Obsah

Kapitola 15

Diferenciální rovnice

15.1 Úvod

Poznámka 15.1.1. V Kapitole 10 jsme řešili jednoduché diferenciální rovnice. I když jsme potřebné pojmy ve speciálních případech již jednou definovali, uděláme to nyní stručně v obecnější situaci znova. Budeme podstatně využívat základní poznatky z algebry a některé elementární vlastnosti funkcí více proměnných, nebudeme je však dokazovat. Výklad bude mít navíc volnější popisnou formu, neboť striktní formalizace by byla pro naše potřeby příliš náročná a neúčelná. Pokud nebude výslovně řečeno něco jiného, pracujeme v této kapitole pouze s reálnými funkcemi.

Označení 15.1.2. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* budeme rozumět rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{15.1}$$

kde F je funkce definovaná na nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Nejvyšší řád derivace efektivně vystupující v rovnici nazýváme *řád rovnice.* Je-li F polynom, pak jeho stupeň je *stupněm rovnice. Řešením rovnice* (15.1), podrobněji *řešením rovnice* (15.1) *na intervalu* (c, d), nazýváme každou funkci φ definovanou na intervalu (c, d) takovou, že existuje její derivace $\varphi^{(n)}$ na (c, d), je $[\,x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\,] \in G$ pro všechna $x \in (c, d)$ a

$$F\big(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0\,, \qquad x \in (c, d)\,.$$

Řešení rovnice (15.1) se nazývá *maximální řešení* (někdy se užívá i termín *úplné řešení*), je-li definováno na maximálním intervalu, tj. není restrikcí řešení rovnice (15.1), definovaného na intervalu (c', d'), pro nějž $(c, d) \subset (c', d') \neq (c, d)$. Množinu všech maximálních řešení rovnice (15.1) nazýváme *obecným řešením* (15.1). Každé řešení rovnice (15.1) je tedy restrikcí nějakého maximálního řešení, tj. jednoho prvku obecného řešení.

Poznámka 15.1.3. Velmi často pracujeme s rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{15.2}$$

které jsou *rozřešeny vzhledem k nejvyšší derivaci.* Jelikož vlevo stojí derivace $y^{(n)}$ neznámé spojité funkce $y^{(n-1)}$, je tato rovnice řešitelná pouze v případě, že i funkce f na pravé straně v (15.2) je „dostatečně rozumná". My se v dalším výkladu omezíme na případ *spojité funkce* f.

Budeme nejprve podrobně studovat jednodušší případ diferenciální rovnice prvního řádu se spojitou funkcí f. Uvedeme nejprve úlohu s předpoklady, se kterými budeme nadále pracovat.

Úmluva 15.1.4. Budeme řešit diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{15.3}$$

s funkcí f spojitou na oblasti (tj. otevřené souvislé množině) $G \subset \mathbb{R}^2$, která je zároveň definičním oborem f a pro $[\,x_0, y_0\,] \in G$ budeme hledat její řešení φ definované na nějakém intervalu $(c, d) \subset \mathbb{R}$ obsahujícím bod x_0, pro něž bude platit

$$\varphi(x_0) = y_0\,. \tag{15.4}$$

Podrobněji: žádáme, aby řešení vyhovovalo podmínce

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

(plyne z ní i inkluze $\{[\,x, \varphi(x)\,];\, x \in (c, d)\} \subset G$) a současně splňovalo rovnost (15.4). S ohledem na některé fyzikální aplikace, kde proměnnou x bývá často čas, se tato úloha nazývá *počáteční úlohou.* Obvykle užívaný stručný zápis úlohy je tvaru

$$y' = f(x, y(x))\,, \quad y(x_0) = y_0\,,$$

kde rovnost $y(x_0) = y_0$ vyjadřuje tzv. *počáteční podmínku.*

Při geometrické interpretaci řešení jakožto „křivky" popsané funkcí φ (zde však pracujeme s otevřeným intervalem) hovoříme pak o *řešení, procházejícím bodem* $[\,x_0, y_0\,]$. Přirozené otázky, na které budeme hledat odpověď, jsou dvě:

(a) kdy existuje řešení rovnice (15.3) vyhovující počáteční podmínce (15.4) a

(b) kdy ke každým dvěma řešením této úlohy existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.

