1. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

Řešte soustavu $y' = \mathbb{A}\, y$ pro následující matice $\mathbb{A}$ (případně s uvedenou počáteční podmínkou):

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 5. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$,
6. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $y(0) = (1, 1, 1)$, 9. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$,
10. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, 12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, 13. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešte soustavu $y' = \mathbb{A}\, y + b$ pro následující matice $\mathbb{A}$ a „pravé strany“ b:

14. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -4e^{-t} \end{pmatrix}$, 15. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$, 16. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} e^{t} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$,
17. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$, 18. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$, 19. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$,
20. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$, 21. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Výsledky: 1. $y(t) = (-ae^{t} + 2be^{4t}, ae^{t} + be^{4t})$, $t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, 2. $y(t) = \big((a-8b)\sin t - (8a+b)\cos t, 13a\cos t + 13b\sin t\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, 3. $y(t) = (a + 3be^{2t}, -2be^{2t} + ce^{-t}, a + be^{2t} - 2ce^{-t})$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 4. $y(t) = e^{2t}(bt + c, 2bt + b + 2c, bt + a + c)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 5. $y(t) = e^{-t}(-25a + 6c + 6bt, 15a + 2bt + b + 2c, a + 2bt + 2c)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 6. $y(t) = e^{3t}(-2a, at^2 + bt + c, -at^2 - (2a+b)t - 4a - b - c)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 7. $y(t) = \big((a+3b)e^{t}\sin t + (3a-b)e^{t}\cos t, (2a+b)e^{t}\sin t + (a-2b)e^{t}\cos t + ce^{4t}, (2b-a)e^{t}\sin t + (2a+b)e^{t}\cos t + ce^{4t}\big)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 8. $y(t) = e^{t}(-t+1, -t+1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, 9. $y(t) = \big(6be^{-t} + 6ce^{t}, 10ae^{-t} + (3a+9c)e^{t}, 3be^{-t} + (6a+3c)e^{t}\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 10. $y(t) = e^{t}(bt^2 + ct + d, \frac{1}{3}bt^2 - \frac{1}{3}(4b - c) - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, a + bt^2 + ct + d, \frac{1}{3}bt^2 - \frac{1}{3}(2b - c) - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 11. $y(t) = e^{2t}(ct + d, ct - c + d, at + b, (a+c)t - \frac{1}{3}a + b + d)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 12. $y(t) = (ct + d, (3c - \frac{5}{2}a)t + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, at + b, \frac{1}{2}at - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 13. $y(t) = \big(e^{t}(a\cos t + b\sin t) + c\cos t + d\sin t, \frac{1}{2}e^{t}((a+b)\cos t + (b-a)\sin t) + c\cos t + d\sin t, e^{t}(a\cos t + b\sin t) + (c-d)\cos t + (c+d)\sin t, e^{t}(a\cos t + b\sin t)\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
14. $y(t) = \big(e^{-t} + \frac{1}{2}ae^{t} + \frac{1}{3}be^{2t}, 2e^{-t} + ae^{t} + be^{2t}\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, 15. $y(t) = \big(\frac{1}{40}e^{t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{2}ae^{-4t} - be^{-7t}, \frac{7}{40}e^{t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + ae^{-4t} + be^{-7t}\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, 16. $y(t) = e^{t}\big(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}t\sin t - b\cos t + a\sin t, \frac{1}{2}t\cos t + a\cos t + b\sin t\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$, 17. $y(t) = e^{2t}\big(-\frac{1}{3}t^3 + bt + \frac{1}{2}(c-b), -\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t(2b-1) + c, -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t(b+3) + a\big)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 18. $y(t) = (be^{t} + 2cte^{t} + 4t + 9, (-a + 2c)e^{t} - bte^{t} - ct^2e^{t} + 2t + 11, ae^{t} + bte^{t} + ct^2e^{t} - 7t - 16)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 19. $y(t) = \big(\frac{1}{4}(t-3) + \frac{1}{2}e^{2t}(2bt + c - b), -\frac{3}{4} + e^{2t}(2bt + c), -\frac{1}{4}(2t^2 + t + 2) + e^{2t}(a + bt)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 20. $y(t) = \big(-e^{t} + e^{-t}(5a + b - 2c + 3bt), e^{-t}(c + bt), e^{-t}(a + bt)\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$, 21. $y(t) = \big(-\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t - 2ae^{3t}, \frac{73}{500}\cos t + \frac{89}{500}\sin t + e^{3t}(at^2 + bt + c), -\frac{43}{500}\cos t - \frac{49}{500}\sin t + e^{3t}(-at^2 - (2a+b)t - 4a - b - c)\big)$, $t \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Funkce více proměnných – řezy, limita a spojitost

