Obsah

Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Lineární rovnice – připomenutí

Tato kapitola má charakter úvodu. Jsou v ní připomenuty základní pojmy a je velmi pravděpodobné, že se s nimi čtenář již setkal. Ukazuje také, že již nejjednodušší diferenciální rovnice mohou popisovat praktické úlohy, jejichž řešení je pro nás nejen zajímavé, ale i užitečné.

Při zavádění exponenciály jste poznali, že tato funkce vyhovuje na $\mathbb{R}$ rovnici $f' - f = 0$, tj. rovnici

$$f'(x) - f(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.1}$$

Taková rovnice (1.1) se obvykle zapisuje ve tvaru (neznámá funkce se značívá y)

$$y' - y = 0\,. \tag{1.2}$$

Rovnici se snažíme řešit na co největším otevřeném intervalu; v případě rovnice (1.2) je to $\mathbb{R}$. Protože derivace y' jakéhokoli řešení je (konečná) funkce y, bude každé řešení y spojité. Z rovnosti (1.2) vyplývá, že bude mít dokonce spojité derivace jakéhokoli řádu. Dosazením zjistíme, že jedním řešením rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$ je funkce exponenciála exp; pro toto řešení je $\exp 0 = 1$. Snadno ověříme, že i každá funkce tvaru $C \cdot \exp$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je řešením (1.2). Tato funkce nabývá v bodě 0 hodnoty C.

Najít řešení exp rovnice (1.2) a tím dokázat *existenci* řešení na $\mathbb{R}$ bylo v tomto případě velmi jednoduché, protože je stačilo uhádnout a dosadit do rovnice. Odpověď na *zásadní* [1]) otázku, jestli má rovnice (1.2) kromě uvedených řešení ještě nějaká další řešení, spolu s nalezením podmínky, která by řešení *určila jednoznačně*, je složitější. Potřebujeme k tomu větu o přírůstku funkce, resp. její důsledek : *Funkce f, pro kterou je $f'(t) = 0$ pro všechna $t \in (c, d)$, je na (c, d) konstantní.* [Zvolíme-li libovolně $x_0 \in (c, d)$ a pak jakékoli $x \neq x_0$, plyne z věty o přírustku

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\zeta) = 0\,,$$

neboli $f(x) = f(x_0)$. Proto je taková funkce konstantní.]

[1]) Tato otázka je důležitá např. z hlediska aplikací. Představme si, že diferenciální rovnice modeluje nějaký proces, který bychom chtěli popsat jiným vztahem, ve kterém nevystupují derivace. Tento vztah nám poskytne řešení. Pokud není jediné, vybíráme si takové, které je z praktických důvodů nejlepší. K tomu ale potřebujeme znát *všechna* řešení, jinak bychom nemuseli k optimálnímu řešení dospět.

Předpokládejme nyní, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je nějaké řešení rovnice (1.2). Protože

$$\Big(\frac{y}{\exp}\Big)' = \frac{y' \exp - y \exp}{(\exp)^2} = \frac{y' - y}{\exp} = 0\,,$$

je podíl $y/\exp$ konstantní na $\mathbb{R}$, tj. existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $y/\exp = C$ na $\mathbb{R}$. Každé řešení rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$ má tedy tvar $C\exp$, kde C je *nějaká* konstanta a žádná jiná řešení neexistují.

Funkce $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je řešením rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$, právě když má tvar $C\exp$, kde $C \in \mathbb{R}$. Jedinou konstantou C, pro niž má řešení v bodě 0 (předem danou) hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$, je zřejmě $C = y_0$. *Konstantu C lze tedy jednoznačně určit tím, že předepíšeme, jakou hodnotu má řešení nabývat v bodě* 0.

Obecněji: Je-li $[\,x_0, y_0\,]$ libovolný bod roviny $\mathbb{R}^2$, existuje zřejmě právě jedna konstanta C tak, že $y_0 = C\exp x_0$; je to konstanta $C = y_0 \exp(-x_0)$. Každým bodem roviny prochází graf právě jednoho řešení rovnice (1.2). Proto *obecnější podmínka, že graf řešení obsahuje (předem daný) bod $[\,x_0, y_0\,]$, určuje řešení rovnice* (1.2) *jednoznačně.*

Snadno lze ověřit, že řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ na $\mathbb{R}$ je funkce cos. Dalším řešením na $\mathbb{R}$ je funkce sin a také každá funkce tvaru $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ s $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ [snadno se o tom přesvědčíme dosazením]. Vůbec však není zřejmé, zda lze *každé řešení rovnice $y'' + y = 0$ vyjádřit v tomto tvaru.* Naznačené otázky patří v teorii diferenciálních rovnic k těm jednodušším. Budeme je postupně řešit, avšak v obecnějším kontextu.