V tomto smyslu také popsaný problém chápeme jednak jako problém *existence řešení* (15.3) *procházejícího bodem* $[\,x_0, y_0\,]$ a problém jeho *jednoznačnosti.*

Nejprve dokážeme jednoduché lemma, jímž počáteční úlohu z předcházející Úmluvy 15.1.4 budeme převádět do jiného tvaru.

Lemma 15.1.5. *Nechť φ je, v kontextu Úmluvy 15.1.4, spojitá funkce na otevřeném intervalu I obsahujícím bod x_0. Potom φ je řešením počáteční úlohy, právě když pro všechna $x \in I$ je $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a φ je řešením* integrální rovnice

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t\ . \tag{15.5}$$

Důkaz. Připomeňme již zavedené označení: máme řešit rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{15.6}$$

spolu s počáteční podmínkou (15.4), tj. $y(x_0) = y_0$. Pokud platí (15.5), pak integrál ze spojité funkce $f(x, \varphi(x))$, $x \in I$, v této rovnici vpravo je primitivní funkcí k integrandu, takže odtud zderivováním plyne (15.3). Pro $x = x_0$ dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Obráceně, z rovnice (15.3) plyne integrací rovnost funkcí

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,;$$

integrál na levé straně předcházející rovnice je roven $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0$, z čehož již dostaneme (15.5) jednoduchou úpravou. □

15.2 Peanova existenční věta

Nyní dokážeme tvrzení velmi často označované *Peanova existenční věta.* Na základě práce, v níž bylo toto tvrzení dokázáno, získal r. 1886 Giuseppe Peano (1858 – 1932) doktorát. Často se však cituje až práce z r. 1890; viz [6], str. 150.

Tvrzení 15.2.1 (Peano 1886). *Předpokládejme, že v rovnici* (15.3)*, tj. rovnici*

$$y' = f(x, y)$$

je funkce f spojitá *na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a že platí $[\,x_0, y_0\,] \in G$. Potom existuje $\alpha > 0$ a funkce $\varphi : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to \mathbb{R}$ tak, že pro všechna x z tohoto intervalu $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a platí*

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\,, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\,, \\ \varphi(x_0) = y_0\,, \end{aligned} \tag{15.7}$$

tj. počáteční úloha má alespoň jedno řešení.

Pro větší přehlednost nejprve popíšeme v hrubých rysech postup důkazu Peanovy věty; jednotlivé kroky označíme (K1) – (K5) a budeme se na ně dále odvolávat.

(K1) Od počáteční úlohy přejdeme k „lépe zvládnutelné“ ekvivalentní úloze.

(K2) Zavedeme pro $\varepsilon > 0$ pojem ε-přibližného řešení.

(K3) Vytvoříme pro $\varepsilon_n \to 0_+$ posloupnost ε_n-přibližných řešení φ_n na vhodném intervalu I obsahujícím bod x_0 z počáteční podmínky.

(K4) Využijeme důsledek Ascoliho věty (Tvrzení 13.3.34) a z posloupnosti $\{\varphi_n\}$ vybereme podposloupnost stejnoměrně konvergentní na I k φ.

(K5) Dokážeme, že φ je hledaným řešením počáteční úlohy.

Krok (K1) důkazu Peanovy věty spočívá v aplikaci Lemmatu 15.1.5: budeme hledat řešení integrální rovnice. Nyní vyslovíme definici ε-přibližného řešení, o kterém jsme se zmínili v kroku (K2).

Definice 15.2.2. Nechť je funkce f v rovnici (15.3) spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a nechť ψ je *spojitá* funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pro kterou $[\,t, \psi(t)\,] \in G$ pro všechna $t \in I$. Jestliže pro $\varepsilon > 0$ a všechna $t \in I \setminus K$

$$|\,\psi'(t) - f(t, \psi(t))\,| \leq \varepsilon\,,$$

kde $K \subset I$ je *konečná* množina, pak funkci ψ nazýváme *ε-přibližným řešením* rovnice (15.3).

