolí 0. Indukcí zkonstruujeme posloupnost konečných množin $\{M_n\}$ v X takových, že $M_n \subset B_X(0, \frac{1}{n-1})$ pro $n \geq 2$ a $\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0, n) \subset V$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme k dispozici množiny $M_1, \dots, M_{n-1}$. Nechť $U \in w^*$ je taková, že $V \cap B_{X^*}(0, n) = U \cap B_{X^*}(0, n)$. Nyní použijeme Lemma 33 na prostor (X^*, w^*), $F = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right)^\circ$, $C = B_{X^*}(0, n-1)$, U a $K = B_{X^*}(0, n)$. Předpoklady jsou splněny: F je uzavřená dle Tvrzení 6.109(a), dále slabá topologie na (X^*, w^*) je opět w^* (Poznámka 6.90), takže C je slabě uzavřená díky Důsledku 6.116 a Hausdorffovosti w^*, $F \cap C \subset V \cap B_{X^*}(0, n) \subset U$ dle indukčního předpokladu a K je kompaktní dle Důsledku 6.116. Existuje tedy konečná $M_n \subset C^\circ$ taková, že $F \cap (M_n)_\circ \cap K \subset U$. Ztotožníme-li, jak je zvykem, $\varepsilon(X)$ a X, pak $M_n \subset C_\circ = B_X(0, \frac{1}{n-1})$ (poslední rovnost platí pro $n \geq 2$ dle Tvrzení 6.109(d)) a z $(M_n)_\circ$ se stane $(M_n)^\circ$. S pomocí Tvrzení 6.109(e) tak dostáváme, že $\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0, n) = F \cap (M_n)^\circ \cap B_{X^*}(0, n) \subset U \cap B_{X^*}(0, n) \subset V$.

Seřaďme nyní prvky spočetné množiny $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ do libovolné prosté posloupnosti $\{x_n\}$, přičemž je-li tato posloupnost konečná, pak ji doplníme nulami na nekonečnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{n \in \mathbb{N};\ \|x_n\| \geq \varepsilon\}$ konečná, takže $x_n \to 0$. Konečně, $U_{p_{\{x_n\}},1} \subset M^\circ \subset V$, neboť je-li $f \in M^\circ$, pak pro $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f\| \leq n$, je $f \in M^\circ \cap B_{X^*}(0, n) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)^\circ \cap B_{X^*}(0, n) \subset V$.

□

VĚTA 35. *Nechť X je Banachův prostor. Pak $(X^*, w_{\mathrm{b}}^*)^* = \varepsilon(X)$, kde $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je kanonické vnoření.*

DŮKAZ. Označíme-li p_A pseudonormu na X^* danou vzorcem $p_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$ pro neprázdnou omezenou $A \subset X$, pak pro každé $f \in X^*$ díky linearitě a spojitosti f snadno obdržíme, že $p_{\overline{\mathrm{aconv}}\, A}(f) = p_{\mathrm{aconv}\, A}(f) = p_A(f)$. Je-li nyní $\{x_n\}$ posloupnost v X konvergující k 0, pak množina $\{x_n\} \cup \{0\}$ je kompaktní, tudíž $K = \overline{\mathrm{aconv}}\{x_n\} = \overline{\mathrm{aconv}}(\{x_n\} \cup \{0\})$ je absolutně konvexní a kompaktní (Tvrzení 9), a tedy i $\sigma(X, X^*)$-kompaktní. Protože $p_{\{x_n\}} = p_K$, podle Vět 34 a 30 je $w_{\mathrm{b}}^* \subset \mu(X^*, \varepsilon(X))$. Na druhou stranu, $\sigma(X^*, \varepsilon(X)) = w^* \subset w_{\mathrm{b}}^*$, a tedy podle Mackeyovy věty (Věta 26) je $(X^*, w_{\mathrm{b}}^*)^* = \varepsilon(X)$.

□

DŮSLEDEK 36 (M. G. Krejn a V. L. Šmuljan (1940)). *Nechť X je Banachův prostor a $C \subset X^*$ je konvexní. Pak C je w^*-uzavřená, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $C \cap B(0,n)$ w^*-uzavřená.*

DŮKAZ. Podle Věty 35 je $(X^*, w^*_b)^* = \varepsilon(X) = (X^*, w^*)^*$, takže můžeme aplikovat Větu 29 a Fakt 32(b). □

PŘÍKLAD 37. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_2 a položme $A = \left\{\sqrt{n}e_n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \ell_2$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $A \cap B(0,n)$ konečná, a tedy w^*-uzavřená. Nicméně dle Příkladu 6.102 je $0 \in \overline{A}^w$, takže A není slabě uzavřená, a protože ℓ_2 je reflexivní, je $w^* = w$ (Tvrzení 6.89), takže A není w^*-uzavřená. Předpoklad konvexity ve Větě 36 je tedy podstatný. ◇

DŮSLEDEK 38. *Nechť X je Banachův prostor a $F \in (X^*)^\#$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) F je w^*-spojitý.
(ii) $F\restriction_{B_{X^*}}$ je w^*-spojitá.
(iii) $\operatorname{Ker} F \cap B_{X^*}$ je w^*-uzavřená.

DŮKAZ. (i)⇒(ii)⇒(iii) jsou triviální.

(iii)⇒(i) Díky tomu, že $\operatorname{Ker} F$ je podprostor X^*, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\operatorname{Ker} F \cap B_{X^*}(0,n) = n(\operatorname{Ker} F \cap B_{X^*})$. Podle Věty 36 je tedy $\operatorname{Ker} F$ w^*-uzavřené. Nyní stačí aplikovat Větu 6.36. □

4. Slabá kompaktnost

V tomto krátkém oddílu se informativně seznámíme s některými hlubšími větami o slabé kompaktnosti.

Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak B_X je slabě kompaktní (Věta 6.120). Protože každý $f \in X^*$ je slabě spojitý (z definice slabé topologie), nabývá $|f|$ na B_X maxima, a tedy f nabývá na B_X své normy. Slavná Jamesova věta pak říká, že platí i opačná implikace:

VĚTA 39 (Robert Clarke James (1964)[4]). *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každý funkcionál z X^* nabývá na B_X své normy.*

Ve skutečnosti platí dokonce obecnější verze:

VĚTA 40 (R. C. James (1964)). *Nechť X je reálný Banachův prostor a $K \subset X$ je slabě uzavřená. Pak K je slabě kompaktní, právě když každý funkcionál z X^* nabývá na K maxima.*

Následující větu srovnejme s Důsledkem 8 a Tvrzením 9.

VĚTA 41. [5] *Nechť X je Banachův prostor a $K \subset X$ je slabě kompaktní. Pak jsou množiny $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ slabě kompaktní.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že X je reálný. Je-li $f \in X^*$, pak $\sup_K f = \sup_{\overline{\operatorname{conv}}\, K} f$, takže f nabývá maxima na $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ v bodě slabě kompaktní množiny K. Protože $\overline{\operatorname{conv}}\, K$ je slabě uzavřený (Věta 6.93), stačí použít Jamesovu větu (Věta 40).

Pro $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$ je argument podobný: Nechť $y \in K$ je bod maxima funkce $|f|$ na K. Je-li $f(y) \geq 0$, pak položíme $z = y$, jinak vezmeme $z = -y$. Snadno nahlédneme, že pro libovolné $x \in \operatorname{aconv} K$ je $f(x) \leq |f(y)| = f(z)$, přičemž $z \in \operatorname{aconv} K$. Funkcionál f tudíž nabývá maxima na $\operatorname{aconv} K$, a tedy i na $\overline{\operatorname{aconv}}\, K$. □

[4] Separabilní verzi dokázal v roce 1957, obecnou pak v roce 1964.

[5] M. G. Krejn a V. L. Šmuljan (1940) dokázali variantu se sekvenciální kompaktností, odtud lze odvodit verzi s kompaktností pomocí Eberleinovy-Šmuljanovy věty (Věta 42).

Jiný důkaz předchozí věty, který je sice složitější, ale používá jednodušší výsledky, než je Jamesova věta, lze nalézt na straně 328.

Připomeňme, že topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, pokud z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, a topologický prostor se nazývá sekvenciálně kompaktní, pokud z každé posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Dále připomeňme, že topologický prostor je kompaktní, právě když v něm každý usměrněný soubor má konvergentní usměrněný podsoubor. Je známo, že topologický prostor je spočetně kompaktní, právě když v něm každá posloupnost má konvergentní usměrněný podsoubor. Tedy podmnožina A topologického prostoru je

- kompaktní, právě když každý usměrněný soubor v A má konvergentní usměrněný podsoubor s limitou v A,
- spočetně kompaktní, právě když každá posloupnost v A má konvergentní usměrněný podsoubor s limitou v A,
- sekvenciálně kompaktní, právě když každá posloupnost v A má konvergentní podpodposloupnost s limitou v A.

Platí následující vztahy: Kompaktní prostory jsou spočetně kompaktní (to je zřejmé z definice) a podle předchozího jsou sekvenciálně kompaktní prostory také spočetně kompaktní. Žádné jiné vztahy mezi těmito pojmy obecně nejsou. Nicméně platí následující věta, jejímž velmi speciálním případem je Věta 6.121.

VĚTA 42 (William Frederick Eberlein (1947), V. L. Šmuljan (1940)[6]). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $K \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) K je slabě kompaktní.
(ii) K je slabě spočetně kompaktní.
(iii) K je slabě sekvenciálně kompaktní.

Důkaz této věty lze nalézt v oddílu 14.8.

[6]Šmuljan dokázal implikaci (ii)⇒(iii), Eberlein pak implikaci (ii)⇒(i).

Kapitola 15

Dodatek

1. Funkce více proměnných

VĚTA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že funkce $D^\alpha f$ jsou spojité na Ω pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ splňující $|\alpha| \leq k$. Pak $f \in C^k(\Omega)$.*

DŮKAZ. Použijeme indukci dle k. Pro $k = 1$ se jedná přímo o definici prostoru $C^1(\Omega)$. Nechť nyní $k > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro menší řády. Pak z indukčního předpokladu plyne, že $f \in C^{k-1}(\Omega)$. Musíme ukázat, že všechny parciální derivace k-tého řádu funkce f jsou spojité na Ω. Nechť tedy $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. Pro zkrácení zápisu budeme používat následující symboliku: $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ apod. Nalezněme permutaci π množiny $\{1, \dots, k\}$ takovou, že $i_{\pi(1)} \leq i_{\pi(2)} \leq \cdots \leq i_{\pi(k)}$, a uvědomme si, že existuje multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takový, že $\partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f = D^\alpha f$. Rozlišíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $\pi(1) = 1$. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

Nechť nyní $\pi(1) > 1$ a nechť $\sigma : \{1, \dots, k-2\} \to \{2, \dots, k\} \setminus \{\pi(1)\}$ je nějaká bijekce. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_1} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x) \quad \text{a} \tag{1}$$

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) \tag{2}$$

pro každé $x \in \Omega$. Označme $g = \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f$. Pak $g \in C^1(\Omega)$ a díky (1) platí

$$\partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_1} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_1} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce. Podle věty o záměně druhých parciálních derivací (viz např. [Z, Věta 2.87]) tedy platí $\partial_{i_1} \partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_1} g(x) = D^\alpha f(x)$ pro každé $x \in \Omega$. Odtud a s pomocí (2) pak dostaneme

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_1} \partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

$\square$

■■■[potřebujeme větu o lokálně stejnoměrné konvergenci $D^\alpha f_n$ na $\mathbb{R}^n$]

2. Metrické prostory

VĚTA 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z obecné věty o kompaktních metrických prostorech.

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $f : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_2)$ předpisem

$$f(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Snadno je vidět, že f je bijekce. Dále

$$\|(z_1,\dots,z_n)-(y_1,\dots,y_n)\|_2^2 = \|(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |z_i-y_i|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \big((\mathrm{Re}(z_i-y_i))^2 + (\mathrm{Im}(z_i-y_i))^2\big) = \|f(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)\|_2^2 =$$
$$= \|f(z_1,\dots,z_n)-f(y_1,\dots,y_n)\|_2^2,$$

tedy f je izometrické zobrazení. Speciálně f je homeomorfismus, který zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Odtud již tvrzení plyne.

□

VĚTA 3. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f,g\colon P\to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M\subset P$ je hustá v P. Jestliže $f=g$ na M, pak $f=g$ na celém P.*

DŮKAZ. Zvolme $x\in P$. Pak z hustoty M plyne existence posloupnosti $\{x_n\}\subset M$ splňující $x_n\to x$. Tedy $f(x)=\lim f(x_n)=\lim g(x_n)=g(x)$.

□

FAKT 4. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A\subset P$. Pak funkce $x\mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ je stejnoměrně spojitá na P.*

DŮKAZ. Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $x,y\in P$, $\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$. Pak existuje $a\in A$ takové, že $\rho(x,a)<\mathrm{dist}(x,A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\mathrm{dist}(y,A)-\mathrm{dist}(x,A)<\rho(y,a)-\rho(x,a)+\frac{\varepsilon}{2}\le\rho(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Opačnou nerovnost obdržíme snadno záměnou x za y.

□

LEMMA 5. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $K\subset P$ je kompaktní a $K\subset G\subset P$ je otevřená. Pak* $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)>0$.

DŮKAZ. Dle Faktu 4 je funkce $x\mapsto\mathrm{dist}(x,P\setminus G)$ spojitá na P, nabývá tedy na kompaktu K minima, např. v bodě $y\in K$. Pak $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)=\mathrm{dist}(y,P\setminus G)>0$, neboť $P\setminus G$ je uzavřená a $y\notin P\setminus G$.

□

VĚTA 6. *Součin $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1,\dots,X_n$ je též úplný.*

DŮKAZ. Nechť $\rho_1,\dots,\rho_n$ jsou příslušné metriky na $X_1,\dots,X_n$. Označme $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ a připomeňme, že součinová metrika je dána vzorcem $\rho(x,y)=\max_{i=1,\dots,n}\{\rho_i(x(i),y(i))\}$ pro prvky $x,y\in X$, $x=(x(i))_{i=1}^n$, $y=(y(i))_{i=1}^n$. Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$ a $k,l\in\mathbb{N}$ máme $\rho_i(x_k(i),x_l(i))\le\rho(x_k,x_l)$, tedy pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$ je posloupnost $\{x_k(i)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská v X_i. Z úplnosti X_i plyne existence $x(i)\in X_i$ takového, že $\lim_k x_k(i)=x(i)$ v prostoru X_i. Položme $x=(x(1),\dots,x(n))\in X$. Pak zjevně $x_n\to x$ v X.