Úmluva 1.1.1. Zatím jsme některé pojmy chápali intuitivně, připomeňme proto terminologií a běžně užívané označení. Neznámá funkce se obvykle značí y a její proměnná se při zápisu zpravidla vynechává. Tak např. píšeme poněkud nelogicky

$$y' = x^{-1}\,, \quad x \in (0, \infty)\,, \tag{1.3}$$

což je rovnice známá z vyšetřování [přirozeného] logaritmu. Často se též vynechává interval, na kterém máme rovnici řešit. Pokud bychom v (1.3) vynechali $x \in (0, \infty)$, rozumí se automaticky, že hledáme řešení na všech intervalech $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tedy na *všech intervalech*, kde má rovnice smysl. Poznamenejme ještě, že ve fyzice a technice se často při derivování funkce závislé na čase užívá k označení derivace místo čárky tečka.

Nejvyšší derivace neznámé funkce, která v rovnici „efektivně vystupuje", určuje **řád rovnice**. Objasníme to na příkladech: rovnice $y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *druhého* řádu, rovnice $y'' - y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *prvního* řádu, zatímco rovnici $y' - y' - y = 2x$ za diferenciální rovnici vůbec nepovažujeme. V této kapitole se budeme převážně věnovat zkoumání velmi jednoduchých, pro fyziku však značně důležitých rovnic 1. řádu, které se užívají např. k popisu radioaktivního rozpadu, ale i k popisu růstu populací, atp. Jsou to rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{1.4}$$

kde a, b jsou spojité funkce na intervalu (c, d). [Všechny spojité funkce na intervalu (c, d) tvoří lineární prostor $\mathcal{C}(c, d)$]. S některými rovnicemi tohoto typu jsme se již dříve seznámili.

I když jsme při popisu metod hledání primitivních funkcí výslovně o diferenciálních rovnicích nemluvili, lze úlohu nalézt primitivní funkci k dané funkci f interpretovat jako jednoduchou diferenciální rovnici. Důležitým tvrzením, které budeme velmi často užívat, je věta *o existenci primitivní funkce F k funkci f spojité na* $(c, d) \subset \mathbb{R}$ [Její důkaz je složitější a lze ho založit na základních poznatcích z teorie Riemannova integrálu nebo na stejnoměrné aproximaci polynomy (Weierstrassova věta)].

Definice 1.1.2. Každou funkci φ definovanou na intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$, pro kterou existuje derivace φ' na (γ, δ) a

$$\varphi'(x) + a(x)\,\varphi(x) = b(x)\,, \quad x \in (\gamma, \delta)\,,$$

nazýváme **řešením rovnice** (1.4).

Poznámky 1.1.3. 1. Protože *předpokládáme spojitost* funkcí a a b v intervalu (c, d) a protože každé řešení y rovnice (1.4) v intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ je spojité, plyne z identity $y' = b - ay$, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$ [Lineární prostor všech funkcí f na (γ, δ), které mají spojitou n-tou derivaci (a tedy všechny derivace f^k pro $k = 1, 2, \ldots, n$), značíme $\mathcal{C}^{(n)}(\gamma, \delta)$]. Vidíme tedy, že stačí hledat řešení *pouze mezi funkcemi z* $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$.

2. O rovnici (1.4) říkáme, že je to **lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou** b [2]). Při řešení této rovnice hraje významnou roli též rovnice

$$y' + a(x)y = 0\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{1.5}$$

kterou z rovnice (1.4) dostaneme volbou $b \equiv 0$. O ní zpravidla mluvíme jako o rovnici s **nulovou pravou stranou** nebo jako o **homogenní rovnici**. Poněkud absurdnímu (ale někdy užívanému) termínu „rovnice bez pravé strany“ se budeme zásadně vyhýbat. Tato úmluva nám umožňuje krátce a jednoduše se o obou rovnicích (1.4) a (1.5) domlouvat. Obecně je nutno dávat pozor na kontext, neboť termín „homogenní“ se v příbuzných matematických disciplínách vyskytuje také v jiných významech.