Je zřejmé, že pro ε-přibližné řešení ψ existuje vlastní derivace $\psi'(t)$ pro všechna $t \in I \setminus K$, tedy všude v I až na konečnou množinu.

Abychom mohli využít Ascoliho větu, musíme popsat volbu „vhodného“ uzavřeného intervalu, na kterém budeme pracovat. Pracujeme s počáteční úlohou s pevně zvolenou spojitou funkcí f, oblastí $G \subset \mathbb{R}^2$ a bodem $[\,x_0, y_0\,]$. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby

$$A := \{[\,x, y\,]\,;\, |x - x_0| \leq \delta,\ |y - y_0| \leq \delta\} \subset G\,; \tag{15.8}$$

je užitečné si načrtnout obrázek. Protože A je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní množina, je f omezená na A. Existuje tedy číslo $M \in (0, \infty)$ tak, že $|\,f(x, y)\,| \leq M$ pro všechny body $[\,x, y\,] \in A$. Zvolíme nyní

$$\alpha := \min\Big(\,\delta,\ \frac{\delta}{M}\Big) \tag{15.9}$$

a budeme pracovat s intervalem $I = [\,x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha\,]$. Smysl této volby spočívá v tom, že graf restrikce každého řešení y vyhovujícího podmínce $y(x_0) = y_0$ na interval I leží v A.

Lemma 15.2.3. *Pro počáteční úlohu z Úmluvy 15.1.4 existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové ε-přibližné řešení ψ_ε definované na intervalu $(x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha)$, které prochází bodem $[\,x_0, y_0\,]$, tj. takové, pro něž $\psi_\varepsilon(x_0) = y_0$.*

Důkaz. Nechť na A platí jako výše $|\, f(x,y)\,| \le M$. Funkce f je *stejnoměrně spojitá* na množině A definované v (15.8), takže k $\varepsilon > 0$ existuje δ_ε, pro které

$$|\, f(x,y) - f(x',y')\,| \le \varepsilon\,, \tag{15.10}$$

jakmile $[\,x,y\,], [\,x',y'\,] \in A$, a $|x-x'| \le \delta_\varepsilon$, $|y-y'| \le \delta_\varepsilon$.

Nyní zvolíme dělení $D = \{x_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = x_0 + \alpha\}$ intervalu $[\,x_0, x_0+\alpha\,]$ s normou dělení $\nu(D) < \min\{\delta_\varepsilon,\, \delta_\varepsilon/M\}$ a sestrojíme po částech lineární funkci ψ_ε na $[\,x_0, x_0+\alpha\,]$, pro kterou

$$\psi_\varepsilon(x_0) := y_0\,, \quad \psi_\varepsilon(t) := \psi_\varepsilon(t_{k-1}) + f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)(t - t_{k-1})$$

pro $t \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$, $k = 1, \ldots, n$. Analogickou konstrukci provedeme také na intervalu $[\,x_0 - \alpha,\, x_0\,]$, ovšem „zpětně“: směrnice lineárních částí v dělících intervalech dělení $D = \{x_0 - \alpha = t_0 < \ldots < t_m = x_0\}$ jsou nyní určeny vždy hodnotou $f(t_k, \psi_\varepsilon(t_k))$ v koncovém bodě intervalu $[\,t_{k-1}, , t_k\,]$, $k = 1, \ldots, m$. Dále postačí, budeme-li se zabývat pouze intervalem $[\,x_0,\, x_0+\alpha\,]$, pro interval $[\,x_0-\alpha,\, x_0\,]$ se provede úvaha analogicky. Závěr pak bude platit na intervalu $[\,x_0-\alpha,\, x_0+\alpha\,]$.