□

VĚTA 7. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f\colon P\to Q$, $A\subset P$ a $a\in A'$. Pak limita $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existuje, právě když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A\colon \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je téměř zřejmá.

$\Leftarrow$ Protože $a\in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}\subset A\setminus\{a\}$ taková, že $x_n\to a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $\delta>0$ je příslušné δ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ kdykoli $m,n\ge n_0$. Protože prostor Q je úplný, existuje $y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\in Q$. Tvrdíme, že $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=y$:

Zvolme libovolné $\varepsilon>0$. Pak existuje $\delta>0$ takové, že $\sigma(f(u),f(v))<\frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $u,v\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A$. Dále existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$, a $n_1\ge n_0$ takové, že

$\sigma(f(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n \geq n_1$. Tedy $\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$ pro každé $x \in (U(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$.

$\square$

VĚTA 8. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

DŮKAZ. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 7. Můžeme tedy položit $g(a) = f(a)$ pro $a \in M$ a $g(a) = \lim_{x \to a, x \in M} f(x)$ pro $a \in P \setminus M$. Ukážeme, že takto definované zobrazení $g\colon P \to Q$ je stejnoměrně spojité na P: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\rho(u, v) < \delta$. Nechť nyní $x, y \in P$, $\rho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Je-li $x \in M$, položme $x_1 = x$. V opačném případě existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in U(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\rho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\rho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_1) < \delta$. Dohromady tedy máme $\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon$.

Jednoznačnost rozšíření plyne z Věty 3.

$\square$

Následující drobné zobecnění plyne snadno z důkazu Věty 8.

VĚTA 9. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je zobrazení stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách M. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách P.*

POZNÁMKA 10. Není obtížné si rozmyslet, že Tietzeova věta o rozšiřování spojitých funkcí platí i pro funkce s komplexními hodnotami: Nechť X je prostor, ve kterém platí Tietzeova věta (např. metrický prostor), $F \subset X$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak $f = u + iv$, kde u, v jsou spojité reálné funkce na F. Podle Tietzeovy věty tedy existují reálné funkce U, V spojité na X rozšiřující u, resp. v. Položme $h = U + iV$. Pak h je spojitá na X a rozšiřuje f. Na závěr položme $R = \sup_{x \in F} |f(x)|$ a definujme $\varphi\colon \mathbb{C} \to B_{\mathbb{C}}(0, R)$ předpisem $\varphi(z) = z$ pro $|z| \leq R$ a $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ pro $|z| > R$. Pak φ je spojité zobrazení (tzv. spojitá retrakce na $B_{\mathbb{C}}(0, R)$). Funkce $g = \varphi \circ h$ je tedy spojitá na X a snadno je vidět, že g rozšiřuje f a $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq R$.

Často využijeme následující přímý důsledek Baireovy věty:

DŮSLEDEK 11. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že všechny F_n mají prázdný vnitřek. Pak všechny F_n jsou řídké v P, tedy P je první kategorie (v sobě). Podle Baireovy věty je ovšem P druhé kategorie, což je spor.

$\square$

FAKT 12. *Nechť P je separabilní metrický prostor. Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém uzavřených podmnožin P, pak existuje jeho spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Množina $P \setminus \bigcap \mathcal{F}$ má Lindelöfovu vlastnost, takže existuje spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $P \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (P \setminus F) = \bigcup_{F \in \mathcal{S}} (P \setminus F) = P \setminus \bigcap \mathcal{S}$.

$\square$

Připomeňme, že pro funkci $f : P \to \mathbb{K}$ na metrickém prostoru P je nosič f definován jako $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in P;\ f(x) \neq 0\}}$.

LEMMA 13. ■■■*[doplnit hausdorffovost do použití] Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor, $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$, $U \supset F$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Existuje otevřená $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(b) Existuje spojitá funkce $f\colon K \to [0,1]$ splňující $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset U$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro metrický kompaktní prostor K.

(a) Pokud je F prázdná, stačí položit $V = \emptyset$. V případě $U = K$ položíme $V = K$. Ve zbývajících případech platí $d = \operatorname{dist}(F, K \setminus U) > 0$, neboť $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus U)$ je spojitá funkce (Fakt 4), která nabývá minima na kompaktní množině F. Položíme-li tedy

$$V = \left\{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) < \tfrac{d}{2}\right\},$$

máme $F \subset V \subset \overline{V} \subset \{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) \le \frac{d}{2}\} \subset U$, přičemž opět využíváme spojitosti funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$.

(b) Je-li F prázdná, položíme $f = 0$ na K, je-li $U = K$, položíme $f = 1$ na K. Ve zbývajících případech najdeme díky tvrzení (a) otevřenou množinu $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Požadovanou funkci pak získáme pomocí formule

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, K \setminus V) + \operatorname{dist}(x, F)} \quad \text{pro } x \in K.$$

Skutečně, podobně jako v (a) odvodíme, že $\operatorname{dist}(F, K \setminus V) > 0$, odkud plyne, že jmenovatel je vždy kladný. Pak f je spojitá díky Faktu 4, zjevně $f = 1$ na K a $\{x \in K;\ f(x) > 0\} \subset V$, tedy $\operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$.

□

VĚTA 14 (Spojitý rozklad jednotky). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují spojité funkce $f_1, \dots, f_n\colon K \to [0,1]$ splňující* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ *pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.*

DŮKAZ. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x \in U_i$, a z Lemmatu 13(a) nalezneme otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_m \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i, $i = 1, \dots, n$ jako

$$F_i = \bigcup \left\{\overline{V_{x_j}};\ \overline{V_{x_j}} \subset U_i\right\}.$$

Pak každá F_i je uzavřená množina splňující $F_i \subset U_i$ a platí $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. Podle Lemmatu 13(b) existují spojité funkce $g_1, \dots, g_n\colon K \to [0,1]$ takové, že $g_i = 1$ na F_i a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\sum_{i=1}^n g_i > 0$ na K. Pro $i = 1, \dots, n$ a $x \in K$ položme

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^n g_j(x)}.$$

Pak f_i je spojitá funkce do $[0,1]$ a $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a platí $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.

□

Nechť P je metrický prostor. Symbol $\operatorname{Bs}(P)$ značí σ-algebru všech borelovských podmnožin P a $\operatorname{Bf_b}(P)$ značí systém všech omezených borelovských funkcí na P.

Následující tvrzení je zjednodušenou verzí klasické Lebesgueovy-Hausdorffovy věty.

VĚTA 15. *Nechť P je metrický prostor. Nechť Φ je nejmenší systém funkcí na P, který obsahuje $C_b(P)$ a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\Phi = \operatorname{Bf_b}(P)$.*

DŮKAZ. Prostor $\operatorname{Bf_b}(P)$ je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností (bodová limita posloupnosti funkcí měřitelných vzhledem k σ-algebře je opět měřitelná), takže $\Phi \subset \operatorname{Bf_b}(P)$. Abychom dokázali opačnou inkluzi, ukážeme nejprve, že Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin. Za tím účelem definujeme pro ordinály $\alpha \in [0, \omega_1)$ množiny Φ_α pomocí transfinitní rekurze. Položme $\Phi_0 = C_b(P)$ a pro $\alpha \in (0, \omega_1)$ definujme

$$\Phi_\alpha = \left\{f\colon P \to \mathbb{K};\ f \text{ je bodovou limitou nějaké omezené posloupnosti } \{f_n\} \subset \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta\right\}.$$

Zřejmě $\Phi_\alpha \subset \Phi_\beta$ pro $\alpha \le \beta < \omega_1$. Pomocí transfinitní indukce snadno nahlédneme, že každá z množin Φ_α je uzavřená na součet, násobek skalárem a součin, a že $\Phi_\alpha \subset \Phi$. Na druhou stranu množina $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$ je uzavřená vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností: je-li $f_n \to f$ pro $f_n \in \Phi_{\alpha_n}$, pak

$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, a tedy $f_n \in \Phi_\beta$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $f \in \Phi_{\beta+1}$. To znamená, že $\Phi = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$, a tedy Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin.

Dále ukážeme, že $\chi_A \in \Phi$ pro každou borelovskou $A \subset P$. Označme $\mathcal{S} = \{A \in \mathrm{Bs}(P);\ \chi_A \in \Phi\}$. Pak $\mathcal{S}$ je σ-algebra: Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{S}$. Je-li $A \in \mathcal{S}$, pak $\chi_{P\setminus A} = 1 - \chi_A \in \Phi$, tedy $P \setminus A \in \mathcal{S}$. Dále pro $A, B \in \mathcal{S}$ je $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \in \Phi$, odkud plyne, že $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení. Jsou-li nyní $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ a $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, pak položíme $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}$ a obdržíme, že $\chi_{B_n} \to \chi_A$ bodově, takže $A \in \mathcal{S}$.

Ukážeme-li, že $\mathcal{S}$ obsahuje uzavřené podmnožiny P, dostaneme, že $\mathcal{S} = \mathrm{Bs}(P)$. Nechť $F \subset P$ je uzavřená. Definujme $f_n(x) = (1 - n\,\mathrm{dist}(x, F))^+$ pro $x \in P$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in C_b(P)$, posloupnost $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to \chi_F$ bodově, takže $\chi_F \in \Phi_1 \subset \Phi$.

Systém Φ tedy obsahuje všechny jednoduché borelovské funkce na P. Protože každá omezená borelovská funkce je bodovou limitou omezené posloupnosti jednoduchých borelovských funkcí, plyne odtud, že $\mathrm{Bf_b}(P) \subset \Phi$.

□

3. Topologické prostory

3.1. Základní pojmy

DEFINICE 16. Nechť X je množina a τ je systém podmnožin X. Řekneme, že $X, \tau)$ je topologický prostor, pokud má τ následující vlastnosti.

- Platí $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
- Pokud $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- Je-li $\mathcal{U} \in \tau$ konečný, je i množina $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$.

Množiny z τ se nazývají otevřené.

LEMMA 17. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

- *Množina $\emptyset$ i X je uzavřená.*
- *Systém uzavřených množin je uzavřený vzhledem k libovolným průnikům a konečným sjednocením.*

DEFINICE 18. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$.

- Pokud $X \setminus A \in \tau$, nazývá se A uzavřená.
- Množina $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X;\ A \subset F,\ F$ uzavřená$\}$ se nazývá uzávěrem A.
- Množina $\mathrm{Int}\, A = \bigcup\{U \subset X;\ U \subset A,\ U$ otevřená$\}$ se nazývá vnitřkem A.
- Množina $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ se nazývá hranicí A.

DEFINICE 19. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ je dáno. O množině $A \subset X$ řekneme, že je okolím x, pokud $x \in \mathrm{Int}\, A$. Označme

$$\tau(x) = \{U \subset X;\ U \text{ je okolí } x\}.$$

DEFINICE 20. (a) Nechť $(I, \leq)$ je nahoru usměrněná uspořádaná množina, tj. $\leq$ je uspořádání na I a pro každou dvojici $i, j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $i \leq k$ a $j \leq k$. Množina $I' \subset I$ je kofinální, pokud pro každé $i \in I$ existuje $j \in I'$ splňující $i \leq j$.

(b) Nechť X je množina. Je-li $f : I \to X$ libovolná funkce, nazýváme ji netem (zobecněnou posloupností) a značíme $\{x_i\}_{i\in I}$, kde $x_i = f(i)$. Pokud $(J, \leq)$ je též nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina a $\phi\colon J \to I$ splňuje, že pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_\in J$ takové, že pro $j \geq j_0$ platí $\phi(j) \geq i_0$, nazveme net $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ podnetem netu $\{x_i\}$.

(c) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ a $\{x_i\}$ je net. Pak $x = \lim_{i\in I} x_i$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $i_i \in I$ takové, že $x_i \in U$ pro $i \geq i_0$.

Bod x je hromadným bodem $\{x_i\}$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ a $i_0 \in I$ existuje $i \geq i_0$ splňující $x_i \in U$.

LEMMA 21. *Nechť* (X, τ) *je topologický prostor a* $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ *je podnet netu* $\{x_i\}_{i\in I}$. *Pokud* $x_i \to x$, *pak také* $x_{\phi(j)} \to x$.

LEMMA 22. *Nechť* (X, τ) *je topologický prostor. Nechť* $A \subset X$ *a* $x \in X$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Platí $x \in \overline{A}$.
(ii) Pro každé $U \in \tau(x)$ *platí* $U \cap A \neq \emptyset$.
(iii) Existuje net $\{x_i\}$ *obsažený v* A *a konvergující k* x.

DEFINICE 23. Nechť X je množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.
(a) Pak $\mathcal{F}$ je filtr, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
- $H \in \mathcal{F}$, kdykoliv $F \in \mathcal{F}$ a $H \supset F$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je báze filtru, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existuje $F_3 \in \mathcal{F}$ splňující $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

(c) Systém $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, pokud $\mathcal{F}$ je maximální filtr vhledem k inkluzi, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, kdykoliv $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ a$\mathcal{G}$ je filtr.

DEFINICE 24. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$ je báze filtru. Řekneme, že $\mathcal{F}$ konverguje k x (píšeme $x = \lim \mathcal{F}$), pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F \subset U$.

TVRZENÍ 25. *Nechť* X *je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\mathcal{F}$ *je báze filtru v* X *a nechť* $x = \lim \mathcal{F}$. *Uvažujme* $\mathcal{F}$ *uspořádaná obrácenou inkluzí a pro každé* $F \in \mathcal{F}$ *zvolíme* $x_F \in F$. *Pak* $\{x_F\}$ *je net a* $\lim x_F = x$.
(b) Nechť $\{x_i\}$ *je net v* X *a* $x \in X$ *je jeho limita. Pro každé* $i \in I$ *položme* $F_i = \{x_j;\ j \geq i\}$. *Pak systém* $\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$ *je báze filtru a* $x = \lim \mathcal{F}$.

TVRZENÍ 26. *Nechť* X *je množina. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *báze filtru, je množina*

$$\{H \subset X;\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ splňující } F \subset H\}$$

filtr.
(b) množina $\mathcal{F}$ *filtr, existuje ultrafiltr* $\mathcal{G}$ *obsahující* $\mathcal{F}$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé a k ověření (b) stačí aplikovat Zornovo lemma.