3. Termín **lineární** v tomto kontextu souvisí s tím, že označíme-li

$$L(y) = y' + a(x)y\,, \quad y \in \mathcal{C}^{(1)}(c, d)\,, \tag{1.6}$$

je L *lineární* zobrazení z $\mathcal{C}^{(1)}(c, d)$ do $\mathcal{C}(c, d)$ (Připomeňme, že předpokládáme spojitost funkce a; jak se ukáže, je to dokonce zobrazení *na* $\mathcal{C}(c, d)$). Zřejmě pro každé dvě funkce $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(c, d)$ a všechna $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ je tedy

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2)\,.$$

Linearita zobrazení na levé straně rovnice značně usnadňuje nalezení všech jejích řešení; později se ukáže, že stejným způsobem lze linearitu využít i za mnohem obecnější situace.

4. Pracujeme s funkcemi jediné reálné proměnné a jejich derivacemi. Protože mluvíme o derivacích a nikoli o *parciálních derivacích*, je zvykem označovat námi studované rovnice jako **obyčejné diferenciální rovnice** (ODR) a tak je odlišovat od **parciálních diferenciálních rovnic** (PDR). Obě zkratky se užívají i v anglicky psané literatuře, přičemž např. ODR zkracuje „ordinary differential equation“.

Definice 1.1.4. Nechť φ je pevně zvoleným řešením diferenciální rovnice (1.4) v intervalu (γ, δ). Jestliže pro každé řešení ψ rovnice (1.4) definované na intervalu $(\gamma_1, \delta_1) \supset (\gamma, \delta)$ plyne z rovnosti $\psi|(\gamma, \delta) = \varphi$ i rovnost $(\gamma, \delta) = (\gamma_1, \delta_1)$, nazývá se řešení φ **maximální řešení** (1.4). Jinak řečeno: maximální řešení není *netriviální* restrikcí žádného jiného řešení. Systém *všech maximálních řešení* rovnice (1.4) nazýváme **obecné řešení rovnice** (1.4).

[2]) Hlubší pohled na diferenciální rovnice získá čtenář teprve po přečtení další části textu.

Řešit jakoukoli ODR znamená najít její obecné řešení. Není-li obor vymezen přesně, řešíme rovnici na všech maximálních otevřených intervalech, na nichž má rovnice smysl; to je úmluva, kterou se řídíme při řešení příkladů, u kterých se často specifikace intervalu, vůči němuž obecné řešení hledáme, vynechává. Poznamenejme ještě, že když máme najít např. takové maximální řešení rovnice (1.4), které vyhovuje pro danou dvojici $[\,x_0, y_0\,] \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \in (c, d)$, podmínce $y(x_0) = y_0$, je to *jiná* úloha, s níž se setkáme později.

Příklad 1.1.5. Množina funkcí $\{\log + C\,;\, C \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením diferenciální rovnice $y' = 1/x$, $x \in (0, \infty)$. Funkce log je charakterizována touto diferenciální rovnicí spolu s další podmínkou, např. $y(1) = 0$; takovým způsobem se někdy funkce (přirozený) logaritmus definuje. Povšimněte si, že pracujeme s řešeními *vždy na intervalu*, podobný pojem pro obecnější množinu nezavádíme. Pokud by nebyl specifikován interval $(0, \infty)$, museli bychom nalézt též obecné řešení rovnice na intervalu $(-\infty, 0)$.

Někdy se setkáte, např. v tabulkách, se vzorcem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + C\,.$$

Ten naznačuje, že všechny primitivní funkce k funkci $1/x$ tvoří systém $\{\,\log|x|+C\,,\ C \in \mathbb{R}\,\}$. Avšak jejich společným definičním oborem je sjednocení dvou disjunktních intervalů $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Správně by měl být chápán tak, že primitivní funkce k funkci $1/x$, $x \in (0, +\infty)$, tvoří systém $\{\,\log x + C_1\,,\ C_1 \in \mathbb{R}\,\}$, $x \in (0, +\infty)$ a současně primitivní funkce k funkci $1/x$, $x \in (-\infty, 0)$, tvoří systém $\{\,\log(-x) + C_2\,,\ C_2 \in \mathbb{R}\,\}$, $x \in (-\infty, 0)$. Konstanty C_1, C_2 jsou však navzájem zcela nezávislé!

Věnujme se nyní rovnici (1.5). Dokážeme, že pro ni je struktura řešení podobná jako u rovnice (1.2). Připomeňme, že přitom podstatně využíváme Poznámky 1.1.3.

Lemma 1.1.6. *Všechna řešení rovnice* (1.5) *definovaná na intervalu* (γ, δ) *tvoří lineární podprostor prostoru* $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$*. Dimenze tohoto prostoru je* 1 [3]).

