Věta 1 (AG nerovnost)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Potom*
$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Důkaz. Položme
$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = C \geq 0. \tag{1}$$
Pokud se nám podaří ukázat, že $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq C$ pro všechna nezáporná a_i splňující (1), máme vyhráno. Budeme tedy hledat extrémy funkce
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$
na množině
$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 + \dots + x_n = Cn,\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$
Ve skutečnosti ovšem, abychom si ulehčili práci, budeme vyšetřovat extrémy funkce $\tilde{f} = x_1 x_2 \dots x_n$, která na M nabývá extrémů ve stejných bodech jako f. Pokud je alespoň jedno $x_i = 0$ (a jsme tedy na „hranici“ množiny M), máme $\tilde{f} = 0$. Na zbytku množiny M použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je dána funkcí $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - Cn$, jejíž gradient je zjevně $\operatorname{grad} g = (1, \dots, 1)$ a můžeme tedy bez obav pokračovat. Derivováním Lagrangeovy funkce $\tilde{f} + \lambda g$ dostáváme soustavu
$$\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_i} + \lambda = 0, \quad i = 1, \dots n,$$
která nám po převedení λ na pravou stranu a vzájemném vydělení rovnic dává $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Dosazením do vazby tedy dostáváme $x_1 = x_2 = \dots = x_n = C$. Funkce $\tilde{f}$ je spojitá, na kompaktní množině M tedy nabývá svého maxima. Protože na „hranici“ množiny M je $\tilde{f} = 0$ a na zbytku je pouze jediný podezřelý bod s hodnotou $\tilde{f}(C, \dots, C) = C^n \geq 0$, je tento bod nutně bodem maxima $\tilde{f}$ (a tedy i f) vzhledem k M. Je $\max_M f = f(C, \dots, C) = C$ a nerovnost je dokázána.

□

Věta 2 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \geq 0$, $x_1, \dots, x_n \geq 0$, $p > 1$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom*
$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Všimněme si, že označíme-li $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, je výše uvedená nerovnost ekvivalentní se zapamatovatelnější nerovností
$$|(a, x)| \leq \|a\|_p \, \|x\|_q \, ,$$
kde $(\cdot, \cdot)$ značí obvyklý skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^n$. Číslům p a q se říká sdružené exponenty.

Důkaz. Důkaz provedeme jednoduchou indukcí. Pro $n = 1$ je nerovnost triviální. Předpokládejme pro dané $m > 1$ platnost nerovnosti pro všechna $n < m$ a dokažme ji pro $n = m$. Podobně jako v předchozím důkazu problém převedeme na vyšetřování extrémů funkce
$$f(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m x_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$
na množině $M = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = C,\ x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0\}$, kde $a_1, \dots, a_m$ jsou předem pevně dané parametry. Opět pro zjednodušení budeme vyšetřovat funkci $\tilde{f} = \sum_{i=1}^m x_i^q$, která bude nabývat extrémy na M ve stejných bodech jako f.

Pokud je alespoň jedno $x_i = 0$ (a jsme tedy na „hranici“ množiny M), máme (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_m = 0$):
$$\sum_{i=1}^m a_i x_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$
(První nerovnost platí díky indukčnímu předpokladu.)

Na zbytku množiny M použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je dána funkcí $g(x_1, \dots, x_m) = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m - C$, jejíž gradient je $\operatorname{grad} g = (a_1, \dots, a_m)$, což by nám mohlo zabránit v použití věty o Lagrangeových multiplikátorech pouze v případě $a_1 = \dots = a_m = 0$, kdy je ale nerovnost triviální. Derivováním Lagrangeovy funkce $\tilde{f} + \lambda g$ tedy dostáváme soustavu
$$q x_i^{q-1} + \lambda a_i = 0, \quad i = 1, \dots m.$$

Po převedení druhého sčítance na pravou stranu a vydělení i-té rovnice první rovnicí dostaneme

$$\frac{x_i^{q-1}}{x_1^{q-1}} = \frac{a_i}{a_1}, \quad i = 2, \dots, m,$$

tedy $x_i = x_1(a_i/a_1)^{\frac{1}{q-1}}$ a po dosazení do vazby dostáváme pro souřadnice bodu podezřelého z extrému

$$x_i = \frac{Ca_i^{\frac{1}{q-1}}}{\sum\limits_{i=1}^m a_i^{1+\frac{1}{q-1}}} = \frac{Ca_i^{\frac{1}{q-1}}}{\sum\limits_{i=1}^m a_i^p}.$$

Funkce f je spojitá, na kompaktní množině M tedy nabývá svého minima. Protože na „hranici“ množiny M je (díky indukčnímu předpokladu) $f \geq C$ a na zbytku je pouze jediný podezřelý bod x s hodnotou

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \frac{C}{\sum\limits_{i=1}^m a_i^p} \left(\sum_{i=1}^m a_i^{\frac{q}{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} C \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{\frac{1}{q}-1} = C,$$

je tento bod nutně bodem minima f vzhledem k M a nerovnost je dokázána.