□

DEFINICE 27. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Zobrazení f nazveme spojitým, pokud $f^{-1}(V) \in \tau$ pro každou $V \in \sigma$.

LEMMA 28. *Nechť* (X, τ) *a* (Y, σ) *jsou topologické prostory a* $f : X \to Y$ *je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Zobrazení f *je spojité.*
(ii) Pro každou $F \subset Y$ *uzavřenou je* $f^{-1}(F)$ *uzavřená.*
(iii) Pro každou $A \subset X$ *platí* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(iv) Pro každý bod $x \in X$ *a každé* $V \in \sigma(f(x))$ *existuje* $U \in \tau(x)$ *splňující* $f(U) \subset V$.
(v) Pro každý net $\{x_i\}$ *v* X *konvergující k* $x \in X$ *platí* $f(x_i) \to f(x)$.

DEFINICE 29. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je sekvenciálně spojité, pokud $f(x_n) \to f(x)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k $x \in X$.

PŘÍKLADY 30. (a) Je-li (X, ρ) metrický prostor, zahrňme do τ_ρ ty množiny $U \subset X$, které splňují

$$\forall x \in U \exists r > 0 \colon U(x, r) = \{y \in X;\ \rho(x, y) < r\} \subset U.$$

Pak (X, τ_ρ) je topologický prostor

(b) Nechť X je množina. Pokud $\tau = \mathcal{P}(X)$, dostáváme diskrétní topologii, pokud $\tau = \{\emptyset, X\}$, máme indiskrétní topologii.

DEFINICE 31. Topologický prostor (X, τ) se nazývá metrizovatelný, pokud na něm existuje metrika ρ splňující $\tau = \tau_\rho$.

3.2. Oddělovací axiomy

DEFINICE 32. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X je T_1, pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x_1 \in U$ a $x_2 \notin U$.

(b) Prostor X je T_2 (Hausdorffův), pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

(c) Prostor X je T_3 (regulární), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_1 \in U_1$ a $F \subset U_2$.

(d) Prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (úplně regulární či Tichonovův), pokud je T_1 a každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existuje $f \colon X \to [0, 1]$ spojitá taková, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na F.

(e) Prostor X je T_4 (normální), pokud je T_1 a pro každé dvě uzavřené, disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ existují disjunktní, otevřené množiny $U_1, U_2 \subset X$ takové, že $F_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

TVRZENÍ 33. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $i, j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$, $i \le j$ a X je T_j, pak je i T_i.

(b) Prostor X je T_1 právě tehdy, když pro každý bod $x \in X$ je $\{x\}$ uzavřená množina.

(c) Prostor X je regulární, pokud pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existuje $V \in \tau(x)$ splňující $\overline{V} \subset U$.

PŘÍKLAD 34. Každý metrický prostor je normální.

◇

LEMMA 35 (Urysohn). *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Pak pro každé dvě disjunktní, neprázdné uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset X$ existuje spojitá funkce $f \colon X \to [0, 1]$ taková, že $f(F_1) \subset \{0\}$ a $f(F_2) \subset \{1\}$.*

VĚTA 36. *Nechť (X, τ) je normální topologický prostor. Nechť $F \subset X$ je neprázdná, uzavřená množina a $f \colon F \to \mathbb{K}$ je spojitá funkce. Pak existuje $g \colon X \to \mathbb{K}$ spojité zobrazení taková, že $g = f$ na F a $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $f \neq 0$. Pokud $Y = \mathbb{R}$, je tvrzení známé. Pokud $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, rozšíříme f po složkách a dostaneme tak $h \colon X \to \mathbb{C}$ rozšiřující f. Pokud $r = \|f\|_\infty = \infty$ jsme hotovi. V opačném případě uvažujme zobrazení $p \colon \mathbb{C} \to B(0, r)$ definované jako

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r), \\ z, & z \in B(0, r). \end{cases}$$

Pak p je spojitá funkce, a tedy je $g = p \circ h$ požadované rozšíření.

□

PŘÍKLAD 37. Vezměme na množině $\mathbb{N}$ následující topologie: báze τ_1 je tvořena množinami $\{n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a množinami osahujícími 1 s konečným doplňkem; báze τ_2 je tvořena množinami $\{n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ a množinami osahujícími 2 s konečným doplňkem. Zřejmě obě topologie jsou Hausdorffovy. Nicméně topologie $\tau = \tau_1 \cap \tau_2$ není Hausdorffova: Je-li $U \in \tau(1) \subset \tau_1(1)$, resp. $V \in \tau(2) \subset \tau_2(2)$, pak U i V mají konečný doplněk, a tedy $U \cap V \neq \emptyset$.

◇

3.3. Generování topologií

DEFINICE 38. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\mathcal{B} \subset \tau$ se nazývá báze τ, pokud pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ platí $U = \bigcup\{V \in \mathcal{B};\ V \subset U\}$.

DEFINICE 39 (Podprostor). Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pokud $Y \subset X$, pak $\sigma = \{U \cap Y;\ U \in \tau\}$ je topologie na Y. Prostor (Y, σ) se nazývá podprostorem X.

DEFINICE 40 (Homeomorfismus). Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je homeomorfismus X na $f(X)$), pokud f i $f^{-1}\colon f(X) \to X$ jsou spojité.

DEFINICE 41 (Projektivní generování). Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f : X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Položme

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(V_i);\ U_i \in \tau_i, F \in \mathcal{F}(I)\}.$$

Pro $U \in X$ položme $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B};\ B \subset U\}$. Pak systém

$$\tau = \{U \subset X;\ U = \bigcup \mathcal{B}_U\}$$

tvoří topologii na X. Tato topologie se nazývá projektivně generovaná prostory X_i a zobrazením f_i, $i \in I$.

TVRZENÍ 42. *Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f : X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Nechť τ je systém definovaný v Definici 41. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém τ je topologie.
(b) Pokud (Y, σ) je topologický prostor a $f : Y \to X$ je zobrazení, pak f je spojité právě tehdy, když $f_i \circ f$ je spojité pro každé $i \in I$.

DEFINICE 43 (Součin prostorů). Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $X = \prod_{i \in I} X_i$. Uvažujme kanonické projekce $p_i\colon X \to X_i$, $j \in I$. Nechť τ je topologie projektivně generovaná tímto systémem. Pak τ se nazývá součinová topologie.

TVRZENÍ 44. *Operace podprostoru i součinu zachovávají vlastnosti T_j, $j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$.*

TVRZENÍ 45. *Nechť (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$, jsou metrizovatelné prostory. Pak je prostor $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X.$$

3.4. Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

DEFINICE 46. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Pak X se nazývá kompaktní, pokud pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X (tj. $\mathcal{U}$ sestává z otevřených množin a $K \subset \bigcup \mathcal{U}$) existuje konečný podsystém $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ splňující $K \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

(b) Množina $A \subset X$ se nazývá relativně kompaktní, pokud je podmnožinou kompaktní množiny v X.

(c) Prostor X se nazývá lokálně kompaktní, pokud každé $x \in X$ má bázi okolí tvořenou kompaktními množinami.

Je-li X Hausdorffův, pak (b) je ekvivalentní tomu, že $\overline{A}$ je kompaktní, a (c) je ekvivalentní tomu, že každý bod X má nějaké kompaktní okolí.

LEMMA 47. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak systém všech kompaktních podmnožin X je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky.*

TVRZENÍ 48. *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každá uzavřená množina v X je kompaktní.
(b) Je-li X Hausdorffův, je X je normální.
(c) Je-li X Hausdorffův, je lokálně kompaktní.
(d) Pokud Y je Hausdorffův topologický prostor a X je jeho podprostorem, je X v Y uzavřený.

(e) Pokud Y je topologický prostor a $f: X \to Y$ je spojité, je $f(X)$ kompaktní. Pokud X je prosté a Y je Hausdorffův, je f homeomorfizmus.

TVRZENÍ 49. *Nechť (X, τ) je Hausdorffův topologický prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(a) Prostor X je kompaktní.
(b) Každý net v X má konvergentní podnet.
(c) Má-li neprázdný systém $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ složený z uzavřených množin konečnou průnikovou vlastnost (tj. $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ pro každou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečnou), je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

VĚTA 50 (Tichonov). *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

LEMMA 51. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak každá je ho otevřená podmnožina je lokálně kompaktní.*

TVRZENÍ 52. *Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*

DEFINICE 53. Nechť (X, τ) je topologický prostor.
(a) Je-li $f: X \to \mathbb{K}$ funkce, množinu $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$ nazýváme nosičem funkce f. Symbol $C_c(X)$ pak značí prostor všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem.
(b) Je-li X lokálně kompaktní, značíme $C_0(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X s vlastností, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in X;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní.

DEFINICE 54. Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní Hausdroffův prostor a α je bod do X nenáležící. Položme $\alpha X \cup \{\alpha\}$ a definujme topologii σ na αX takto. Množina $U \subset \alpha X$ je σ otevřená, pokud $U \cap X$ je τ-otevřená a je-li $\alpha \in U$, pak existuje kompaktní množina $F \subset X$ taková, že $\{\alpha\} \cup (X \setminus F) \subset U$.
Prostor αX se nazývá jednobodová (nebo Alexandrovova) kompaktifikace X.

TVRZENÍ 55. *Nechť (X, τ) je lokálně kompaktní Hausdroffův prostor a αX je zkonstruováno jako výše. Pak platí následující tvrzení.*
(a) Prostor αX je kompaktní Hausdorffův.
(b) Bod α je v uzávěru X právě tehdy, když X není kompaktní.
(c) Každé $f \in C_0(X)$ dodefinujeme na $\widetilde{f} \in C(\alpha X)$ v bodě α hodnotou 0. Pak toto zobrazení zprostředkovává izometrický izomorfisums $C_0(X)$ a $\{f \in C(\alpha X);\ f(\alpha) = 0\}$.

VĚTA 56 (Urysohn a Tietze). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pak platí následující tvrzení.*
(a) Pokud $U \subset X$ otevřená množina splňuje $K \subset U$, pak existuje $f: X \to [0, 1]$ spojitá splňující $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$.
(b) Je-li $g: K \to \mathbb{K}$ spojitá, existuje $f \in C_c(X)$ rozšiřující g, která splňuje $\|f\| = \|g\|$.

DŮKAZ. Uvažujme kompaktifikaci αX. Pak K je uzavřená a U otevřená v αX, a tedy (a) i (b) plyne z normálnosti prostoru αX.

□

VĚTA 57 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{R})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ je vektorový prostor obsahující konstanty a oddělující body X. Nechť dále*

- *$\mathcal{A}$ je algebra nebo*
- *$\mathcal{A}$ je svaz, tj. $\min\{f, g\}$ a $\max\{f, g\}$ jsou elementy $\mathcal{A}$ kdykoliv $f, g \in \mathcal{A}$.*

Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{R})$).

VĚTA 58 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{C})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $A \subset C(X, \mathbb{C})$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružování, obsahující konstanty a oddělující body X. Pak A je hustá v $C(X, \mathbb{C})$.*

VĚTA 59 (Stoneova-Weierstraßova pro lokálně kompaktní prostory). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $A \subset C_0(X, \mathbb{K})$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružování, která odděluje body X a pro každé $x \in X$ existuje $f \in A$ tak, že $f(x) \neq 0$. Pak A je hustá v $C_0(X, \mathbb{K})$.*

DůKAZ. Uvažujme prostor αX. Dodefinováním funkcí z $C_0(X, \mathbb{K})$ hodnotou 0 v α lze předpokládat, že $A \subset C(\alpha X, \mathbb{K})$. Uvažujme systém

$$B = \{f + c;\ f \in A, c \in \mathbb{K}\}.$$

Pak systém B splňuje předpoklady Věty 58, a tedy $\overline{B} = C(\alpha X, \mathbb{K})$. (Máme totiž pro $f + c$ a $g + d$ v B rovnost $(f + c)(g + d) = fg + cg + df + cd$, kde $fg + cg + df \in A$.)

Nechť $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existují $g_n \in A$ a $c_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že funkce tvaru $f_n = g_n + c_n$ konvergují stejnoměrně k f. Jelikož

$$0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (g_n(\alpha) + c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

máme

$$g_n = (g_n + c_n) - c_n = f_n + c_n \rightrightarrows f.$$

Tedy $\overline{A} = C_0(X, \mathbb{K})$.

□

TVRZENÍ 60. *Nechť X je kompaktní prostor. Pokud existuje spočetný systém $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$ oddělující body, je X metrizovatelný.*

DůKAZ. Uvažujme zobrazení

$$\varphi\colon X \to \prod_{n=1}^{\infty} f_n(X), \quad \varphi(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pak $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)$ je metrizovatelný a φ je homeomorfismus X na $\varphi(X)$. Tedy i X je metrizovatelný.

□

TVRZENÍ 61. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Pak existují kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, s následujícími vlastnostmi:*

(a) $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$.
(b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
(c) Pro každý kompakt $K \subset X$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $K \subset \operatorname{Int} K_n$.

DůKAZ. Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze otevřených množin v X. Položme $\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{B};\ U \text{ je relativně kompaktní}\}$. Pak $\mathcal{A}$ je také spočetná báze otevřených množin v X. Vskutku, je-li $G \subset X$ otevřená a $x \in G$, pak existuje $U \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in U \subset G$. Protože U je okolí x a X je lokálně kompaktní, existuje $V \subset U$ kompaktní okolí x. Pak existuje $W \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in W \subset \operatorname{Int} V$, a tedy $W \in \mathcal{A}$ a $x \in W \subset V \subset U \subset G$.

Nechť $\mathcal{A} = \{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a nechť $V_n \subset X$ jsou kompaktní takové, že $U_n \subset V_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Indukcí nyní sestrojíme posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ takovou, že splňuje (a) a $U_n \subset K_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V prvním kroku položíme $K_1 = V_1$. Předpokládejme nyní, že máme pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ zkonstruovány kompakty K_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, takové, že $K_j \subset \operatorname{Int} K_{j+1}$ pro $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Díky kompaktnosti K_n existuje $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n + 1$ takové, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$. Položme $K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} V_j$. Pak K_{n+1} je kompaktní množina, která obsahuje U_{n+1} a splňuje to, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena. Nalezená posloupnost očividně splňuje (a) a (b). Je-li $K \subset X$ libovolný kompakt, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subset \operatorname{Int} K_n$.