Důkaz. Z linearity operátoru L z (1.6) plyne, že jsou-li y_1, y_2 řešeními rovnice (1.5) na (γ, δ) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, je také $c_1 y_1 + c_2 y_2$ řešením rovnice (1.5) na (γ, δ), tj. platí

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0\,.$$

K důkazu, že maximální řešení tvoří jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$, užijeme podobného obratu jako výše. Je-li A primitivní funkce k funkci a, tj. platí $A' = a$, potom se lze dosazením snadno přesvědčit, že funkce

$$y(x) = \exp(-A(x))\,, \quad x \in (\gamma, \delta)\,, \tag{1.7}$$

je řešením (1.5). Z Poznámky 1.1.3 (3) plyne, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je také funkce Cy řešením rovnice (1.5). Nyní dokážeme, že *každé řešení rovnice* (1.5) *je násobkem funkce* $\exp(-A(x))$. K tomu stačí uvážit, že pro *každé* řešení y rovnice (1.5) na (γ, δ) platí

$$\left(\frac{y(x)}{\exp(-A(x))}\right)' = \frac{y'(x)\exp(-A(x)) + y(x)\exp(-A(x))a(x)}{\exp^2(-A(x))} = $$
$$= \frac{y'(x) + a(x)y(x)}{\exp(-A(x))} = 0\,,$$

a tedy je tento podíl konstantní funkcí na (γ, δ). Tím je důkaz dokončen. □

---

[3]) Použijeme-li znalostí z lineární algebry, je tento prostor jádrem $\operatorname{Ker} L$ operátoru L.

Poznámka 1.1.7. Maximální interval, na němž existuje primitivní funkce k funkci a, pomocí které popisujeme řešení (1.5) vztahem (1.7), je interval (c, d) z (1.4).

Lemma 1.1.8. *Je-li y_1 řešení rovnice* (1.4) *na* (γ, δ) *a* y_2 *řešení rovnice* (1.5) *na* (γ, δ), *pak je součet* $y_1 + y_2$ *řešením rovnice* (1.4) *na* (γ, δ). *Jsou-li* y_1, y_2 *dvě řešení rovnice* (1.4) *na intervalu* (γ, δ), *je jejich rozdíl* $y_1 - y_2$ *řešením rovnice* (1.5) *na* (γ, δ).

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = b + 0 = b$. Podobně snadno spočteme $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = b - b = 0$. $\square$

Teoreticky lze obecné řešení rovnice (1.4) určit dvojím nalezením primitivních funkcí [4]): Je-li y řešení této rovnice a je-li A nějaká primitivní funkce k funkci a v intervalu (c, d), je

$$\big(y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)' = \big(y'(x) + a(x)\,y\big)\mathrm{e}^{A(x)} = b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = B'(x)\,, \tag{1.8}$$

kde $B = B(x)$ je nějaká primitivní funkce k funkci $b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$. Porovnáme-li první a poslední výraz v (1.8), pak z již zmíněného důsledku věty o střední hodnotě plyne pro všechna $x \in (c, d)$ a vhodně zvolenou konstantní funkci C

$$y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = C + B(x)\,; \tag{1.9}$$

odtud snadno plyne

$$y(x) = \big(C + B(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} + B(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,. \tag{1.10}$$

V tomto tvaru lze napsat kterékoli řešení rovnice (1.4). Obráceně: Má-li funkce y na intervalu (c, d) tento tvar s libovolně zvolenou konstantní funkcí C, je

$$y' = \big(B'(x) - a(x)(C + B(x))\big)\exp(-A(x))\,,$$

takže pomocí (1.8) dostáváme

$$y' + a(x)\,y = B'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \big(b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)\,;$$

funkce y popsaná pomocí (1.10) je tedy řešením rovnice (1.4). Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme zformulovat výsledek: *Při zavedeném označení je y řešením rovnice* (1.4), *právě když platí* (1.10), *kde C je konstantní reálná funkce* [5]). Popsaný postup budeme nazývat **metoda integračního faktoru**. Integračním faktorem je zde funkce $\mathrm{e}^{A(x)}$.

Je vhodné si ještě uvědomit, že je sice existence primitivních funkcí k funkcím $a(x)$ a $b(x)\exp(A(x))$, $x \in (c, d)$, zaručena jejich spojitostí, ale tyto primitivní funkce mohou být jen velmi obtížně popsatelné pomocí tzv. elementárních funkcí, případně je to dokonce nemožné. Výsledky shrneme do následující věty:

Věta 1.1.9. *Je-li y_1 jakékoli maximální řešení rovnice* (1.4), *je obecné řešení rovnice* (1.4) *identické s množinou všech součtů tvaru* $y_1 + y_2$, *kde* y_2 *je nějaké maximální řešení rovnice* (1.5). *Jinak řečeno: abychom získali obecné řešení rovnice* (1.4), *stačí ke všem prvkům obecného řešení* (1.5) *přičíst jedno pevně zvolené maximální řešení* y_2 *rovnice* (1.4) [6]).