1. Určete a nakreslete definiční obor, vrstevnice a (pokud to lze) řezy rovnoběžné s rovinami yz a xz:

$$\text{a) } x+\sqrt{y},\quad \text{b) } \frac{y}{x},\quad \text{c) } x^2+y^2,\quad \text{d) } x^2-y^2,\quad \text{e) } |x|+y,\quad \text{f) } \min\{x,y\},\quad \text{g) } \max\{x,y\},\quad \text{h) } \sqrt{xy},$$

$$\text{i) } \sqrt{1-x^2-y^2},\quad \text{j) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}},\quad \text{k) } \arcsin\frac{x}{y},\quad \text{l) } \sqrt{1-(x^2+y)^2},\quad \text{m) } \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)},$$

$$\text{n) } \sqrt{\sin(x^2+y^2)},\quad \text{o) } \operatorname{sgn}(\sin x\cdot\sin y)$$

2. Vyšetřete $\lim\limits_{x\to0}\big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\big)$, $\lim\limits_{y\to0}\big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\big)$ a $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$, kde

$$\text{a) } f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},\quad \text{b) } f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x} \text{ pro } x\neq0,\ f(0,y)=0$$

3. Vyšetřete následující limity:

$$\text{a) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2},\quad \text{b) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}},\quad \text{c) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{1}{x^2+y^4},\quad \text{d) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{e) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy}{x^2+y^2},\quad \text{f) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{g) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2}{x^2+y^2},\quad \text{h) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{x^2+y^4},$$

$$\text{i) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+(x-y)^2}},\quad \text{j) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \text{k) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^3+x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2},$$

$$\text{l) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},\quad \text{m) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2},\quad \text{n) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}},$$

$$\text{o) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{x^2y^2},\quad \text{p) } \lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]}(x^2+y^2+z^2)^{xyz},\quad \text{q) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}(x^2+y^2)^{xy},\quad \text{r) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4},$$

$$\text{s) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^4},\quad \text{t) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{\sin x\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)},\quad \text{u) } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2},\quad \text{v)* } \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}},$$

$$\text{w)* } \lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ x+y\neq0}}\frac{\sin x+\log(1+y)}{x+y}$$

4. Lze funkci $\frac{\sin(xy)}{x}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

5. Lze funkci $\frac{\sin x+\sin y}{x+y}$ rozšířit spojitě na celou rovinu?

Výsledky: 1. a) $D_f=\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, vrstevnice jsou „levé poloviny“ parabol b) $D_f=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem c) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c\ge0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{c}$ d) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou hyperboly a jedna dvojice přímek e) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině $c\in\mathbb{R}$ je graf funkce $c-|x|$ f) $D_f=\mathbb{R}^2$ g) $D_f=\mathbb{R}^2$ h) $D_f=[0,+\infty)^2\cup(-\infty,0]^2$, vrstevnice na hladině $c>0$ jsou hyperboly tvaru $\frac{c^2}{x}$, na hladině 0 je to dvojice os i) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le1\}$, vrstevnice na hladině $0\le c\le1$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1-c^2}$ j) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2>1\}$, vrstevnice na hladině $c>0$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}$ k) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ y\ge|x|>0\}\cup\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ y\le-|x|<0\}$, vrstevnice jsou přímky procházející počátkem l) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ -1-x^2\le y\le1-x^2\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, na hladině 1 jedna parabola m) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 1\le x^2+y^2\le4\}$, vrstevnice na hladině $0\le c<\frac{3}{2}$ jsou dvojice kružnic se středy v počátku a poloměry $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5\pm\sqrt{9-4c^2}}$, na hladině $\frac{3}{2}$ jedna kružnice se středem v počátku a poloměrem $\frac{\sqrt{10}}{2}$
n) $D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ 2k\pi\le x^2+y^2\le(2k+1)\pi, k\in\mathbb{N}_0\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic se středy v počátku
o) $D_f=\mathbb{R}^2$, vrstevnice na hladině -1 a 1 jsou „šachovnice“, na hladině 0 mřížka