□

TVRZENÍ 62. *Každá shora polospojitá funkce na neprázdném kompaktním prostoru nabývá maxima.*

DůKAZ. Nechť X je kompaktní prostor a f je shora polospojitá funkce na X. Položme $\alpha = \sup_X f$ a nechť $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ je rostoucí posloupnost s limitou α. Pak množiny $K_n = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha_n\}$ jsou neprázdné a kompaktní a systém $\{K_n\}$ je centrovaný. Existuje tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Dle definice je ovšem nutně $f(x) = \alpha$.

□

3.5. Čechova-Stoneova kompaktifikace

VĚTA 63. *Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Existuje kompaktní prostor Y a homeomorfní zobrazení $\varepsilon\colon X \to \operatorname{Rng}\phi \subset Y$ takové, že $\operatorname{Rng}\varepsilon$ je hustý v Y a pro každou $f \in C^b(X)$ existuje právě jedna funkce $g \in C(Y)$ taková, že $f(x) = g(\varepsilon(x))$, $x \in X$.*

(b) *Pokud Y_1, Y_2 jsou kompaktní prostory splňující (a), přičemž $\phi_i\colon X \to Y_i$, $i = 1,2$, je příslušná vnoření, existuje surjektivní homeomorfismus $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ takový, že $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$, $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) Uvažujme komutativní B*-algebru s jednotkou $A = C^b(X)$. Pak $Y = \Delta(A)$ je kompaktní prostor a $\Gamma\colon A \to C(Y)$ je izometrický $*$-izomorfismus. Uvažujme zobrazení $\varepsilon\colon X \to Y$ definované jako

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x\colon f \mapsto f(x), \quad f \in A, \quad x \in X.$$

Pak ε je požadované zobrazení.

Vskutku, nechť $\{x_i\}$ je usměrněný soubor v X. Pokud konverguje k x, pak pro každé $f \in A$ platí $f(x_i) \to f(x)$, což podle definice topologie na Y znamená $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$. Tedy ε je spojité. Pokud $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$ v Y, nechť U je dané okolí x. Nalezneme funkci $f \in C^b(X)$ takovou, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ vně U. Protože $f(x_i) = \varepsilon_{x_i}(f) \to \varepsilon_x(f) = f(x)$, existuje $i_i \in I$ takové, že pro $i \geq i_0$ platí $|f(x_i)| > 0$. Pro tato i je tedy $x_i \in U$. Ověřili jsme tak, že $x_i \to x$, tj. ε je homeomorfismus.

Dále ukážeme, že
$ve(X)$ je hustý v Y. Kdyby tomu tak nebyl, existovala by nenulová funkce $g \in C(Y)$ splňující $g = 0$ na $\varepsilon(X)$. Pak je funkce $f = \Gamma^{-1}g$ nenulová, ale pro $x \in X$ platí

$$f(x) = \varepsilon_x(f) = (\Gamma f)(\varepsilon_x) = g(\varepsilon_x) = 0.$$

Tedy $f = 0$, což je spor.

Je-li nyní $f \in C^b(X)$ libovolná, pak funkce $g = \Gamma f$ splňuje

$$g(\varepsilon_x) = (\Gamma f)(\varepsilon x) = \varepsilon_x(f) = f(x), \quad x \in X.$$

Tedy ε a Y jsou hledané objekty.

(b) Nechť Y_i a ϕ_i, $i = 1,2$, splňují (a). Označme $A_i = C(Y_i)$, $i = 1,2$. Pro $g \in C(Y_2)$ uvažujme jednoznačně určenou funkci $i(g) \in C(Y_1)$, která splňuje $i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x))$, $x \in X$. Pak $i\colon A_2 \to A_1$ je izometrický $*$-izomorfismus. Tedy $i' \to A_1^* \to A_2^*$ je homeomorfismus $\Delta(A_1)$ na $\Delta(A_2)$. Nechť $\varepsilon_i \to \Delta(A_i)$ jsou homeomorfismy z Příkladu 10.80. Položme $\phi = \varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1$. Pak ϕ je homeomorfismus Y_1 na Y_2, který pro každé $x \in X$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} g(\phi(\phi_1(x))) &= g((\varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x)) = ((i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x))(g) \\ &= (\varepsilon_1(\phi_1(x))(i(g)) = i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x), \quad g \in C(Y_2). \end{aligned}$$

Tedy $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$ a důkaz je hotov.

□

3.6. Souvislé prostory

DEFINICE 64. Nechť (X,τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X se nazývá souvislý, pokud neexistují neprázdné, otevřené, disjunktní množiny $U, V \subset X$ splňující $X = U \cup V$.

(b) Prostor X se nazývá lokálně souvislý, pokud pro každé $x \in X$ existuje báze okolí x ze souvislých množin.

(c) Prostor X se nazývá křivkově souvislý, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0,1] \to X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.

(d) Pro $x \in X$ označme

$$C_x = \bigcup\{C \subset X;\ C \text{ souvislá, } x \in C\}$$

(souvislou) komponentu bodu x.

TVRZENÍ 65. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Komponenty X jsou souvislé uzavřené podmnožiny X. Pokud $x, y \in X$, pak buď $C_x = C_y$, nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.
(b) Je-li X lokálně souvislý, jsou komponenty souvislosti otevřené.
(c) Křivkově souvislý prostor je souvislý.
(d) Je-li X souvislý, Y topologický prostor a $f : X \to Y$ spojitá, pak $f(X)$ je souvislý.

PŘÍKLAD 66. Každá konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru je souvislá.

$\diamond$

LEMMA 67. *Nechť X je topologický prostor a $V \subset U \subset X$. Jestliže $\partial V \cap U = \emptyset$, pak*

$$V = \bigcup\{C;\ C \text{ je komponenta } U \text{ protínající } V\}.$$

DŮKAZ. $\subset$ Pro $x \in V$ stačí vzít komponentu U obsahující x.

$\supset$ Nechť C je komponenta U, která protíná V. Jelikož $X = \operatorname{Int} V \cup \partial V \cup (X \setminus \overline{V})$, platí dle předpokladu $U \subset \operatorname{Int} V \cup (X \setminus \overline{V})$. Množina C proto musí být obsažena ve V, neboť v opačném případě by množiny $C \cap \operatorname{Int} V$ a $C \cap (X \setminus \overline{V})$ tvořily rozklad C na dvě disjunktní neprázdné relativně otevřené množiny.

$\square$

3.7. Metrizovatelnost

■■■[předělat pomocí Weilova pseudometrizačního lemmatu - Schechter]

VĚTA 68. *Nechť X je topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí* 0. *Pak existuje zobrazení $p\colon X \to [0, +\infty)$ takové, že*
(a) $p(\lambda x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ splňující $|\lambda| \le 1$,
(b) pro každé $x, y \in X$ platí $p(x + y) \le p(x) + p(y)$,
(c) $p(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,■■■[pseudo!]
(d) metrika $\rho(x, y) = p(x - y)$, $x, y \in X$, generuje τ.
Prostor (X, τ) je tak metrizovatelný.

DŮKAZ. *Krok 1.* Zvolíme bázi $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vyvážených okolí 0 splňující

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Nechť $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ značí systém všech neprázdných, konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ konečnou položíme

$$V_F = \sum_{n \in F} V_n \quad \text{a} \quad p_F = \sum_{n \in F} 2^{-n}.$$

Nejprve si rozmyslíme, že funkce $q\colon \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$ definovaná jako $q(F) = p_F$ je prostá. To však ihned plyne z faktu, že $2^{-n} > \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^{-k}$ pro každé $n, m \in \mathbb{N}$.

Ukážeme nyní, že kdykoliv dvě množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Navíc pak platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F_2.

Mějme množiny $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a $F_2 = \{l\}$, kde $l \in \mathbb{N}$, dány. Pokud $l \notin F_1$, stačí položit $F = F_1 \cup F_2$.

Pokud by platilo $F_1 \cap [1, l] = \{1, \dots, l\}$, dostali bychom spor s nerovností $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$. Tedy lze definovat $j = \max(\{1, \dots, l\} \setminus F_1)$. Označíme

$$A_1 = F_1 \cap [1, \dots, j-1], \quad A_2 = F_1 \cap [j+1, l] = \{j+1, \dots, l\} \quad \text{a} \quad A_3 = F_1 \cap [l+1, +\infty).$$

Položíme

$$F = A_1 \cup \{j\} \cup A_3.$$

Pak F má požadované vlastnosti.

Platí totiž

$$p_{F_1} + p_{F_2} = p_{A_1} + p_{\{j+1,\dots,l\}} + p_{A_3} = P_{\{l\}} = p_{A_1} + p_{\{j\}} + p_{A_3} = p_F.$$

Dále díky(3) máme

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{A_1} + V_{\{j+1,\dots,l\}} + V_{A_3} + V_{\{l\}} \subset V_{A_1} + V_{\{j\}} + V_{A_3} = V_F.$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je tvrzení ověřeno pro každou množinu $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a každou n-prvkovou množinu $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Nechť $F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ je má $n+1$ prvků. Označme $m = \max F_2$. Pak $H = F_2 \setminus \{m\}$ má n prvků, a tedy podle indukčního předpokladu existuje množina $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_{F'} = p_{F_1} + p_H$ a $V_{F_1} + V_H \subset V_{F'}$. Na dvojici F' a $\{m\}$ nyní opět aplikujeme indukční předpoklad, a obdržíme tak množinu $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} \quad \text{a} \quad V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Pak

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_H + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_{F_2}$$

a

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{F_1} + V_H + V_{\{m\}} \subset V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Tím je důkaz existence F dokončen.

Díky prostotě funkce q je navíc F jednoznačně určena.

Krok 2. Ukážeme, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{N}):\ p_F < 2^{-n} \implies n < \min F \implies V_F \subset V_n. \tag{4}$$

Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F. Nechť F je jednoprvková množina. Pišme $F = \{k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Pokud $p_F = 2^{-k} < 2^{-n}$, zjevně $n < k = \min F$. Tato nerovnost pak zřejmě implikuje $V_F = V_k \subset V_n$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou m-prvkovou podmnožinu $\mathbb{N}$. Nechť $F = \{k_1, \dots, k_{m+1}\}$, kde $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+1}$ jsou čísla v $\mathbb{N}$, je dána. Nerovnost $p_F < 2^{-n}$ zjevně implikuje $n < \min F$. Předpokládejme nyní tuto nerovnost a označme $F' = \{k_2, \dots, k_{m+1}\}$. Pak $n+1 \le k_1 < \min F'$ a F' je m-prvková. Proto

$$V_F = V_{k_1} + \left(V_{k_2} + \dots + V_{k_{m+1}}\right) \subset V_{n+1} + V_{F'} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Tím je(4) ověřeno.

Krok 3. Definujeme

$$p(x) = \begin{cases} \inf\{p_F;\ x \in V_F, F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}, & x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} V_F, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} \qquad x \in X.$$

Ověříme nyní pro funkci p vlastnosti (a)–(d). Pokud $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ a $x \in X$, pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ platí $\lambda x \in V_F$, pokud $x \in V_F$. Tedy (a) platí.

Dále ověříme (b). Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dány. Pokud $p(x_1) + p(x_2) > 1$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy opačnou nerovnost a zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon < 1$. Nechť nyní $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $x_i \in V_{F_i}$ a $p_{F_i} < p(x_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Jelikož $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje právě jedna množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Díky prvnímu kroku platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Tedy $x_1 + x_2 \in V_F$, a proto

$$p(x_1 + x_2) \le p_F = p_{F_1} + p_{F_2} \le p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.$$

Tím je vlastnost (b) ověřena.

Dále pro množiny

$$B_r = \{x \in X;\ p(x) \le r\}, \quad r \in [0, +\infty),$$

platí inkluze

$$B_{2^{-(n+1)}} \subset V_n \subset B_{2^{-n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Vskutku, inkluze $V_n \subset B_{2^{-n}}$ je zřejmá, neboť $p(x) \le 2^{-n}$, kdykoliv $x \in V_n$. Pokud je však $p(x) \le 2^{-(n+1)}$, existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F < 2^{-n}$ a $x \in V_F$. Pak $x \in V_n$ díky(4).

Z(5) nyní plyne vlastnost (c), neboť

$$x = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \Leftrightarrow p(x) = 0, \quad x \in X.$$

Nakonec ověříme (d). Nechť τ_ρ značí topologii generovanou metrikou ρ. Z(5) pak plyne, že báze okolí 0 v τ_ρ, totiž systém $\{B_r;\ r > 0\}$, je též báze okolí 0 v τ. Z(5) však také plyne, že $\tau(0)$ je báze okolí 0 v τ_ρ. Jelikož je metrika ρ translačně invariantní, topologie τ a τ_ρ splývají.

□

3.8. Borelovské množiny a funkce

DEFINICE 69. (a) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Symbolem $\mathrm{Bs}(X)$ označíme σ-algebru generovanou τ.

(b) Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ je zobrazení. Pak f je borelovské, pokud $f^{-1}(V) \in \mathrm{Bs}(X)$ pro každou $V \in \sigma$.

TVRZENÍ 70. *Nechť X je topologický prostor a $Y \subset X$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí

$$\mathrm{Bs}(Y) = \{Y \cap B;\ B \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

(b) Pokud $Y \in \mathrm{Bs}(X)$, pak $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathrm{Bs}(X)$.

DŮKAZ. (a) Pišme σ pro topologii Y. Označme $\mathcal{A} = \{Y \cap A;\ A \in \mathrm{Bs}(X)\}$. Zjevně je $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující otevřené množiny Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{A}$. Nechť nyní $\mathcal{B}$ je libovolná σ-algebra v Y obsahující σ. Položme

$$\mathcal{C} = \{C \subset X;\ Y \cap C \in \mathcal{B}\}.$$

Pak $\mathcal{C}$ je σ-algebra v X obsahující τ. Tedy $\mathcal{C} \supset \mathrm{Bs}(X)$, z čehož plyne $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Jelikož $\mathcal{B}$ byla libovolná, platí $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bs}(Y)$.

Tvrzení (b) nyní plyne z (a).

□

TVRZENÍ 71. *Nechť X, Y, Z jsou topologické prostory. Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou borelovská zobrazení. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $B \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí $f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)$.