---

[4]) V dnes již neužívané terminologii dvojí kvadraturou.

[5]) Zpravidla do zápisu výsledku přidáváme $C \in \mathbb{R}$ a chápeme rovnost (1.10) „bodově".

[6]) Pro stručnější vyjadřování při popisu procesu řešení diferenciální rovnice (1.4) se zvolené (maximální) řešení y_2 často nazývá *partikulární řešení* rovnice (1.4).

Důkaz. Zvolme jedno maximální řešení y_1 rovnice (1.4). Je-li y libovolné maximální řešení rovnice (1.4), platí $y = y_1 + (y - y_1)$, z čehož pomocí Lemmatu 1.1.8 plyne tvrzení věty. □

Poznámka 1.1.10. Známe-li tvar řešení rovnice (1.5), lze určení jednoho (partikulárního) řešení rovnice (1.4) do značné míry „zmechanizovat“. Další metoda řešení rovnice, kterou později zobecníme, se nazývá **metoda variace konstant**. V tomto případě jde o jedinou konstantu, takže výpočet je opět jednoduchý. Již víme, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je

$$y(x) = C \exp(-A(x)), \quad x \in (c, d),$$

obecným řešením (1.5), pokud $A' = a$. Budeme nyní hledat řešení rovnice (1.4) ve tvaru

$$y(x) = C(x) \exp(-A(x)), \quad x \in (c, d),$$

kde C je (nějaká) funkce, která má vlastní derivaci pro všechna $x \in (c, d)$. Zderivováním a dosazením do (1.4) dostaneme pro všechna tato x

$$C'(x) \exp(-A(x)) + C(x) \exp(-A(x))(-a(x)) + \\ + C(x) \exp(-A(x))\, a(x) = b(x),$$

tj. platí (máme i zároveň jakousi kontrolu, členy na druhém a třetím místě na levé straně se *vždy* musí „zrušit“)

$$C'(x) = b(x) \exp(A(x)). \tag{1.11}$$

Vpravo je funkce z $\mathcal{C}(c, d)$, existuje tedy k ní (alespoň jedna) primitivní funkce a ta po dosazení za $C(x)$ dá vzorec pro partikulární řešení rovnice (1.4). Užitím (1.11) snadno nahlédneme, že funkce C je vždy z $\mathcal{C}^{(1)}(c, d)$. Čtenář si může povšimnout, že při tomto postupu hledáme tytéž dvě primitivní funkce, jejichž *existenci* jsme výše dostali ze spojitosti. Ukázkám praktického řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řadu je věnován např. § 30 učebního textu [8].

Příklad 1.1.11. Pro ilustraci řešme oběma metodami na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + 2xy = 2x^3. \tag{1.12}$$

Nejprve řešme pomocí integračního faktoru. Snadno nahlédneme, že $\big(x^2\big)' = 2x$, takže integrační faktor je $\exp(x^2)$. Násobíme jím tedy celou rovnici a obdržíme

$$\big(y \exp(x^2)\big)' = (y' + 2xy) \exp(x^2) = 2x^3 \exp(x^2) = \big(\exp(x^2)(x^2 - 1)\big)', \tag{1.13}$$

a tedy

$$y \exp(x^2) = \exp(x^2)(x^2 - 1) + C. \tag{1.14}$$

Odtud dostaneme jednoduchou úpravou

$$y = C \exp(-x^2) + x^2 - 1, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Řešme nyní metodou variace konstant(y). Rovnice $y' + 2xy = 0$ má obecné pak řešení tvaru $y(x) = C \exp(-x^2)$, o čemž se lze přesvědčit dosazením. Je-li nyní $C \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ a $y(x) = C(x) \exp(-x^2)$, dostaneme po zderivování a dosazení do (1.12)

$$C'(x) \exp(-x^2) - 2xC(x) \exp(-x^2) + 2xC(x) \exp(-x^2) = 2x^3, \tag{1.16}$$

z čehož dostaneme po určení (jedné) primitivní funkce k $2x^3 \exp(x^2)$ např.

$$C(x) = (x^2 - 1) \exp(x^2).$$

Obecné řešení rovnice (1.12) je tedy podle Věty 1.1.9 tvaru

$$y(x) = C \exp(-x^2) + x^2 - 1, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.2 Ukázky použití

Následující tři příklady ukazují jednoduché modely situací, které lze popsat pomocí diferenciálních rovnic. Je užitečné si uvědomit již nyní jistou univerzalitu: často prakticky stejný model popisuje velmi různorodé jevy.