2. a) dvojnásobné limity jsou 0, dvojná neexistuje b) prostřední limita neexistuje, ostatní jsou 0

3. a) 1 b) 0 c) $+\infty$ d) 0 e) neexistuje f) 0 g) neexistuje h) neexistuje i) 0 j) neexistuje k) 1 l) 2 m) 0 n) 1 o) 1 p) 1 q) 1 r) 0 s) neexistuje t) neexistuje u) $\frac{1}{2}$ v) 0 w) neexistuje

4. ANO

5. ANO ($f(a,-a)=\cos a$)

3. Funkce více proměnných – parciální derivace, totální diferenciál

1. Vyšetřete parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí (případně dodefinovaných nulou v počátku):

a) $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ b) e^{xy}, c) $xy + yz + xz$, d) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e) $\sqrt{x^2 + y^2}$, f) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$, g) $|xy|$,

h) $\sqrt[3]{xy}$, i) $x + y \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, j) $|y - \sin x|$, k) $\sqrt[3]{x + y^2}$, l) $\sqrt{|xy|}$, m) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, n) $\dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$,

o) $x + y + \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, p) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \log(1 + xy)$, q) $e^{-\frac{1}{x^2 + xy + y^2}}$, r) $(x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, s) $xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

t) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, u) $x^{\frac{y}{z}}$, v) x^{y^z}, w)* $|\sin y - \sin x|$, x)* $\sqrt[3]{x^2 + y} \log(x^2 + y^2)$, y)* $\dfrac{x^2 y(|x| + |y|)}{x^4 + y^2}$

Výsledky: 1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = m x^{m-1} y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = n x^m y^{n-1}$, totální diferenciál existuje všude b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$, TD existuje všude c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$, TD existuje všude d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ pro $x^2 + y^2 < 1$, TD existuje pokud $x^2 + y^2 < 1$ e) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ mimo počátek, TD existuje všude kromě počátku f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ pokud $y \ne -x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, TD existuje všude kromě $y = -x$ g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy a v počátku h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy i) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x \ge 0 \wedge y \ge x) \vee (x \le 0 \wedge y \le x)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \ne 0$ a $x \ne y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2\sqrt{1-\frac{x}{y}}}$ pro $[x, y] \in D_f$, $x \ne y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde $\frac{\partial f}{\partial x}$ j) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\operatorname{sgn}(y - \sin x)\cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(y - \sin x)$ pokud $y \ne \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo $y = \sin x$
k) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x+y^2)^2}}$ pokud $x \ne -y^2$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD
l) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}$ pokud $x \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{2}\sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}$ pokud $y \ne 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje mimo osy m) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje mimo počátek n) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje všude o) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + \frac{xy(2x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, TD existuje všude
p) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (y > -\frac{1}{x} \wedge x > 0) \vee (y < -\frac{1}{x} \wedge x < 0) \vee (x = 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} - \frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\log(1+xy)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x+y)}{(x^2+y^2)(1+xy)} + \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\log(1 + xy)$ pro $[x, y] \in D_f \setminus \{[0, 0]\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje všude mimo počátek q) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje všude r) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje všude s) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ pro $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje všude t) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \log\frac{x}{y}$, TD existuje všude u) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0 \wedge z \ne 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z}\log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \frac{y}{z^2}\log x$, TD existuje všude v) $D_f = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x > 0 \wedge y > 0\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} z y^{z-1}\log x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \log x \log y$, TD existuje všude w) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)\cos x$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(\sin y - \sin x)\cos y$ pokud $\sin y \ne \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD x) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2x\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2+y)^2}} + \frac{2y\sqrt[3]{x^2+y}}{x^2+y^2}$ pro $y \ne -x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x^2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x^2) = 0$ pokud $x^2 + x^4 = 1$, jinde PD neexistují, TD existuje tam, kde PD y) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy\left((3y^2-x^4)|x|+2(y^2-x^4)|y|\right)}{(x^4+y^2)^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3\left((x^4-y^2)\operatorname{sgn} x+2x^3|y|\right)}{(x^4+y^2)^2}$ pokud $[x, y] \ne [0, 0]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, TD existuje mimo počátek

4. Funkce více proměnných – derivace složené funkce

1. Nechť $f(u,v)=uv$ a nechť $g\colon \mathbb{R}^2\setminus\{[0,0]\}\to\mathbb{R}^2$ je definováno předpisem $g(x,y)=\bigl[(x^2+y^2)(e^x-1),\frac{y^2}{x^2+y^2}\bigr]$. Vypočtěte $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)$, kde $F=f\circ g$.