(b) Zobrazení $g \circ f$ je borelovské.

DŮKAZ. (a) Označme

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y;\ f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

Pak $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny prostoru Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{B}$.

Tvrzení (b) okamžitě plyne z (a).

□

4. Teorie míry

LEMMA 72. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je součinová σ-algebra na $X \times Y$. Je-li $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak $\mathrm{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}$, kde $A^x = \{y \in Y;\ (x, y) \in A\}$.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{A} = \big\{A \subset X \times Y;\ \mathrm{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}\big\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Protože každý měřitelný obdélník zjevně leží v $\mathcal{A}$, plyne odtud, že $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, což dokazuje tvrzení lemmatu.

Platí, že $\{(X \times Y)^x;\ x \in X\} = \{Y\}$, a tedy $X \times Y \in \mathcal{A}$. Dále pro $A \subset X \times Y$ a $x \in X$ je $Y \setminus A^x = (X \times Y \setminus A)^x$. Zobrazení $\Phi\colon M \mapsto Y \setminus M$ tedy zobrazuje $\{A^x;\ x \in X\}$ na $\{(X \times Y \setminus A)^x;\ x \in X\}$, odkud plyne, že $X \times Y \setminus A \in \mathcal{A}$ kdykoli $A \in \mathcal{A}$.

Nechť nyní $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prosté zobrazení $\psi_n\colon \{A_n^x;\ x \in X\} \to (0, 1)$. Je-li $M \in \Big\{\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)^x;\ x \in X\Big\}$, pak zvolme libovolně $x \in X$ tak, že $M = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)^x$, a položme

$\Psi(M) = \big(\psi_n(A_n^x)\big)_{n=1}^\infty \in (0,1)^{\mathbb{N}}$. Pak $\Psi\colon \big\{\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x;\ x \in X\big\} \to (0,1)^{\mathbb{N}}$ je prosté: Je-li $\Psi(M) = \Psi(N)$, pak existují $x, y \in X$ taková, že $M = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x$, $N = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^y$ a $\psi_n(A_n^x) = \psi_n(A_n^y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z prostory ψ_n dostaneme, že $A_n^x = A_n^y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^y = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^y$, neboli $M = N$. Odtud již snadno plyne, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

□

4.1. Nezáporné míry

Následující tvrzení je přímým důsledkem Lebesgueovy věty o konvergenci (případně zobecněné věty Leviho).

DŮSLEDEK 73. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou a $E, E_n \subset \Omega$ jsou měřitelné podmnožiny splňující buď $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ nebo $E_{n+1} \subset E_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$. Nechť dále $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p \to 0$. Speciálně, v případě $p = 1$ platí $\int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Posloupnost $\{\chi_{E_n} f\}$ konverguje bodově k $\chi_E f$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \le |f|^p$. Podle Lebesgueovy věty tedy $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p^p = \int_\Omega |\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

□

VĚTA 74 (Hölderova nerovnost). *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, $f_1,\dots,f_n$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1,\dots,\alpha_n > 0$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pak*

$$\int_\Omega f_1\cdots f_n \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_n}.$$

DŮKAZ. Použijeme matematickou indukci dle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je nerovnost triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $f_1,\dots,f_{n+1}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1} > 0$ splňují $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Položme $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$, $f = f_1\cdots f_n$ a $g = f_{n+1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy podle Hölderovy nerovnosti pro f a g máme

$$\int_\Omega f_1\cdots f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha} \left(\int_\Omega f_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_{n+1}}.$$

Položíme-li $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} > 0$ pro $i = 1,\dots,n$, pak $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, a tedy dle indukčního předpokladu použitého na funkce $f_1^{\frac{1}{\alpha}},\dots,f_n^{\frac{1}{\alpha}}$ dostaneme

$$\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_n} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha}},$$

což v kombinaci s nerovností výše dává požadovaný výsledek.

□

VĚTA 75. *Nechť $(\Omega,\mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je míra na $\mathcal{S}$ a $g\colon \Omega \to [0,+\infty]$ je nezáporná měřitelná. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou reálnou $f \in L^*(\nu)$ ■■■[Co to značí?], resp. pro každou komplexní $f \in L_1(\nu)$.

DŮKAZ. Fakt, že ν je míra a že integrální vzorec platí pro každou nezápornou měřitelnou f je známý (viz např. [R, Věta 1.29]). Pro reálnou $f \in L^*(\nu)$ máme $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (fg)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega (fg)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Pro komplexní $f \in L_1(\nu)$ pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu =$

$\int_\Omega \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\nu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f) g \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f) g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re}(fg) \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im}(fg) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$.

□

Nechť μ, ν jsou míry na σ-algebře $\mathcal{S}$. Fakt, že $\mu(E) \leq \nu(E)$ pro každou $E \in \mathcal{S}$ budeme značit $\mu \leq \nu$.

LEMMA 76. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Je-li $\mu \leq \nu$, pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f : \Omega \to [0, +\infty]$.*

DŮKAZ. Díky linearitě integrálu nerovnost zjevně platí pro nezáporné jednoduché měřitelné funkce. Přechodem k supremu obdržíme nerovnost pro obecné nezáporné měřitelné funkce.

□

TVRZENÍ 77. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Pak funkce $\mu + \nu$ na $\mathcal{S}$ definovaná jako $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$ je míra a $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f : \Omega \to [0, +\infty]$. Dále je $L_1(\mu + \nu) = L_1(\mu) \cap L_1(\nu)$ a vzorec platí též pro každou $f \in L_1(\mu + \nu)$.*

DŮKAZ. Funkce $\mu + \nu$ je zjevně nezáporná a $(\mu + \nu)(\emptyset) = 0 + 0 = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\mu + \nu)\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) + \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n) = \sum_{n=1}^\infty (\mu + \nu)(E_n)$. Tedy $\mu + \nu$ je míra na $\mathcal{S}$.

Snadno je vidět, že vzorec $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ platí pro jednoduché měřitelné funkce f. Je-li nyní $f : \Omega \to [0, +\infty]$ měřitelná, pak existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ konvergující bodově k f. Pak dle věty Leviho platí $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim\big(\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

Konečně, ze vzorce $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\nu$ pro f měřitelnou dostáváme, že $L_1(\mu) \cap L_1(\nu) \subset L_1(\mu + \nu)$. Na druhou stranu, je-li $f \in L_1(\mu + \nu)$, pak dle Lemmatu 76 platí $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu+\nu)$, a tedy $f \in L_1(\mu)$. Analogicky obdržíme, že $f \in L_1(\nu)$. Na závěr spočteme, že $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}(\mu+\nu) - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \big(\int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

□

4.2. Regularita měr

Čtenář, který není seznámen s pojmem topologického prostoru, si může níže všude místo pojmu „topologický prostor“ dosadit pojem „metrický prostor“.

DEFINICE 78. Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$. Řekneme, že μ je

- zevně regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \inf\big\{\mu(G);\ G \supset E, G$ otevřená$\big\}$;
- zevnitř regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\big\{\mu(F);\ F \subset E, F$ uzavřená$\big\}$;
- těsná, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\big\{\mu(K);\ K \subset E, K$ kompaktní$\big\}$.

■■■[regularni: termín bych použil jen pro $M(K)$, zevne+zevnitr+konecna na kompaktech; nebo: zevne+tesna+konecna na komp.]

LEMMA 79. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je těsná konečná míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují kompaktní $K \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $K \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Díky těsnosti existují kompaktní množiny $K \subset E$ a $H \subset X \setminus E$ takové, že $\mu(K) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mu(H) > \mu(X \setminus E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G = X \setminus H$. Pak G je otevřená, $K \subset E \subset G$ a $G \setminus E = (X \setminus H) \setminus E = (X \setminus H) \cap (X \setminus E) = (X \setminus E) \setminus H$. Tedy $\mu(G \setminus E) = \mu((X \setminus E) \setminus H) = \mu(X \setminus E) - \mu(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dohromady $\mu(G \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

LEMMA 80. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Speciálně, μ je i zevnitř regulární.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\} \subset \mathcal{S}$ je posloupnost množin konečné míry splňující $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Z vnější regularity plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence otevřené $G_n \subset X$ takové, že $G_n \supset E \cap A_n$ a $\mu(G_n) < \mu(E \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < +\infty$. Pak $\mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) = \mu(G_n) - \mu(E \cap A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položíme-li nyní $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, pak G je otevřená a $E \subset G$. Dále je snadno vidět, že $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)$, a tedy

$$\mu(G \setminus E) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplikujeme-li nyní již dokázanou část na množinu $X \setminus E$, pak dostaneme otevřenou $U \subset X$ splňující $X \setminus E \subset U$ a $\mu(U \setminus (X \setminus E)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položíme-li $F = X \setminus U$, pak F je uzavřená, $F \subset E$ a $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

□

LEMMA 81. *Nechť X je topologický prostor a μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Je-li $E \subset X$ typu F_σ, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Položme $H = X \setminus E$. Pak H je G_δ, takže $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, kde $H_n \subset X$ jsou otevřené a $H_{n+1} \subset H_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $H^k = H \cap U_k$ a $H_n^k = H_n \cap U_k$ pro $k, n \in \mathbb{N}$. Množiny H_n^k jsou otevřené, $H^k = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k$. Pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je $H_{n+1}^k \subset H_n^k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(H_1^k) \le \mu(U_k) < +\infty$, takže $\lim_{n\to\infty} \mu(H_n^k) = \mu(H^k)$. Existuje tedy $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(H_{n_k}^k) < \mu(H^k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Odtud plyne, že $\mu(H_{n_k}^k \setminus H^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Konečně, definujme $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{n_k}^k$. Pak G je otevřená, $H \subset G$ a $G \setminus H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(H_{n_k}^k \setminus H^k)$. Tedy $\mu(G \setminus H) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Na závěr stačí položit $F = X \setminus G$.

□

LEMMA 82. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak systém*

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{S};\ \textit{pro každé } \varepsilon > 0 \textit{ existují uzavřená } F \subset X \textit{ a otevřená } G \subset X \textit{ takové, že } F \subset A \subset G \textit{ a } \mu(G \setminus F) < \varepsilon\big\}.$$

je σ-algebra.

DŮKAZ. Zjevně $X \in \mathcal{A}$ (stačí vzít $F = G = X$). Dále nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Nechť uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ jsou takové, že $F \subset A \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Pak $X \setminus G \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ a $\mu\big((X \setminus F) \setminus (X \setminus G)\big) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Konečně, nechť $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť uzavřená $F_n \subset X$ a otevřená $G_n \subset X$ jsou takové, že $F_n \subset A_n \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak G je otevřená, E je F_σ, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ a $\mu(G \setminus E) \le \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_n\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dle Lemmatu 81 pak existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

□

VĚTA 83. *Nechť X je topologický prostor takový, že každá otevřená množina je F_σ (např. metrický prostor), a nechť μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak μ je dokonce těsná.*

DŮKAZ. Systém $\mathcal{A}$ z Lemmatu 82 je σ-algebra, která díky předpokladu a Lemmatu 81 obsahuje otevřené množiny, a tedy je rovna borelovské σ-algebře na X. To znamená, že μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak pro každou uzavřenou $F \subset X$ existuje neklesající posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ taková, že $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, takže $\mu(F) = \lim \mu(K_n) = \sup\{\mu(K);\ K \subset F, K \text{ kompaktní}\}$. Odtud snadno plyne, že μ je těsná.

□

VĚTA 84 (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1912)). *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{K}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f\restriction_F$ je spojitá.*

DŮKAZ. Nechť $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{K}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z Lemmatu 80 uzavřenou $F_n \subset X$ a otevřenou $G_n \subset X$ tak, že $F_n \subset f^{-1}(U_n) \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pak je $F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$ uzavřená a platí, že $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Restrikce $f\restriction_F$ je pak spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $(f\restriction_F)^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \cap F = G_n \cap F$ otevřená v F. (Poslední rovnost plyne z toho, že $G_n \cap F \subset F_n$.)

□

DŮSLEDEK 85. *Nechť X je normální topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$ a $f\colon X \to \mathbb{K}$ je μ-měřitelná funkce. Pak platí následující:*

(a) Existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $f_n \to f$ μ-skoro všude a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(b) Existuje borelovská funkce g na X rovnající se f μ-skoro všude.

DŮKAZ. Dle Věty 84 existuje posloupnost $\{H_n\}$ uzavřených množin v X taková, že $f\restriction_{H_n}$ je spojitá a $\mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$. Položme $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} H_j$. Pak F_n jsou uzavřené množiny takové, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$, $\mu(X \setminus F_n) \leq \mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$ a $f\restriction_{F_n}$ je spojitá. Vskutku, je-li $F \subset \mathbb{K}$ uzavřená, pak

$$(f\restriction_{F_n})^{-1}(F) = \bigcup_{j=1}^{n}(f\restriction_{H_j})^{-1}(F),$$

přičemž množiny $(f\restriction_{H_j})^{-1}(F)$ jsou uzavřené v H_j, a tedy i v X. Proto je $(f\restriction_{F_n})^{-1}(F)$ uzavřená v X, a tedy i v F_n.

Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pak A je borelovská a $\mu(X \setminus A) \leq \mu(X \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $\mu(X \setminus A) = 0$.

(a) Dle Poznámky 10 existují spojité funkce $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ takové, že $f_n = f\restriction_{F_n}$ a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \leq \sup_{x\in F_n}|f(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in A$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in F_n$ pro $n \geq n_0$, a tedy $f_n(x) = f(x)$ pro $n \geq n_0$. To znamená, že $f_n \to f$ bodově na A.

(b) Funkce $g = \chi_A f$ je rovna f skoro všude. Ukažme, že je borelovská: Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je libovolná otevřená množina. Je-li $0 \in G$, položme $B = X \setminus A$, jinak položme $B = \emptyset$. Pak

$$g^{-1}(G) = \big((X \setminus A) \cap g^{-1}(G)\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(F_n \cap g^{-1}(G)\big) = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(f\restriction_{F_n})^{-1}(G).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ovšem množina $(f\restriction_{F_n})^{-1}(G)$ otevřená v F_n, a tedy borelovská v X. Proto je $g^{-1}(G)$ borelovská.