Příklad 1.2.1 (exponenciální růst). Populace bakterií v roztoku závisí na čase; označme $P(t)$ počet bakterií v čase t. Nechť $\Delta P := P(t + \Delta t) - P(t)$ je přírůstek počtu bakterií za (krátkou) dobu Δt; z pozorování je známo, že přírůstek ΔP je úměrný velikosti populace $P(t)$ a době Δt. To zapíšeme ve tvaru

$$\Delta P \approx \alpha P(t)\Delta t\,, \quad \text{resp.} \quad \Delta P/\Delta t \approx \alpha P(t)\,,$$

kde α je kladná konstanta. Je to poznatek podložený zkušeností z experimentů. Symbol $\approx$ má čtenáře upozornit na to, že jde o hypotetickou přibližnou rovnost. Po provedení limitního přechodu pro $\Delta t \to 0_+$ vlevo v posledním vztahu a nahrazení $\approx$ symbolem $=$ dostaneme *matematický model*, popisující jistou *zjednodušenou* situaci. Tento model je popsán jednoduchou diferenciální rovnicí

$$P' - \alpha P = 0\,. \tag{1.17}$$

Jak jsme výše odvodili, obecné řešení této rovnice má tvar

$$P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

kde $P_0 > 0$ je velikost populace v čase $t = 0$ [7]). Tento jednoduchý zákon růstu populace není specifický pro populaci bakterií a je aplikovatelný na lidskou populaci, populaci rostlin nebo zvířat určitého druhu.

Známe-li $P_1 := P(t_1)$ pro nějaké $t_1 > 0$, můžeme vypočítat konstantu α; zřejmě z rovnosti $P_1 = P_0 \exp \alpha t_1$ plyne

$$\alpha = \frac{1}{t_1} \log \frac{P_1}{P_0}\,. \tag{1.18}$$

Označme δ čas, za který se velikost populace zdvojnásobí. Snadno dostaneme

$$2 = \frac{P(t+\delta)}{P(t)} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t+\delta)}}{P_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}} = \mathrm{e}^{\alpha\delta}\,,$$

a tedy $\delta = (\log 2)/\alpha$. Je pozoruhodné, že tento růstový zákon *i přes velké zjednodušení reálné situace* dává pro určitá časová období výsledky velmi blízké empiricky získaným datům.

Poznámka 1.2.2. Statistická data ukazují, že se po dlouhou dobu počet obyvatel na Zemi zdvojnásobuje přibližně každých 35 let. Podle údajů OSN v r. 1986 žilo na Zemi asi 5 miliard lidí. Z těchto údajů snadno určíme potřebné konstanty, takže pro počet lidí na Zemi dostáváme vzorec

$$P(1986 + t) \doteq 5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02\,t}\,.$$

---

[7]) Zpravidla nás zajímá pouze chování P od jistého okamžiku, jemuž odpovídá v matematickém modelu obvykle $t = 0$.

Podle něj provedeme výpočet předpokládaného počtu obyvatel Země v budoucnosti; po zaokrouhlení příslušných hodnot dostaneme tabulku [8])

Rok	**Obyvatel Země**		**U.S. Census B.**	
1986	5	miliard	4,935	miliard
2000	6,6	miliard	6,081	miliard
2050	18,0	miliard	9,224	miliard
2100	48,9	miliard		
2300	2,7	biliónů		
2501	148,7	biliónů		

To by znamenalo, že v r. 2501 bude mít každý obyvatel Země k dispozici cca $1\,\mathrm{m}^2$. I když model poskytuje v kratších časových intervalech vcelku přijatelné hodnoty, poslední údaj ukazuje, že použití popsaného modelu pro dlouhé časové úseky dává absurdní výsledky. Pro zajímavost: Dne 12.10.1999 symbolicky uvítal generální sekretář OSN *Kofi Annan* prvního občana sedmé miliardy obyvatel Země a první občan osmé miliardy obyvatel Země přišel prý na svět 31. října 2011. Podle našeho jednoduchého vzorce dostaneme $P(2011) = 5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0,5} \doteq 8,244$ miliardy, a to na konci roku 2011.

V dalším příkladu už budeme poněkud stručnější, neboť jde o úvahy podobného typu jako v předcházejícím příkladu.