□

Věta 3 (Hadamardova nerovnost). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})$ je reálná čtvercová matice řádu n. Potom*

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

K důkazu budeme potřebovat několik faktů z lineární algebry. $A = (a_{ij})$ je ve všech případech reálná čtvercová matice řádu n.

Fakt 4 (Determinant transponované matice). $\det A = \det A^T$.

Fakt 5 (Rozvoj determinantu podle řádku). $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \det A$, *kde A_{kj} je algebraický doplněk prvku a_{kj} a $\delta_{ik} = 1$ pokud $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ jinak.*

Fakt 6 (Součin determinantů). *Pro čtvercové matice A a B platí* $\det AB = \det A \det B$.

Fakt 7 (Inverzní matice). *Je-li A regulární (tj. $\det A \neq 0$), potom $A^{-1} = B$, kde $B = (b_{ij})$ a $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$.*

Důkaz Věty 3. Budeme hledat maximum spojité funkce $f\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = (\det A)^2$ na množině $M = \{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = s_i,\ i = 1, \dots, n\}$ pro nějaké dané konstanty $s_i \geq 0$. Jestliže je $s_i = 0$ pro nějaké i, je nutně i-tý řádek matice A nulový vektor a tedy $\det A = 0$. Tedy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $s_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Množina M je uzavřená a omezená ($\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = s_1 + \cdots + s_n$, takže M je částí sféry v $\mathbb{R}^{n^2}$ o poloměru $\sqrt{s_1 + \cdots + s_n}$), tedy kompaktní a f na ní nepochybně nabývá svých extrémů.

Tentokrát máme n vazebních podmínek: $M = \{g_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{nn}) = 0, \dots, g_n(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{nn}) = 0\}$, kde $g_i(\cdot) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - s_i$. Tedy

$$\operatorname{grad} g_i(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n(i-1)}, 2a_{i1}, \dots, 2a_{in}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n(n-i)}),$$

čili vektory $\operatorname{grad} g_i$ jsou lineárně nezávislé, pokud pro každé $i = 1, \dots, n$ existuje $j = 1, \dots, n$, že $a_{ij} \neq 0$, což je ovšem zajištěno podmínkami $s_i > 0$ a proto můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech. Použitím Faktu 5 vypočítáme

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = 2 \det A \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = 2 \det A \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} = 2A_{ij} \det A,$$

takže soustava rovnic vzniklá derivováním Lagrangeovy funkce vypadá následovně:

$$A_{ij} \det A + \lambda_i a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Vynásobíme-li (i,j)-tou rovnici číslem a_{ij} a sečteme-li pro pevné i rovnice $(i,1)$ až (i,n), dostaneme (opětovným použitím Faktu 5) $(\det A)^2 + \lambda_i s_i = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Vyjádříme-li z těchto rovnic λ_i a dosadíme do (2), dostáváme

$$A_{ij} \det A = (\det A)^2 \frac{a_{ij}}{s_i}, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n.$$

Nyní jsou dvě možnosti: $\det A = 0$, čímž dostáváme jednu sadu podezřelých bodů, ve kterých má f evidentně minimum, anebo můžeme předchozí sadu rovnic upravit vydělením $(\det A)^2$ na

$$\frac{A_{ij}}{\det A} = \frac{a_{ij}}{s_i}, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n.$$

To ovšem znamená (viz. Fakt 7), že definujeme-li matici $B = (b_{ij})$ jako $b_{ij} = a_{ij}/s_i$, platí $A^{-1} = B^T$, neboli $AB^T = I$. Díky tvaru matice B ovšem jednotlivé prvky matice (AB^T) jsou (až na multiplikativní konstanty s_i) vlastně skalární součiny dvojic řádků matice A. To nám říká, že jednotlivé řádky matice A jsou v druhé sadě podezřelých bodů navzájem ortogonální. Pomocí Faktu 4 a Faktu 6 můžeme spočítat hodnotu f v těchto bodech:

$$(\det A)^2 = \det A \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix} = s_1 \cdots s_n.$$

V těchto bodech tedy f nabývá svého maxima vzhledem k M a nerovnost je dokázána.

$\square$

Hadamardova nerovnost má jednoduchou geometrickou interpretaci: Chápeme-li řádkové vektory matice A jako vektory v $\mathbb{R}^n$, potom tato nerovnost nám říká, že objem rovnoběžnostěnu vygenerovaného řádkovými vektory matice A je nejvýše roven součinu délek těchto vektorů. Navíc v průběhu důkazu vidíme, že maximální možný objem má rovnoběžnostěn právě když jsou jeho generující vektory navzájem kolmé a jedná se tedy o kvádr.