□

4.3. Nosič míry

DEFINICE 86. Nechť X je topologický prostor a μ je míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Pak nosič μ je definován jako $\operatorname{supp}\mu = X \setminus \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$.

Nosič míry μ je uzavřená množina.

FAKT 87. *Nechť X je topologický prostor a μ je nenulová míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Je-li μ těsná na otevřených množinách, pak $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ a $\mu(\operatorname{supp}\mu) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $U = \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$. Je-li $K \subset U$ kompaktní, pak existují $G_1, \dots, G_n \subset X$ otevřené takové, že $\mu(G_j) = 0$ a $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$. Odtud plyne, že $\mu(K) = 0$. Pak ovšem $\mu(U) = \sup\{\mu(K);\ K \subset U, K \text{ kompaktní}\} = 0$. Dále $\mu(\operatorname{supp}\mu) = \mu(X) - \mu(U) = \mu(X) > 0$.

□

TVRZENÍ 88. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná míra na $\mathcal{S}$ těsná na otevřených množinách. Je-li* $\operatorname{supp}\mu = \{x\}$ *pro nějaké $x \in X$, pak existuje $c \in (0, +\infty)$ takové, že $\mu = c\delta_x$.*

DŮKAZ. Položme $c = \mu(\{x\})$. Pak $c \in (0, +\infty)$ dle Faktu 87. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Je-li $x \notin E$, pak $\mu(E) \leq \mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ dle Faktu 87. Je-li $x \in E$, pak $\mu(E) = \mu(\{x\}) + \mu(E \setminus \{x\}) = c + 0 = c$. Tedy $\mu = c\delta_x$.

□

4.4. Komplexní míry

Připomeňme, že μ je komplexní (resp. znaménková) míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ jestliže $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ (resp. $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$) splňuje $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro libovolné $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní. ■■■[nekonečna?]

Dále připomeňme, že variace míry μ je funkce $|\mu|$ definovaná na $\mathcal{S}$ předpisem

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\mu(A_j)|;\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S},\ A_j \subset A \text{ po dvou disjunktní}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Variace komplexní míry je konečná nezáporná míra a je to nejmenší nezáporná míra, která majorizuje funkci $A \mapsto |\mu(A)|$ ([R, kapitola 6]).

Označme $\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ množinové funkce definované vzorci $(\operatorname{Re}\mu)(E) = \operatorname{Re}(\mu(E))$ a $(\operatorname{Im}\mu)(E) =$ ■ $\operatorname{Im}(\mu(E))$ pro $E \in \mathcal{S}$. Pak $\operatorname{Re}\mu$ a $\operatorname{Im}\mu$ jsou znaménkové míry: Jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\operatorname{Re}\mu)\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j\big) = \operatorname{Re}\big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Re}\mu)(A_n)$ díky spojitosti a aditivitě funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$. Analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$.

Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu = (\operatorname{Re}\mu)^+ - (\operatorname{Re}\mu)^- + i(\operatorname{Im}\mu)^+ - i(\operatorname{Im}\mu)^-$.

LEMMA 89. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\operatorname{Re}\mu| \leq |\mu|$, $|\operatorname{Im}\mu| \leq |\mu|$ a $|\mu| \leq |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| = (\operatorname{Re}\mu)^+ + (\operatorname{Re}\mu)^- + (\operatorname{Im}\mu)^+ + (\operatorname{Im}\mu)^-$.*

DŮKAZ. Platí $|\operatorname{Re}\mu(E)| \leq |\mu(E)|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Odtud snadno plyne, že $|\operatorname{Re}\mu| \leq |\mu|$ a analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$. Na druhou stranu, pro $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ platí

$$\sum_{j=1}^{n}|\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{(\operatorname{Re}\mu(E_j))^2 + (\operatorname{Im}\mu(E_j))^2} \leq \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Re}\mu(E_j)| + \sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im}\mu(E_j)|,$$

odkud plyne, že $|\mu| \leq |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|$.

□

LEMMA 90. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\mu|(A) \leq 4\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A}|\mu(E)|$ pro každou $A \in \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Označme $M = \sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A}|\mu(E)|$. Nechť je nejprve μ reálná. Jsou-li $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, $A_j \subset A$ po dvou disjunktní a označíme-li $I = \{1, \dots, n\}$ a $I^+ = \{j \in I;\ \mu(A_j) \geq 0\}$, pak $\sum_{j=1}^{n}|\mu(A_j)| = \sum_{j\in I^+}\mu(A_j) - \sum_{j\in I\setminus I^+}\mu(A_j) = \mu\big(\bigcup_{j\in I^+} A_j\big) - \mu\big(\bigcup_{j\in I\setminus I^+} A_j\big) \leq 2M$. Tedy $|\mu|(A) \leq 2M$.

Je-li nyní μ komplexní, pak s využitím Lemmatu 89 a předchozího odhadu obdržíme, že $|\mu|(A) \leq |\operatorname{Re}\mu|(A) + |\operatorname{Im}\mu|(A) \leq 2\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A}|\operatorname{Re}\mu(E)| + 2\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A}|\operatorname{Im}\mu(E)| \leq 4M$.

□

Řekneme, že komplexní míra μ je zevně regulární, resp. zevnitř regulární, resp. těsná, pokud její variace $|\mu|$ má příslušnou vlastnost.

VĚTA 91. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak $|\nu|$ je zevnitř i zevně regulární.*

DŮKAZ. Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$. Z absolutní spojitosti $|\nu|$ vzhledem k μ ([R, Tvrzení 6.8(e), Věta 6.11]) plyne existence $\delta > 0$ takového, že je-li $A \in \mathcal{S}$ a $\mu(A) < \delta$, pak $|\nu|(A) < \varepsilon$. Z Lemmatu 80 plyne existence $G \supset E$ otevřené takové, že $\mu(G \setminus E) < \delta$. Pak $|\nu|(G \setminus E) < \varepsilon$, tedy $|\nu|(G) = |\nu|(E) + |\nu|(G \setminus E) < |\nu|(E) + \varepsilon$. Vnitřní regularita $|\nu|$ plyne z Lemmatu 80.

□

Nechť μ je komplexní míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu$. Můžeme tedy definovat integrál vzhledem ke komplexní míře μ vzorcem

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Re}\mu + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Im}\mu,$$

jsou-li oba integrály vpravo konvergentní. Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak můžeme vzorec výše psát následovně:

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ - \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ - i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-.$$

■■■[integral je linearni???]

Snadno nahlédneme, že $\int_\Omega \chi_E\,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$, a tedy z linearity $\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j)$ pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$.

TVRZENÍ 92. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ je definován, právě když $f \in L_1(|\mu|)$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Podle Lemmat 89 a 76 platí $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu| < +\infty$, což znamená, že $\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+$ konverguje; analogické tvrzení platí i pro integrály vzhledem k $(\operatorname{Re}\mu)^-$, $(\operatorname{Im}\mu)^+$ a $(\operatorname{Im}\mu)^-$. Tedy $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ je definován.

$\Rightarrow$ Z Lemmat 89 a 76 a Tvrzení 77 plyne, že $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-$.

□

VĚTA 93. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a $g \in L_1(\mu)$. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je komplexní míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$(\operatorname{Re}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^+\,\mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Re}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^-\,\mathrm{d}\mu,$$
$$(\operatorname{Im}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^+\,\mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Im}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^-\,\mathrm{d}\mu,$$
$$|\nu|(E) = \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu,$$
$$\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ a každou $f \in L_1(|\nu|)$.

DŮKAZ. Pro $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní máme díky Důsledku 73 rovnost $\nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n E_j} g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$. Tedy ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$.

Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $f \in L_1(|\nu|)$. Předpokládejme nejprve, že g je reálná. Položme $P = \{x \in \Omega;\ g(x) \ge 0\}$ a $N = \{x \in \Omega;\ g(x) < 0\}$. Snadno vidíme, že (P, N) je Hahnův rozklad Ω příslušný znaménkové míře ν. Tedy $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} g\,\mathrm{d}\mu = \int_{E\cap P} g^+\,\mathrm{d}\mu = \int_E g^+\,\mathrm{d}\mu$ a podobně $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = -\int_{E\cap N} g\,\mathrm{d}\mu = -\int_{E\cap N} -g^-\,\mathrm{d}\mu = \int_E g^-\,\mathrm{d}\mu$. Dle Věty 75 je tedy $\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E f\,\mathrm{d}\nu^+ - \int_E f\,\mathrm{d}\nu^- = \int_E fg^+\,\mathrm{d}\mu - \int_E fg^-\,\mathrm{d}\mu = \int_E f(g^+ - g^-)\,\mathrm{d}\mu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$.

Nechť nyní g je obecná komplexní. Pak $(\operatorname{Re}\nu)(E) = \operatorname{Re}\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E \operatorname{Re} g\,\mathrm{d}\mu$ a analogicky $(\operatorname{Im}\nu)(E) = \operatorname{Im}\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E \operatorname{Im} g\,\mathrm{d}\mu$. Tedy dle předchozí části důkazu je $\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E f\,\mathrm{d}\operatorname{Re}\nu + i\int_E f\,\mathrm{d}\operatorname{Im}\nu = \int_E f \operatorname{Re} g\,\mathrm{d}\mu + i\int_E f \operatorname{Im} g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f(\operatorname{Re} g + i\operatorname{Im} g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$.

Konečně, ukažme, že $|\nu|(E) = \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu$. Protože $A \mapsto \int_A |g|\,\mathrm{d}\mu$ je nezáporná míra majorizující $|\mu(A)|$, plyne odtud, že $|\nu|(E) \le \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu$. Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$, kde $E_j \in \mathcal{S}$, $E_j \subset E$ jsou po dvou disjunktní, je jednoduchá funkce taková, že $\int_E |g - s|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ ([R, Věta 3.13]). Pak $|\nu(E_j)| = \left|\int_{E_j} g\,\mathrm{d}\mu\right| \ge \left|\int_{E_j} s\,\mathrm{d}\mu\right| - \left|\int_{E_j} (g-s)\,\mathrm{d}\mu\right| \ge |\alpha_j||\mu(E_j)| - \int_{E_j} |g-s|\,\mathrm{d}\mu$, a tedy $|\nu|(E) \ge \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| \ge \sum_{j=1}^n |\alpha_j||\mu(E_j)| - \sum_{j=1}^n \int_{E_j} |g-s|\,\mathrm{d}\mu \ge \int_E |s|\,\mathrm{d}\mu - \int_E |g-s|\,\mathrm{d}\mu \ge \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu - 2\int_E |g-s|\,\mathrm{d}\mu > \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu - 2\varepsilon$.

□

TVRZENÍ 94. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ je komplexní míra na $\mathcal{S}$. Pak existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f h\,\mathrm{d}|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Dle [R, Věta 6.12] existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a $\mu(E) = \int_E h\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Zbytek plyne z Věty 93.

□

DŮSLEDEK 95. *Nechť μ je komplexní míra na Ω. Pak*

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Nechť h je funkce z Tvrzení 94. Pak $\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_\Omega f h\,\mathrm{d}|\mu|\right| \le \int_\Omega |fh|\,\mathrm{d}|\mu| = \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu|$.

□

Pro komplexní míry platí následující varianta Lebesgueovy věty:

VĚTA 96. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na Ω taková, že $f_n \to f$ bodově $|\mu|$-s. v. Pokud existuje $g \in L_1(|\mu|)$ taková, že pro $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ je $|f_n(x)| \le g(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (speciálně pokud posloupnost $\{f_n\}$ je omezená), pak $f \in L_1(|\mu|)$, $\int_\Omega |f_n - f|\,\mathrm{d}|\mu| \to 0$ a $\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Pro $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ je $|f(x)| = \lim |f_n(x)| \le g(x)$, a tedy $f \in L_1(|\mu|)$. Dále $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ platí, že $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$, a tedy z Lebesgueovy věty plyne, že $\int_\Omega |f_n - f|\,\mathrm{d}|\mu| \to 0$. S pomocí Důsledku 95 tak dostaneme, že $\left|\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f_n - f|\,\mathrm{d}|\mu| \to 0$.

□

DEFINICE 97. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť $M(X)$ značí prostor všech měr na $(X, \mathcal{S})$, kde vektorové operace definujeme bodově a uvažujeme normu $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 98. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, pak $M(X)$ je Banachův prostor. Navíc platí $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$, $\mu, \nu \in M(X)$.*

DŮKAZ. Zjevně je $M(X)$ vektorový prostor. Pro $\mu, \nu \in M(X)$ máme

$$|(\mu + \nu)(A)| \le |\mu(A)| + |\nu(A)| \le |\mu|(A) + |\nu|(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Z této nerovnosti již snadno plyne odhad $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$.

Krok 1. Pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ platí

$$|c\mu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |c\mu(B)| = |\mu|(A) = |c| \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| = |c|\|\mu\|.$$

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ platí

$$\|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu + \nu(B)|$$
$$\leq \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| + \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B)| = \|\mu\| + \|\nu\|.$$

Konečně pokud $\|\mu\| = 0$, tj. $|\mu|(X) = 0$, pak pro každé $A \in \mathcal{S}$ máme

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(X) = 0,$$

a tedy $\mu = 0$. Proto je $M(X)$ normovaný prostor.

Krok 2. K důkazu úplnosti použijeme Větu 1.30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ je absolutně konvergentní řada v $M(X)$. Pro libovolné $A \in \mathcal{S}$ pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(A)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n\| < \infty,$$

a tedy lze položit

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Zjevně je pak μ konečně aditivní a platí $\mu(\emptyset) = 0$.

Nechť $\{C_k\}$ je klesající posloupnost měřitelných množin splňujících $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} |\mu_n|(A_k) = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\mu_n|(C_k) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n = 1, \ldots, n_0$. Pak pro $k \geq k_0$ platí

$$|\mu(C_k)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_k)| \leq |\sum_{n=1}^{n_0} \mu_n(C_k)| + |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu_n(A_k)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |\mu_n|(A_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu(C_k) \to 0$.

Nechť nyní $\{A_j\}$ je disjunktní systém měřitelných množin a $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Položme $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a $C_n = A \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{C_n\}$ je klesající posloupnost s vlastností $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Dle předcházející úvahy tedy máme pro

$$|\mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(B_n)| = |\mu(C_n)| \to 0.$$

Tedy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Krok 3. Ověřme nyní, že $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\nu_n(A) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Dle předcházejícího jsou míry ν_n v $M(X)$ a platí $\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu_n$. Pro libovolné $\mathcal{B} \in \pi(X)$ nyní máme

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} |(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k)(B)| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu_n(B)| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k(B)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu_k(B)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mu_k\|.$$

Tedy $\|\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\| \to 0$.