Příklad 1.2.3 (lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby“; ta závisí na činnosti, kterou člověk vykonává, ale i na věku a pohlaví jedince, na metabolických faktorech apod. Denní spotřeba jedince činí obvykle 30 až 40 kilokalorií (kcal) na každý kilogram jeho váhy w. Při průměrném energetickém přísunu 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince lze očekávat, že se jeho váha stabilizuje. Z pozorování dospíváme k představě, že změna váhy je přímo úměrná přebytku resp. nedostatku v energetickém přísunu. Podle ní např. člověk o váze 70 kg při denní konzumaci $70 \times 35 = 2450$ kcal nebude na váze ani přibírat, ani ubírat, avšak každých cca 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg. Tato představa nás dovádí k modelu, popsanému diferenciální rovnicí

$$w' = \frac{35(c-w)}{7000}, \quad \text{tj.} \quad \frac{w'}{w-c} = -\,0{,}005\,,$$

ve které jsme c označili váhu sledovaného člověka, která by odpovídala ustálenému stavu při konstantním denním energetickém přísunu. Řešením této rovnice dostáváme

$$w(t) = c + (w(0) - c)\mathrm{e}^{-0{,}005t}\,.$$

Jestliže pan Tlustý, vážící 95 kg, omezí svůj celkový denní přísun na 2625 kcal, bude jeho váha v závislosti na čase t vyhovovat vztahu

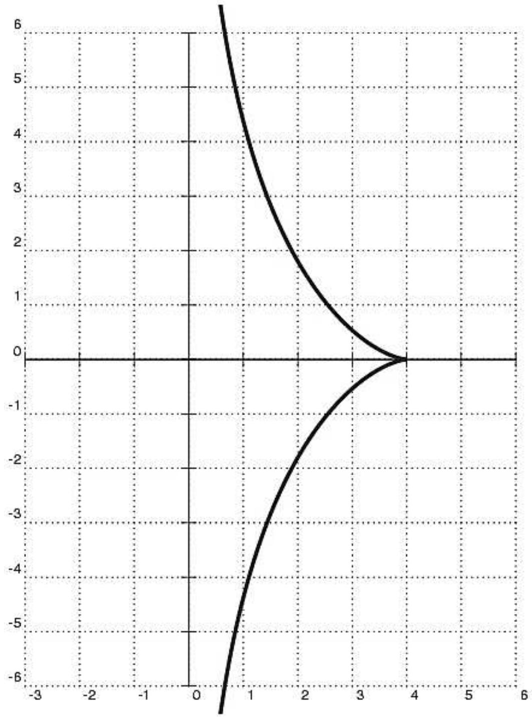
$$w(t) = 75 + 20\exp(-\,0{,}005t)\,.$$

V tom případě se podle našeho modelu bude váha pana Tlustého postupně blížit 75 kg (je totiž $2625 = 35 \times 75$), přičemž váhy 80 kg (!) dosáhne teoreticky za 278 dní, tedy za více než tři čtvrtě roku [9]). Proto patrně tolik dobrých předsevzetí končí fiaskem! (Srovnej s [24].)

[8]) Poslední sloupec tabulky udává skutečný stav a také předpověď pro r. 2050 tak, jak byla uvedena v mezinárodní databázi U.S. Census Bureau (stav k 26.4.2005). Detailní a aktuální pohled na dnešní stav uvádíme v Kapitole 3.9 v Poznámce 8.2.2. Srov. [26].

[9]) Pro milovníky SI soustavy uvádíme převodní vztah 1 kcal = 4,186 kJ. Pro milovníky piva uvádíme ještě další převodní vztah 1 l Gambrinusu $12^\circ \doteq 1860$ kJ. Podle tohoto modelu by tedy teoreticky při konzumaci pouze 1 litru Gambrinusu denně dosáhl pan Tlustý váhy 80 kg již za cca 38,5 dne.

Příklad 1.2.4 (traktrix). Přemýšleli jste někdy o tom, po jaké křivce se bude pohybovat vzpírající se pes, kterého táhne na vodítku za sebou jeho pán? Patrně ne. Je to však úloha stará jako infinitesimální počet, řešil ji totiž již Leibniz (viz Historické poznámky v Kapitole 9). Tato křivka je známa též pod jménem **psí křivka** nebo **stíhací křivka** a v obecnější formulaci popisuje dráhu bodu A, který se pohybuje konstantní rychlostí r_1 vždy ve směru k bodu B, pohybujícímu se konstantní rychlostí r_2 po přímce p. Ač jde zdánlivě o hříčku, je zde souvislost např. s letectvím.



Budeme se zabývat jen případem **traktrix**. Bod $A = [\,a, 0\,]$ je počáteční polohou psa, bod $B = [\,0, 0\,]$ je počáteční polohou jeho pána (na ilustračním obrázku je $a = 4$). Je-li pán při rovnoměrném pohybu „vzhůru" v bodě B', je pes na křivce v bodě A' a vzdálenosti $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ jsou rovny a, přičemž směr úsečky $A'B'$ je směrem tečny křivky v bodě A'.