2. Nechť $\nabla f(2,2,2)=[1,2,3]$ a nechť $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $g(x,y,z)=[x+y+z,x^2+y^2+1,x^3+y^3+1]$. Vypočtěte $\nabla F(0,1,1)$, kde $F=f\circ g$.

3. Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F=f\circ g$ a $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ je dáno předpisem

$$\text{a) } g(x,y)=\sin x\cos y,\quad \text{b) } g(x,y)=\bigl[x^2+y^2,x^2-y^2,2xy\bigr],\quad \text{c) } g(x,y)=\left[\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\right].$$

4. Nechť $f:\mathbb{R}^2\to(0,+\infty)$ má všude totální diferenciál. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$, kde $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\text{a) } F(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)},\quad \text{b) } F(x,y)=f(x,y)^{f(y,x)}.$$

5. Nechť $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[1,1]$ a splňuje $f(1,1)=1$. Vyjádřete $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)$, je-li

$$\text{a) } F(x,y)=f\bigl(f(y,x),f(x,y)\bigr),\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2,\quad \text{b) } F(x,y)=f\bigl(f(x,y)^{f(y,x)},f(y,x)^{f(x,y)}\bigr).$$

6. Nechť $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $[a,b]$. Nalezněte jej, platí-li

$$\text{a) } F(r,\alpha)=f(r\cos\alpha,r\sin\alpha),\ [a,b]=[1,1],\ \frac{\partial F}{\partial r}\bigl(\sqrt{2},\tfrac{\pi}{4}\bigr)=0,\ \frac{\partial F}{\partial\alpha}\bigl(\sqrt{2},\tfrac{\pi}{4}\bigr)=4,$$

$$\text{b) } F(u,v)=f(e^u\cos v,e^u\sin v),\ [a,b]=[1,0],\ \frac{\partial F}{\partial u}(0,0)=7,\ \frac{\partial F}{\partial v}(0,0)=-1.$$

Výsledky: 1. $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)=e$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=2e-2$

2. $\nabla F(0,1,1)=[1,14,1]$

3. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f'(\sin x\cos y)\cdot\cos x\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-f'(\sin x\cos y)\cdot\sin x\sin y$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x\frac{\partial f}{\partial t}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)+2x\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)+2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y\frac{\partial f}{\partial t}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)-2y\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)+2x\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$ c) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial t}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot\frac{x}{y}-\frac{\partial f}{\partial u}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot\frac{2y}{(x-y)^2}+2\frac{\partial f}{\partial v}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial t}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot\frac{1-x^2}{2y^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}-2\frac{\partial f}{\partial v}\bigl(\frac{x^2-1}{2y},\frac{x+y}{x-y},x^2-y^2\bigr)\cdot y$

4. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)(\log f(x,y)+1)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f(x,y)^{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,y)(\log f(x,y)+1)$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f(x,y)^{f(y,x)}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\log f(x,y)+\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\Bigr)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f(x,y)^{f(y,x)}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial t}(y,x)\log f(x,y)+\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial u}(x,y)\Bigr)$

5. a) $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)=4$ b) $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)=\bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\bigr)^2+\bigl(\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\bigr)^2$

6. a) $\nabla f(1,1)=[-2,2]$ b) $\nabla f(1,0)=[7,-1]$

5. Věta o implicitních funkcích

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$. Dokažte, že tímto vztahem je v jistém okolí bodu 2 definována hladká funkce $y = \varphi(x)$, pro kterou platí $\varphi(2) = 0$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě 2 a spočtěte $\varphi''(2)$.

2. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že tímto vztahem je v jistém okolí bodu 0 definována hladká funkce $y = \varphi(x)$, pro kterou platí $\varphi(0) = 1$. Ukažte, že funkce φ je v jistém okolí bodu 0 rostoucí. Je funkce φ na nějakém okolí bodu 0 konvexní, případně konkávní?

3. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$. Dokažte, že tímto vztahem je v jistém okolí U bodu $[1, -2]$ definována hladká funkce $z = z(x, y)$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$. Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[1, -2]$.

4. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ které splňují vztah $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $z = z(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1]$, pro kterou je $z(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál funkce z v bodě $[1, 1]$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v tomto bodě.

5. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0.

a) $\sin(\sin y) + \cos(\sin x) = \sin(\cos x) + \cos(\cos y)$, $[\frac{\pi}{2}, 0]$
b) $\arcsin(x + y) + \arccos(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2}$, $[0, 0]$
c) $x^3 + y^3 = \log \frac{x^2+y^2}{2}$, $[-1, 1]$
d) $e^{2x+7y} - \log(1 + x^2 + y^2) = 1 + y$, $[0, 0]$
e) $\operatorname{arctg}\big(x + y^2 + \cos(x + y)\big) - \sin(x + y) = \frac{\pi}{4}$, $[0, 0]$
f) $x^3 + y^7 = e^{xy^2} - \sin y$, $[1, 0]$
g) $\sin^2(e^{x+y}) + \cos^2(e^{2y-x}) = 1$, $[0, 0]$
h) $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[1, 0]$
i) $y - \frac{1}{2} \sin y = x$, $[0, 0]$
j) $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[1, 0]$

6. Určete parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $z = z(x, y)$ v bodech, v jejichž okolí je tato funkce diferencovatelná. Funkce $z = z(x, y)$ je zadána rovnicí

$$\text{a) } xyz = x + y + z, \quad \text{b) } \frac{x}{z} = \log \frac{z}{y},$$

$$\text{c) } F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,\ F \in C^2(\mathbb{R}^2), \text{ určete } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\text{d) } F(xz, yz) = 0,\ F \in C^2(\mathbb{R}^2), \text{ určete } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

7. Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞ na okolí bodu 0, které splňují $y(0) = z(0) = -1$ a vztahy

$$6xyz - x - 2y - 3z = 5, \qquad e^{xz} = yz.$$

Spočtěte $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$ a $z''(0)$.

8. Ukažte, že uvedená soustava určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v proměnných x, y, které jsou třídy C^1. Spočtěte parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

$$\text{a) } x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}, \quad [1, 0, 1, 0],$$

$$\text{b) } x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [e + 1, e, 1, \pi/2],$$

$$\text{c) } xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [1, 2, 0, 0].$$

9. Najděte rovnici tečné roviny k ploše $e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$ v bodě $(1, 1, 0, \frac{\pi}{4})$.

10. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ „v bodě $u = 2$, $v = 1$“, jestliže $x = u + v^2$, $y = u^2 - v^3$, $z = 2uv$.

11. Dokažte, že existují funkce $z = z(x, y)$ a $t = t(x, y)$, pro které platí $z(1, -1) = 2$ a $t(1, -1) = 0$, a které na nějakém okolí bodu $[1, -1]$ splňují rovnice $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$, $x + y + z - t - 2 = 0$ a jsou tam třídy C^2. Spočtěte druhé parciální derivace funkcí z a t v bodě $[1, -1]$.