Je zřejmé, že derivace $\psi'_\varepsilon(t)$ existuje pro všechna $t \in [\,x_0,\, x_0+\alpha\,]$ mimo body dělení D, tedy až na konečnou množinu. Dále pro $t \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, \ldots, n$, platí s ohledem na (15.10)

$$|\, \psi'_\varepsilon(t) - f(t, \psi_\varepsilon(t))\,| = |\, f(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})) - f(t, \psi_\varepsilon(t))\,| \le \varepsilon\,,$$

protože $|t_{k-1} - t| < \delta_\varepsilon$ a

$$\begin{aligned} |\, \psi_\varepsilon(t_{k-1}) - \psi_\varepsilon(t)\,| &\le \big|\, \psi_\varepsilon(t_{k-1}) - \psi_\varepsilon(t_{k-1}) - f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)(t - t_{k-1})\,\big| = \\ &= \big|\, f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)\big|\,\big|\, t - t_{k-1}\,\big| \le M\,\delta_\varepsilon/\,M = \delta_\varepsilon\,; \end{aligned}$$

analogická úvaha pro interval $[\,x_0-\alpha,\, x_0\,]$ dává spolu s předcházející úvahou závěr: funkce ψ_ε je ε-přibližným řešením rovnice (15.3) na intervalu $[\,x_0-\alpha,\, x_0+\alpha\,]$, splňujícím počáteční podmínku $\psi_\varepsilon(x_0) = y_0$. □

Odhadneme přírůstek $|\,\psi_\varepsilon(t') - \psi_\varepsilon(t)\,|$ pro $t, t' \in [\,x_0-\alpha, x_0+\alpha\,]$, $t \ne t'$. Nechť např. $t < t'$. Body t, t' a všechny body $u \in (t, t')$, ve kterých neexistuje $\psi'_\varepsilon(u)$, určují dělení intervalu $[\,t, t'\,]$. Aplikujeme-li na intervalech tohoto dělení odhad pomocí Lagrangeovy věty, dostaneme po sečtení

$$|\, \psi_\varepsilon(t') - \psi_\varepsilon(t)\,| = \left|\, \int_t^{t'} \psi'_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u\, \right| \le M\,|t'-t|\,. \tag{15.11}$$

Dále pro všechna $t \in [\,x_0-\alpha, x_0+\alpha\,]$ dostaneme pomocí (15.11) odhad

$$|\,\psi_\varepsilon(t)\,| \le |\,\psi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(x_0)\,| + |\,\psi_\varepsilon(x_0)\,| \le M\,|\,t-x_0\,| + |\,y_0\,| \le M\alpha + |\,y_0\,|\,, \tag{15.12}$$

který platí pro každou funkci ψ_ε. Všimneme si podstatné věci, týkající se závislosti na parametru ε: oba odhady (15.11) a (15.12) platí pro ψ_ε, ať je $\varepsilon > 0$ jakékoli.

Odtud plyne, že systém $\mathcal{F}$ funkcí $\{\psi_\varepsilon\,;\,\varepsilon > 0\}$ je tvořen podle (15.12) funkcemi stejně omezenými, které splňují Lipschitzovu podmínku (15.11); proto jsou tyto funkce i stejně spojité.

Další krok (K3) je jednoduchý: zvolíme posloupnost kladných čísel ε_n konvergující k 0 a ke každému z těchto čísel sestrojíme podle Lemmatu 15.2.3 ε_n-přibližné řešení, které označíme ψ_n. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí pro ψ_n vztahy analogické (15.12) a (15.11), takže funkce systému $\{\psi_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}$ jsou stejně omezené a stejně spojité. Můžeme použít důsledek Ascoliho věty z Tvrzení 13.3.34 a tak lze bez újmy na obecnosti předpokládat (museli bychom ještě přejít k vybrané posloupnosti), že existuje funkce φ definovaná na intervalu $[\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ tak, že

$$\psi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } [\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]\,.$$

Tím jsme provedli současně kroky (K3) i (K4) a zbývá krok poslední: dokážeme, že φ je řešením studované počáteční úlohy. Tím bude důkaz Peanovy věty dokončen.