Využitím poznatků elementární geometrie tak dospějeme k rovnici

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,,$$

přičemž je zřejmě $y(0) = 0$. Řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = \int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

což nám po integraci dává (znaméno „−" odpovídá pohybu pána „dolů", tj. ve směru záporné poloosy y; tak dostaneme druhou větev křivky)

$$y = \pm\left(a\,\log\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) \tag{1.19}$$

Pokud bychom chtěli traktrix vyjádřit parametricky, pak po substituci $x = a\cos t$ a úpravě dostaneme

$$x(t) = a\,\cos t\,, \quad y(t) = \pm\, a\left(\log\frac{1 + \sin t}{cost} - \sin t\right)$$

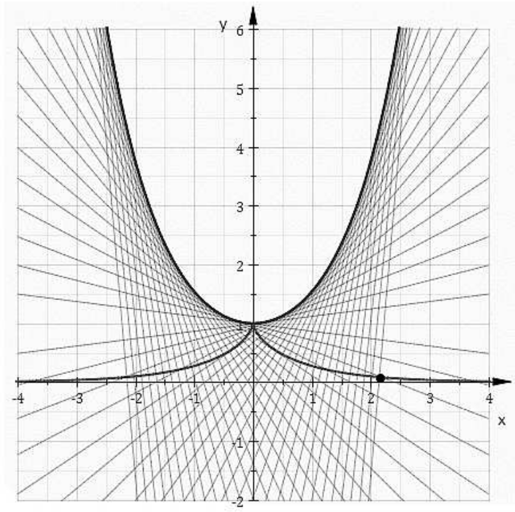
Poznámky 1.2.5. Uveďme bez důkazu pár zajímavostí: Systém ortogonálních křivek k traktrix (někdy též **trajektorií**) je popsán diferenciální rovnicí

$$y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

je to tedy systém kružnic $x^2 + (y - C)^2 = a^2$. Obálkou tečen traktrix (tzv. **evolutou** této křivky) je řetězovka o rovnici

$$x = a\cosh\frac{y}{a}$$

a obsah neomezeného obrazce mezi traktrix a křivkou s ní symetrickou podle osy y je roven πa^2. Se záměnou os, abychom dostali řetězovku v „přirozené poloze" a při volbě $a = 1$ vypadá příslušný obrázek takto:



Lze očekávat, že nalezené výsledky o lineárních rovnicích bude možno dále zobecnit, např. pro *lineární rovnice n-tého řádu* a to skutečně uděláme. Na závěr stojí snad za zmínku, že řadu dalších zajímavých příkladů nalezne čtenář v [3], jedné z „nejčtivějších" učebnic, které pojednávají o diferenciálních rovnicích. Dalšími knihami tohoto typu jsou [1] a [6].

1.3 Cvičení

1. Ukažte, že funkce $y(x) = Cx + C(1 + C^2)^{-1/2}$ je pro každé $C \in \mathbb{R}$ řešením rovnice

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\,!$$

2. Ukažte, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je funkce $y = C^2 + 2\,C(x - C)$ řešením rovnice

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0\,! \qquad (*)$$

Je to obecné řešení rovnice $(*)$? Je funkce $y = x^2$ řešením $(*)$?

3. Dokažte, že funkce $\big(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\big)/2a + C$ je řešením rovnice

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}\,!$$

4. Řešte rovnici

$$y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,! \quad \big[\,y(x) = (x^2 + C)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\big]\,.$$

5. Řešte rovnici

$$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4\,! \quad \big[\,y(x) = (x^3\mathrm{e}^{-x^2} + C)\,\mathrm{e}^{-x^2})\,\mathrm{e}^{x^2} = x^3 + C\,\mathrm{e}^{x^2}\,\big]\,.$$

6. Řešte rovnici

$$xy' + (1 - x)\,y = x\,\mathrm{e}^x\,! \quad \left[\,y(x) = \mathrm{e}^x\Big(\frac{x}{2} + \frac{C}{x}\Big)\,;\text{všimněte si } D_y \text{ v závislosti na } C\,\right]$$

7. Řešte rovnici

$$y' + (y - 2\sin x)\cos x = 0\,! \quad \Big[\,y(x) = 2\sin x - 2 + C\mathrm{e}^{-\sin x}\,\Big]$$

8. Řešte rovnici

$$y' + y = \cos x\,! \quad \left[\,y(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2} + C\,\mathrm{e}^{-x}\,\right]$$