Výsledky: 1. rovnice tečny: $y = 0$, $\varphi''(2) = 0$ 2. $\varphi'(0) = 2$, $\varphi''(0) = -16$, 3. $L(x, y) = \frac{7}{5}(y+2) + 1$, 4. $L(x, y) = -(x-1) - (y-1) + 1$, 5. a) $-1, 0$, b) $-1, 4$, c) $-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}$, d) $-\frac{1}{3}, \frac{19}{54}$, e) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}$, f) $-3, 12$, g) $2, 0$, h) $1, 2$, i) $2, 0$, j) $0, 0$, 6. a) $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1-yz(x,y)}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1-xz(x,y)}{xy-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y(yz-1)}{(1-xy)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x(xz-1)}{(1-xy)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z+x(yz-1)+y(xz-1)}{(1-xy)^2}$, $y \neq \frac{1}{x}$, b) $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{z(x,y)}{x+z(x,y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{z^2(x,y)}{y(x+z(x,y))}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z^2}{y^2(x+z)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$, $x \neq -z$, $[x, y, z] \in \mathbb{R} \times \{yz > 0\}$, c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{F_{11}}{2zF_2} + \frac{F_1 F_{12}}{zF_2^2} - \frac{F_1^2 F_{22}}{2zF_2^3} - \frac{F_1}{4z^3 F_2} - \frac{x+y}{2z^3 F_1 F_2} - \frac{xyF_2}{4z^3 F_1}$, d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -z \frac{y\left(yz(F_1^2 F_{22} - 2F_1 F_2 F_{12} + F_2^2 F_{11}) - 2F_1^2 F_2\right) - 2xF_1^3}{(xF_1 + yF_2)^3}$, 7. $y'(0) = -2$, $z'(0) = 3$, $y''(0) = -15$, $z''(0) = 6$, 8. a) $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 1$, b) $\frac{\partial u}{\partial x}(e+1, e) = \frac{1}{e+1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}(e+1, e) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(e+1, e) = -\frac{e}{e+1}$, $\frac{\partial v}{\partial y}(e+1, e) = 1$, c) $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}$, 9. $T_u(x, y) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$, $T_v(x, y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)(y-1)$, 10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{26}{121}$, 11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(1,-) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1) = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(1,-1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1) = \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}$.

6. Lokální extrémy funkcí více proměnných

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí:

1. $x^3 + y^3 - 3xy$,
2. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
3. $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$,
4. $(1 + e^y)\cos x - ye^y$,
5. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$,
6. $e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$,
7. $x^2 + y^2 + x - 2xy$,
8. $(x - 2y)e^{xy}$,
9. $x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$,
10. $(x^2 - xy - z^2)e^{x+y}$,
11. $x + y + 4\sin x \sin y$,
12. $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
13. $x^3 + y^2 + 12xy$,
14. $x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,
15. $x^2y^3(6 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$,

16.* $x^2y^3(6 - x - y)$,

17.* $x^4 - y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Výsledky:

1. $[0, 0]$ není lok. extrém, $[1, 1]$ lok. minimum, 2. $[-1, -1]$ a $[1, 1]$ ostrá lokální minima, $[0, 0]$ sedlový bod, 3. $[5, 2]$ ostré lokální minimum, 4. $[2k\pi, 0]$ ostré lokální maximum, $[(2k + 1)\pi, -2]$ sedlový bod, $k \in \mathbb{Z}$, 5. $[0, 0, 0]$ sedlový bod, $[2, 2, 2]$ ostré lokální minimum, 6. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}]$ sedlový bod, 7. nemá kritické body, 8. $[-1, \frac{1}{2}]$ a $[1, -\frac{1}{2}]$ sedlové body, 9. $[1, 2]$ ostré lokální minimum, 10. $[0, 0, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0]$ sedlové body, 11. $[\frac{7}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální maximum pro k sudé, sedlový bod pro k liché, $[\frac{11}{12}\pi + l\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{11}{12}\pi + l\pi - k\frac{\pi}{2}]$ ostré lokální minimum pro k liché, sedlový bod pro k sudé, 12. $[0, 0]$ ostré lokální minimum, $[x, y]$ splňující $x^2 + y^2 = 1$ lokální maximum, 13. $[24, -144]$ ostré lokální minimum, $[0, 0]$ sedlový bod, 14. $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ ostré lokální minimum, $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ ostré lokální maximum, 15. $[2, 3]$ ostré lokální maximum, 16. $[2, 3]$ ostré lokální maximum, $[x, 0]$ sedlové body, $[0, y]$ lokální maxima pro $y < 0$ a $y > 6$, lokální minima pro $y \in (0, 6)$, sedlové body pro $y = 0$ a $y = 6$, 17. $[0, 0]$ sedlový bod

7. Globální extrémy funkcí více proměnných

Najděte $\sup_M f$ a $\inf_M f$ a zjistěte, zda funkce f těchto hodnot na M nabývá:

1. Elementární metody:

a) $f(x,y) = x+y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$,
b) $f(x,y) = e^x, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+2y^2 \le 1\}$,
c) $f(x,y) = x^2+y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}$,
d) $f(x,y) = x, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 2 \ge x \ge 0, 1 \ge y \ge 0, 2x+y \le 2\}$,
e) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+4y^2 = 1\}$,
f) $f(x,y,z) = (x+y)^2+(x-y)^2+z, \quad M = \langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$,
g) $f(x,y) = \frac{x}{a}+\frac{y}{b}, a>0, b>0, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$,
h) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z, \quad M = \mathbb{R}^3$,
i) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad M = \mathbb{R}^2$,
j) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \le 1\}, a>b>c>0$,
k) $f(x,y) = x^2-xy+y^2, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ |x|+|y| \le 1\}$.
l) $f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ 80x+12y+10z = 24000, x>0, y>0, z>0\}$,
m) $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x>0, y>0\}$.

2. Úlohy na Lagrangeovu větu o multiplikátorech:

a) $f(x,y,z) = xyz, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$,
b) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$,
c) $f(x,y,z) = xy^2z^3, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x+2y+3z = a, x>0, y>0, z>0\}, a>0$,
d) $f(x,y) = x+y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3+y^3-2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}$,
e) $f(x,y) = y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2) = 0\}$,
f) $f(x,y) = x^2+y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 4y^3-4y+x^2 = 0, y \ge 0\}$,
g) $f(x,y) = x^4y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4+y^4 \le 16, x \ge -1\}$,
h) $f(x,y) = 2x+4y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$,
i) $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2+xy+y^2), \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = 1, |z| \le 1\}$,
j) $f(x,y) = -y^2+x^2+\frac{4}{3}x^3, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4, x \le 0\}$,
k) $f(x,y,z) = xy+yz, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$,
l) $f(x,y,z) = 10z+x-y, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x+y \ge 0\}$,
m) $f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+4y^2 \le 1\}$,
n) $f(x,y,z) = z+e^{xy}, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 = z^2\}$,
o) $f(x,y,z) = x^2+2xz+y^2+z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, x = y^2+z^2\}$,
p) $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Výsledky:

1. a) max $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, min $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, b) max $[1,0]$, min $[-1,0]$, c) max $[0,1]$, $[1,0]$, min $[0,0]$, d) max $[1,0]$, min $[0,t]$, $t \in \langle 0,1\rangle$, e) max $[\pm 1, 0]$, min $[0,0]$, f) max $[\pm 1,1,1]$, $[\pm 1,-1,1]$, min $[0,0,-1]$, g) max $[b/\sqrt{a^2+b^2}, a/\sqrt{a^2+b^2}]$, min $[-b/\sqrt{a^2+b^2}, -a/\sqrt{a^2+b^2}]$, h) sup $+\infty$, min $[-1,-2,3]$, i) max v každém bodě jednotkové kružnice, min $[0,0]$, j) max $[\pm a, 0, 0]$, min $[0,0,0]$, k) , l) max $[150, 500, 600]$, inf 0 se nenabývá, m) sup $\frac{1}{2e}$, inf 0, nenabývají se

2. a) max $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,-1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,1,-1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,-1,1]$, min $\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,1,1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,-1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,-1,-1]$, b) max $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, inf 0 nenabývá, c) max $[a/6, a/6, a/6]$, inf 0 nenabývá, d) max $[1,1]$, min $[0,0]$, e) max $[\pm\sqrt{3}/2, 1/2]$, min $[\pm\sqrt{3}/2, -1/2]$, f) max $[\pm\sqrt{7\sqrt{5/12}/3}, \sqrt{5/12}]$, min $[0,0]$, g) max $[2\sqrt{2}/\sqrt[4]{5}, 2/\sqrt[4]{5}]$, min $[2\sqrt{2}/\sqrt[4]{5}, -2/\sqrt[4]{5}]$, h) max $[0,1]$, min $[0,0]$, i) max $\pm[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0]$, min $[\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, -1]$, $[\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 1]$, j) max $[-\frac{1}{2}, 0]$, min $[-2, 0]$, k) max $[\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1 \mp \sqrt{5})]$, min $[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, l) max $\frac{1}{\sqrt{102}}[1,-1,10]$, min $\frac{1}{\sqrt{102}}[-1,1,-10]$, m) max $[0, \pm\frac{1}{2}]$, min $[0,0]$, n) max $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, min $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, o) max $[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 0, \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}]$, min $[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 0, -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}]$, p) max $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, min $[0,0]$