□

VĚTA 99. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $M(K)$ značí systém všech konečných komplexních borelovských zevně i zevnitř regulárních měr na K (vizte Definici 78). Pak $M(K)$ s operacemi a normou jako ve Větě 98 je Banachův prostor.*

DŮKAZ. V průběhu důkazu budeme zevně a zevnitř regulární borelovské míře říkat regulární míra. Již víme, že komplexní míry na $\mathrm{Bs}(K)$ tvoří Banachův prostor. Zbývá ukázat, že limita posloupnosti regulárních měr je regulární. Nechť tedy $\{\mu_n\}$ je posloupnost regulárních měr konvergující v normě ke komplexní míře borelovské míře μ. Nechť $E \in \mathrm{Bs}(K)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|\mu - \mu_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, a nalezneme množiny $F \subset E \subset G$, kde F uzavřená a G otevřená, takové, že $|\mu_n|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$|\mu|(G \setminus F) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(G \setminus F) \leq |\mu - \mu_n|(G \setminus F) + |\mu_n|(G \setminus F) \leq \|\mu - \mu_n\| + |\mu_n|(G \setminus F) < \varepsilon.$$

□

Následující významnou větu uvedeme bez důkazu.

VĚTA 100 (O. M. Nikodym (1933)). *Nechť $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních měr na σ-algebře $\mathcal{S}$ konvergující bodově k funkci μ na $\mathcal{S}$. Pak pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_k(A_n)$ konverguje stejnoměrně pro $k \in \mathbb{N}$. Tedy μ je komplexní míra.*

4.5. Radonovy míry

VĚTA 101 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ je lineární forma splňující $Tf \geq 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ nezápornou. Pak existuje σ-algebra $\mathcal{S}$ a nezáporná míra μ na $(X, \mathcal{S})$ s následujícími vlastnostmi.*

(a) Platí $\mathrm{Bs}(X) \subset \mathcal{S}$.
(b) Pro každou kompaktní množinu $K \subset X$ platí $\mu(K) < \infty$.
(c) Pro každou $A \in \mathcal{S}$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ A \subset U,\ U \text{ otevřená}\}. \tag{6}$$

(d) Je-li A otevřená nebo $A \in \mathcal{S}$ splňuje $\mu(A) < \infty$, platí

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}. \tag{7}$$

(e) Míra μ je úplná, tj. $A \in \mathcal{S}$, pokud existuje $B \in \mathcal{S}$ splňující $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$.
(f) Pro každou $f \in C_c(X)$ platí $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$.

DŮKAZ. Důkaz lze nalézt v knize [**?**, Corollary 11.37].

□

ZNAČENÍ 102. Míru $(X, \mathcal{S}, \mu)$ danou nezáporným funkcionálem Λ budeme nazývat Radonovou mírou.

LEMMA 103. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $(X, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ a $(X, \mathcal{S}_2, \mu_1)$ jsou dvě nezáporné Radonovy míry dané stejným funkcionálem Λ. Pak $\mu_1 = \mu_2$ na $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.*

DŮKAZ. Vizte [**?**, Note 11.38].

□

LEMMA 104. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $(X, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ a $(X, \mathcal{S}_2, \mu_1)$ jsou dvě konečné nezáporné Radonovy míry dané stejným funkcionálem Λ. Pak $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ a $\mu_1 = \mu_2$.*

DŮKAZ. Dokážem nejprve rovnost $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pro kompakty $K \subset G$. Pro $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $U \supset K$ otevřenou a splňující $\mu_1(U \setminus K) + \mu_2(U \setminus K) < \varepsilon$. Nechť $\varphi \in C_c(G, [0, 1])$ splňuje $\chi_K \leq \varphi \leq \chi_U$. Pak

$$\mu_1(K) = \int_G \chi_K \, d\mu_1 \leq \int_G \varphi \, d\mu_1 = \int_G \varphi \, d\mu_2 \leq \int_G \chi_U \, d\mu_2 = \mu_2(U) \leq \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Tedy $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ a prohozením rolí μ_1 a μ_2 získáme požadovanou rovnost.

Z vlastnosti (d) Věty 101 plyne, že $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Speciálně to platí pro borelovské množiny.

Zbývá dokázat, že tyto množinové systémy jsou stejné. Nechť tedy $A \in \mathcal{S}_1$.Ppak $A = K \cup N$ disjunktně, kde K je spočetné sjednocení kompaktů a $\mu_1(N) = 0$. Nechť $V \supset N$ je spočetný průnik otevřených množin splňující $\mu_1(V) = 0$. Pak $\mu_2(V) = 0$, což díky úplnosti μ_1 implikuje $\mu_2(N) = 0$. Tedy $A = K \cup N \in \mathcal{S}_2$ a $\mu_1(A) = \mu_1(K) + \mu_1(N) = \mu_2(K) + \mu_2(N) = \mu_2(A)$. Prohozením rolí μ_1 a μ_2 obdržíme $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$.

□

VĚTA 105 (Radon-Nikodym pro nezáporné Radonovy míry). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ, ν jsou nezáporné míry definované na σ-algebrách $\mathcal{S}_\mu$, $\mathcal{S}_\nu$, přičemž $(\mathcal{S}_\mu, \mu)$ i $\mathcal{S}_\nu, \nu)$ splňují vlastnosti (a)–(f) Věty 101. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *Existuje μ-měřitelná $g\colon X \to [0,\infty]$ taková, že $g\chi_K \in L_1(\mu)$ pro každý kompakt $K \subset X$ a platí $\int_X \varphi \,\mathrm{d}\nu = \int_X \varphi g \,\mathrm{d}\mu$, $\varphi \in C_c(X)$.*
(ii) *Každá μ-nulová množina je ν-nulová.*

DŮKAZ. Vizte [**?**, Theorem 12.17]. □

VĚTA 106. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ je nezáporná Radonova míra na X. Pak zobrazení $I : g \mapsto I_g$, kde $I_g(f) = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu$, $f \in L_1(\mu)$ je izometrický izomorfizmus $L_\infty(\mu)$ na $(L_1(\mu))^*$.*

DŮKAZ. Vizte [**?**, Theorem 12.18]. □

VĚTA 107 (Hustota $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a μ je nezáporná míra splňující vlastnosti (a)–(e) z Věty 101. Nechť $1 \le p < \infty$. Pak $C_c(X)$ je hustý podprostor $L_p(\mu)$.*

DŮKAZ. Symbolem $\mathcal{S}$ označme systém všech μ-měřitelných množin. Nechť $f \in L_p(\mu)$ je nenulová a $\varepsilon > 0$ je dáno. Položme

$$A = \{x \in X;\ |f(x)| > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in X;\ \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$, a tedy

$$\int_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \to \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Lze tak nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Podobně nalezneme kompakt $K \subset A_n$ a otevřenou množinu $U \supset A_n$ tak, aby $\int_{U\setminus K} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ a $\mu(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{n^p}$. Jelikož $\mu(K) < \infty$, dle Luzinovy věty 84 existuje $F \subset K$ uzavřená množina taková, že $\mu(K \setminus F) < \frac{\varepsilon}{n^p}$ a $f\restriction_F$ je spojitá. Nechť $g \in C_c(X)$ splňuje $g = f$ na F, $\operatorname{supp} g \subset U$ a $\|g\|_\infty \le \|f\restriction_F\|_\infty \le n$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_X |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{X\setminus U} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_F |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_{X\setminus U} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1}\left(\int_{U\setminus F} |g|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\le \int_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1}\left(n^p\mu(U\setminus F) + \int_{U\setminus K} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{K\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\
&\le \varepsilon + 2^{p-1}\left(n^p(\mu(U\setminus K) + \mu(K\setminus F)) + \varepsilon + n^p\mu(K\setminus F)\right) \\
&= \varepsilon(1 + 4\cdot 2^{p-1}).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

DEFINICE 108. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak komplexní míra μ na σ-algebře $\mathcal{S}$ se nazývá Radonova, pokud $|\mu|$ splňuje (a)–(e) Věty 101. Symbolem $M(X)$ značíme systém všech komplexních Radonových měr na X.

VĚTA 109 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_0(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $T \in (C_0(X))^*$. Pak existuje σ-algebra $\mathcal{S}$ a komplexní míra μ na $(X, \mathcal{S})$ taková, že*

(a) $|\mu|$ a $\mathcal{S}$ splňují (a)–(e) z Věty 101.

(b) Pro každou $f \in C_0(X)$ platí $Tf = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.
(c) Platí $\|T\| = \|\mu\|$.
(d) Míra μ je vlastnostmi (a), (b) určena jednoznačně.

DŮKAZ. Důkaz lze nalézt v [**?**, Theorems 14.4 a 14.10].

□

DEFINICE 110. Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Jsou-li μ, ν dvě Radonovy míry, položíme

$$T_{\mu+\nu} f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Dle Věty 109 existuje právě jedna míra $\lambda \in M(X)$ splňující

$$\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = T_{\mu+\nu}, \quad f \in C_0(X).$$

Tuto míru označíme jako $\mu + \nu$. Podobně budeme chápat míru $c\mu$, kde $c \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M(X)$.
Dále na $M(X)$ uvažujme normu danou totální variací, tj. $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 111. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak $M(X)$ je Banachův prostor, který je pomocí zobrazení $\mu \mapsto T_\mu$, kde*

$$T_\mu(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(X),$$

izometricky izomorfní prostoru $(C_0(X))^*$. Navíc T zachovává uspořádání, tj. $T\mu$ je nezáporný právě tehdy, když μ je nezáporná.
Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ a $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$(a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

DŮKAZ. První část tvrzení je k nalezení v [**?**, Theorem 14.10].
Nechť $\mu, \nu \in M(X)$ jsou dány. Definujeme komplexní míru λ na $\mathrm{Bs}(X)$ jako

$$\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak $|\lambda|$ splňuje (b),(c),(d) Věty 101. Ihned totiž vidíme, že $|\lambda| \le |\mu| + |\nu|$, takže z platnosti těchto vlastností pro míry $|\mu|$ a $|\nu|$ snadno odvodíme jejich splnění i pro míru $|\lambda|$.
Dále platí, že $\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu$ pro každou $f \in C_0(X)$. Pro jednoduchou borelovskou funkci tvaru $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ totiž platí

$$\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k(\mu(A_k) + \nu(A_k)) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{k=1}^n c_k \nu(A_k) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu.$$

Jelikož lze každou funkci $f \in C_0(X)$ stejnoměrně aproximovat takovýmito funkcemi, platí požadovaná rovnost.
Nechť $\omega \in M(X)$ je dána definicí $\mu + \nu$, tj. ω je ten jednoznačně určený prvek $M(X)$ splňující

$$\int_X f \, \mathrm{d}\omega = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Chceme ukázat, že $\omega = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(X)$.
Nechť nejprve $U \subset X$ je otevřená a $K \subset X$ je kompaktní splňující $K \subset U$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\mathrm{Rng}\, f \subset [0, 1]$, $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$. Pak

$$|\omega(U) - \int_X f \, \mathrm{d}\omega| = |\int_U (1 - f) \, \mathrm{d}\omega| \le \int_{U \setminus K} |1 - f| \, \mathrm{d}|\omega| \le |\omega|(U \setminus K). \tag{8}$$

Analogickou nerovnost odovodíme i pro λ.

Nechť nyní $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U splňující $K \subset A \subset U$ a $|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme $f \in C_c(X)$ jako výše. Pak díky (8) máme

$$\begin{aligned}
&|\omega(A) - \lambda(A)| = |\omega(U) - \omega(U \setminus A) - \lambda(U) + \lambda(U \setminus A)| \\
&\le |\omega(U) - \int_X f \, \mathrm{d}\omega| + |\omega(U \setminus A)| + |\int_X f \, \mathrm{d}\omega - \int_X f \, \mathrm{d}\lambda| + |\int_X f \, \mathrm{d}\lambda - \lambda(U)| + |\lambda(U \setminus A)| \\
&\le |\omega|(U \setminus K) + |\omega|(U \setminus A) + |\lambda|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus A) \\
&\le 2(|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda(A) = \omega(A)$, což znamená

$$\lambda(A) = \omega(A) = (\mu + \nu)(A).$$

Důkaz rovnosti $(c\mu)(A) = c\mu(A)$ pro $A \in \mathrm{Bs}(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ je analogický (a výrazně jednodušší).

□

DEFINICE 112. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor.

(a) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je spojitá, pokud $|\mu|(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in X$. Množinu všech spojitých měr značíme $M_c(X)$.

(b) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je diskrétní, pokud existuje spočetná množina $C \subset X$ splňující $|\mu|(X \setminus C) = 0$. Množinu všech diskrétních měr značíme $M_d(X)$.

(c) Řekneme, že $\mu \in M(X)$ je Diracova míra v bodě $x \in X$, pokud $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = f(x)$ pro každou $f \in C_0(X)$. Míru μ pak značíme δ_x.

(d) Molekulární mírou myslíme prvek množiny

$$M_{\mathrm{mol}}(X) = \mathrm{conv}\{\delta_x;\ x \in X\}.$$

(e) Nechť m je nezáporná Radonova míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ množin X. Symbolem $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ rozumíme množinu

$$M_{\mathrm{ac},m}(X) = \{\mu \in M(X);\ \forall N \in \mathrm{Bs}(X) \colon m(N) = 0 \Rightarrow |\mu|(N) = 0\}.$$

TVRZENÍ 113. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množiny $M_d(X)$ a $M_c(X)$ jsou uzavřené podprostory $M(X)$.
(b) Míra μ je diskrétní právě tehdy, když existuje $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ spočetná a posloupnost $a \in \ell_1$ taková, že $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.
(c) Je-li m nezáporná Radonova míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ množin X, pak $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ je uzavřený podprostor $M(X)$.

DŮKAZ. (a) Jsou-li μ, ν spojité míry na X, pak pro $x \in X$ platí

$$|\mu + \nu|(\{x\}) \le |\mu|(\{x\}) + |\nu|(\{x\} = 0,$$

tj. $\mu + \nu \in M_c(X)$.

Jsou-li $\mu, \nu \in M(X)$ diskrétní a $C_1, C_2 \subset X$ jsou příslušné spočetné množiny, pak $C = C_1 \cup C_2$ je spočetná a

$$|\mu + \nu|(X \setminus C) \le |\mu|(X \setminus C_1) + |\nu|(X \setminus C_2) = 0$$

Tedy $\mu + \nu \in M_d(X)$.

Podobně se ukážeme, že $M_c(X)$ i $M_d(X)$ jsou uzavřené na násobení skalárem.

Nechť $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_c(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$. Pak

$$|\mu|(\{x\}) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(\{x\}) + |\mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(X) \to 0.$$

Tedy μ je spojitá.

Podobně pro posloupnost $\{\mu_n\}$ v $M_d(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ vybereme příslušné spočetné množiny C_n, $n \in \mathbb{N}$. Pak $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ je spočetná a

$$|\mu|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X) + |\mu_n|(X \setminus C_n) = \|\mu - \mu_n\|.$$

Tedy $\mu \in M_d(X)$.

(b) Nechť $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina příslušná μ. Položme $a_n = \mu(\{x_n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(\{x_n\})| = |\mu|(C) = |\mu|(X) = \|\mu\| < \infty,$$

a zjevně $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Přímo z definice se ověří, že množina $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ je podprostor $M(X)$. Pokud $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_{\mathrm{ac},m}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ a $N \in \mathrm{Bs}(X)$ je m nulová množina, máme

$$|\mu|(N) = |\mu - \mu_n|(N) + |\mu_n|(N) \leq \|\mu - \mu_n\| + 0 \to 0.$$

Tedy $\mu \in M_{\mathrm{ac},m}(X)$.

$\square$

LEMMA 114. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je jeho hustý podprostor. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak w^*-topologie splývá na U° s topologií $\sigma(X^*, Y)$.*

Speciálně, je-li Y hustý podprostor normovaného lineárního prostoru X, na B_{X^*} splývá $\sigma(X^*, Y)$ s w^*-topologií.

DŮKAZ. Dle Věty 6.115 je U° w^*-kompaktní množina. Díky hustotě Y je topologie $\sigma(X^*, Y)$ na U° Hausdorffova, přičemž každá $\sigma(X^*, Y)$-otevřená množina je též w^*-otevřená. Zobrazení $Id : (U^\circ, w^*) \to (U^\circ, \sigma(X^*, Y))$ je tedy spojité, prosté zobrazení kompaktního prostoru do Hausdorffova prostoru. Jedná se tedy o homeomorfismus, což znamená, že tyto topologie splývají.

$\square$

LEMMA 115. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor a $M^1(X)$ značí množinu všech pravděpodobnostních měr v $M(X)$. Pak je množina $M_{\mathrm{mol}}(X)$ hustá v $(M^1(X), w^*)$.*

DŮKAZ. Nechť $\mu \in M^1(X)$ je dáno. Na základě Lemmatu 114 stačí ukázat, že pro každou $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(X)$ splňující $|\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon$. Nechť tedy $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme $M = \|f\|$. Pro každé $x \in \operatorname{supp} f$ existuje okolí U_x obsahující x takové, že $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$, $y \in U_x$. Pak $|f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro každé $y_1, y_2 \in U_x$. Vybereme konečně mnoho $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{supp} f$ splňující $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Označíme $A_0 = \emptyset$ a definujeme

$$A_i = U_{x_i} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} U_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nakonec označme $A_{n+1} = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pak A_i, $i = 1, \dots, n+1$, jsou navzájem disjunktní borelovské množiny a $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$. Dále položíme

$$c_i = \mu(A_i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

a pro každé $i \in \{1, \dots, n+1\}$ vybereme $x_i \in A_i$, pokud $c_i > 0$. Dále vybereme bod $u \in X$ a položíme $x_i = u$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $c_i = 0$. Pokud $A_{n+1} \neq \emptyset$ a $c_{n+1} = 0$, vybereme $v \in A_{n+1}$ a položíme $x_{n+1} = v$. Nakonec definujeme

$$\nu = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \varepsilon_{x_i}.$$

Protože $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n+1$, a

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu(X) = 1,$$

je míra ν molekulární.

Dále platí

$$
\begin{aligned}
|\mu(f)-\nu(f)| &= |\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| \\
& |\sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} f(x_i)\,\mathrm{d}\mu(x)| \le \sum_{i=1}^{n+1}\int_{A_i} |f(x)-f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} |f(x)-f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{A_{n+1}} |f(x)-f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} |f(x)-f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \le \varepsilon\sum_{i=1}^{n} c_i = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz dokončen.

□

LEMMA 116. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\mu \in M(X)$ splňuje $\mu(X) = \|\mu\|$. Pak μ je nezáporná.*

DŮKAZ. Stačí ověřit, že $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \ge 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ splňující $0 \le f \le 1$. Nechť tedy f je taková funkce a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezneme kompakt $L \subset X$ takový, že $\operatorname{supp} f \subset L$ a $|\mu|(X \setminus L) < \varepsilon$. Nalezneme funkci $g \in C_0(X)$ takovou, že $0 \le g \le 1$ a $g = 1$ na L. Pak platí $0 \le f - g \le 1$ na X, a dostáváme tak

$$
\begin{aligned}
\|\mu\| &\ge |\int_X (g-f)\,\mathrm{d}\mu| \ge \int_X (g-f)\,\mathrm{d}\mu = \int_L g\,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus L} g\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \\
&\ge \mu(L) - |\mu|(X\setminus L) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \mu(X) - \mu(X\setminus L) - |\mu|(X\setminus L) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \\
&\ge \|\mu\| - 2\varepsilon - \int_X f\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

Tedy $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \ge -2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, a důkaz je tak dokončen.

□

VĚTA 117 (Fubiniova věta pro funkce z L_1). *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním toplogickém prostoru X_i, $i = 1, 2$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení

$$
Tf = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad f \in C_c(X_1 \times X_2),
$$

je dobře definovaný nezáporný funkcionál na $C_c(X_1 \times X_2)$.

(b) Nechť μ je nějaká Radonova míra odpovídající funkcionálu T. Nechť f je funkce na $X_1 \times X_2$ taková, že $f \in L_1(\mu)$. Pak platí následující tvrzení.

(i) Pro μ_2-skoro všechna $x_2 \in X_2$ je funkce $x_1 \mapsto f(x_1,x_2)$ v $L_1(\mu_1)$ a pro μ_1-skoro všechna $x_1 \in X_1$ je funkce $x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$ v $L_1(\mu_2)$.

(ii) Funkce

$$
\psi_1(x_1) = \begin{cases} \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), & \textit{pokud integrál existuje}, \\ 0, & \textit{jinak}, \end{cases}
$$

je v $L_1(\mu_1)$, podobně funkce

$$
\psi_2(x_2) = \begin{cases} \int_{X_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1), & \textit{pokud integrál existuje}, \\ 0, & \textit{jinak}, \end{cases}
$$

je v $L_1(\mu_2)$.

(iii) Platí vzorec

$$\int_{X_1\times X_2} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \psi_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \psi_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

DŮKAZ. Vizte [**?**, Theorem 13.8].

□

ZNAČENÍ 118. Nechť X_1, X_2 jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory.
Nechť μ_i jsou nezáporné Radonovy míry na X_i, $i = 1, 2$, Pak vybereme nezápornou míru μ na $X_1 \times X_2$ odpovídající funkcionálu T z Věty 117 a označíme ji jako $\mu_1 \times \mu_2$.

VĚTA 119 (Fubiniova věta pro nezáporné funkce). *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X_i, $i = 1, 2$. Nechť f je nezáporná numerická $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelná funkce na $X_1 \times X_2$ taková, že existují $\mu_1 \times \mu_2$-konečné měřitelné množiny $A_n \subset X_1 \times X_2$, $n \in \mathbb{N}$ splňující $f\restriction_{(X_1\times X_2)\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ je $\mu_1 \times \mu_2$-skoro všude nulová.*
Pak platí následující tvrzení.

(a) Pro μ_2-skoro všechna $x_2 \in X_2$ je funkce $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ μ_1-měřitelná a pro μ_1-skoro všechna $x_1 \in X_1$ je funkce $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ μ_2-měřitelná.
(b) Funkce

$$\psi_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1$$

je μ_1-měřitelná, podobně funkce

$$\psi_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2$$

je μ_2-měřitelná.
(c) Platí vzorec

$$\int_{X_1\times X_2} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \psi_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \psi_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

DŮKAZ. Vizte [**?**, Theorem 13.9].

□

VĚTA 120. *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X_i, $i = 1, 2$. Nechť $A \subset X_1$ je μ_1-nulová a $B \subset X_2$ je σ-konečná vzhledem k μ_2. Pak $A \times B$ je $\mu_1 \times \mu_2$-nulová.*

DŮKAZ. Vizte [**?**, Theorem 13.11].

□

LEMMA 121. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$ jsou nezáporné. Pak $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ a platí $\|\mu \times \nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$.*

DŮKAZ. Pro $f \in C_c(X \times Y)$ máme

$$\begin{aligned}|\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)| = |\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu(x)| \le \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}|\nu|(y)\right)\mathrm{d}|\mu|(x) \le \\ \le \|f\||\mu|(X)|\nu|(Y) = \|f\|\|\mu\|\|\nu\|.\end{aligned}$$

Díky hustotě $C_c(X \times Y)$ v $C_0(X \times Y)$ tak existuje právě jeden funkcionál $T\colon C_0(X \times Y) \to \mathbb{K}$ splňující $\|T\| \le \|\mu\|\|\nu\|$ a $Tf = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)$, $f \in C_c(X\times Y)$. Navíc je T nezáporný, neboť $\mu\times\nu$ je nezáporná míra a $C_c(X \times Y, [0,\infty))$ je hustý v $C_0(X \times Y, [0,\infty))$.

Nechť $\lambda \in M(X \times Y)$ je komplexní Radonova míra odpovídající tomuto funkcionálu dle Věty 109. Pak dle Věty 111 je λ nezáporná Radonova míra. Tedy λ i $\mu \times \nu$ jsou nezáporné Radonovy míry, které se shodují při integraci na $C_c(X \times Y)$. Dle Lemmatu 103 platí $\lambda = \mu \times \nu$ na $\mathrm{Bs}(X \times Y)$. Speciálně tak máme

$$\|\mu \times \nu\| = (\mu \times \nu)(X \times Y) = \lambda(X \times Y) = \|\lambda\| = \|T\| \le \|\mu\|\|\nu\|.$$

□

LEMMA 122. *Nechť μ_i je nezáporná konečná Radonova míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X_i, $i = 1, 2$, která má definiční obor $\mathcal{S}_i$. Nechť $\mu_1 \times \mu_2$ definovaná na $\mathcal{T}$ je míra z Věty 117 a λ definovaná na $\mathcal{S}$ je zúplnění klasického součinu měr $\mu_1 \otimes \mu_2$ definovaného na součinové σ-algebře $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$. Pak $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$ a $(\mu_1 \times \mu_2)(A) = \lambda(A)$ pro $A \in \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{A}_1 = \{A_1 \in \mathcal{S}_1;\ A_1 \times X_2 \in \mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)\}$. Pak $\mathcal{A}_1$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny, a tedy $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \mathrm{Bs}(X_1)$. Podobně vidíme, že pro $\mathcal{A}_2 = \{A_2 \in \mathcal{S}_2;\ X_1 \times A_2 \in \mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)\}$ platí $\mathrm{Bs}(X_2) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$. Tedy je-li $A_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$, $i = 1, 2$ pak $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_1) \in \mathrm{Bs}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{T}$.

Je-li nyní $N_1 \subset X_1$ množina splňující $\mu_1(N_1) = 0$, pak $(\mu_1 \times \mu_2)(N_1) = 0$ dle Věty 120. Pokud tedy $A_i \in \mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$, můžeme je disjunktně psát jako $A_i = B_i \cup N_i$, kde $B_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$ a $\mu_i(N_i) = 0$. Pak ale

$$A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup (N_1 \times B_2) \cup (N_1 \times N_2) \cup (B_1 \times N_2)$$

je disjunktní sjednocení borelovské množiny a množin $\mu_1 \times \mu_2$-nulových. Tedy $A_1 \times A_2 \in \mathcal{T}$ a dle Fubiniovy věty 119 platí

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = (\mu_1 \times \mu_2)(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1)\mu_2(B_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \lambda(A_1 \times A_2).$$

Tedy pro každý $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$-měřitelný obdélník E máme $E \in \mathcal{T}$ a $(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \lambda(E)$. Proto $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{T}$ a $\mu_1 \times \mu_2 = \lambda$ na $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$.

Nechť $E \in \mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2}$. Pak existují množiny $A \subset E \subset B$ v $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ splňující $\lambda(B \setminus A) = 0$. Pak ovšem $(\mu_1 \times \mu_2)(B \setminus A) = 0$, a tedy $E \setminus B$ je podmnožina $\mu_1 \times \mu_2$-nulové míry. Tím pádem je též $\mu_1 \times \mu_2$-nulová a platí $\lambda(E) = \lambda(B) + \lambda(E \setminus B) = (\mu_1 \times \mu_2)(B) + 0 = (\mu_1 \times \mu_2)(E)$. Tedy $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ a $\lambda = \mu_1 \times \mu_2$ na $\mathcal{S}$.

□

DEFINICE 123 (Součin Radonových měr). Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$, jsou nezáporné Radonovy míry.

Definujme

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l}(\mu_k \times \nu_l).$$

VĚTA 124. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$ jsou dány. Pak $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ a platí $\|\mu \times \nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$.*

DŮKAZ. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$ jsou nezáporné Radonovy míry. Pak

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l}(\mu_k \times \nu_l)$$

je lineární kombinace konečných Radonových měr, tedy konečná Radonova míra. Je-li $f \in C_0(X \times Y)$, platí dle Věty 117

$$\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu_k \times \nu_l) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu_l(y) \right) \mathrm{d}\mu_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu_k(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Tedy

$$\left|\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)\right| \le \int_X \left|\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y)\right| \mathrm{d}|\mu|(x) \le \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| \, \mathrm{d}|\nu|(y) \right) \mathrm{d}|\mu|(x) \le$$
$$\le \|f\|\|\mu\|\|\nu\|.$$

Tedy $\|\mu \times \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$.

$\square$