Důkaz Věty 15.2.1. Dokážeme, že funkce φ na intervalu $[\,x_0-\alpha, x_0+\alpha\,]$ vyhovuje integrální rovnici (15.5), tj. rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

Poznamenejme nejprve, že ψ_n je zobecněnou primitivní funkcí k funkci ψ_n', a že následující rovnost platí všude v intervalu $[\,x_0-\alpha, x_0+\alpha\,]$ (v těch bodech t konečné množiny, ve kterých neexistuje $\psi_n'(t)$, derivaci dodefinujeme hodnotou 0):

$$\psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi_n'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Počítejme dále: jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \big(f(t,\psi_n(t)) + [\,\psi_n'(t) - f(t,\psi_n(t))\,]\big)\,\mathrm{d}t\ = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \big(f(t,\varphi(t)) + [\,f(t,\psi_n(t)) - f(t,\varphi(t))\,] + [\,\psi_n'(t) - f(t,\psi_n(t))\,]\big)\,\mathrm{d}t\,. \quad (15.13)\end{aligned}$$

Protože ψ_n je ε_n-přibližným řešením, lze absolutní hodnotu výrazu ve druhé hranaté závorce v integrandu posledního integrálu v (15.13) stejnoměrně odhadnout číslem ε_n (v bodech, kde není výraz v závorce definován, ho dodefinujeme hodnotou 0). Je tedy

$$\int_{x_0}^{x} \big|\,\psi_n'(t) - f(t,\psi_n(t))\,\big|\,\mathrm{d}t\ \le \varepsilon_n \alpha\,,$$

z čehož plyne, že tento integrál konverguje pro $n \to \infty$ stejnoměrně k 0 vzhledem k proměnné $x \in [\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$.

Ukážeme ještě, že $|\, f(t, \psi_n(t)) - f(t, \varphi(t))\,| \rightrightarrows 0$ na $[\, x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$. Zvolme $\varepsilon > 0$; ze stejnoměrné spojitosti f na A vyplývá existence $\delta > 0$, pro které platí

$$(|y_1 - y_2| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon)\,.$$

Zvolme dále vzhledem k $\psi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[\, x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ k tomuto δ číslo $k \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq k$ bylo $|\, \psi_n - \varphi\,| < \delta$; dostaneme tak

$$(n \geq k) \Rightarrow (|f(t, \psi_n(t)) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon)$$

pro všechna $t \in [\, x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$. Odtud dostáváme vzhledem k proměnné x

$$\int_{x_0}^{x} \big|\, f(t, \psi_n(t)) - f(t, \varphi(t))\,\big|\, \mathrm{d}t \rightrightarrows 0 \quad \text{na} \quad [\, x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]\,.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme z (15.13) rovnost (15.5), čímž je důkaz Peanovy existenční věty dokončen. □

Poznámka 15.2.4. Uvedená Peanova věta *nezaručuje* jednoznačnost řešení rovnice (15.3) ani lokálně. Jestliže si čtenář připomene Příklad 10.3.3, snadno nahlédne, že na libovolně malém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 mohou existovat dvě různá řešení (dokonce i nekonečně mnoho) rovnice (15.3), splňující podmínku (15.4). Již v r. 1925 byl dokonce sestrojen příklad takové rovnice tvaru (15.3) se spojitou funkcí f, že dokonce každým bodem $[\, x_0, y_0\,] \in G$ procházejí alespoň dvě řešení, která nesplývají v žádném okolí bodu x_0.

Historická poznámka 15.2.5. Je na místě připojit krátký historický komentář. Již v r. 1694 Johann Bernoulli (1667 – 1748) používal *přibližné řešení* rovnice (15.3). Popsaná metoda konstrukce přibližného řešení, kterou v podstatě používal již Euler, je z r. 1768, avšak historicky prvním tvrzením o *existenci* (a dokonce i o jednoznačnosti řešení, ovšem za silnějších předpokladů) bylo tvrzení, které dokázal Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) r. 1824. Kompaktnost množiny spojitých funkcí na intervalu studovali Cesare Arzelà (1847 – 1912) a Giulio Ascoli (1843 – 1896), jejich tvrzení je však pouze jednou z možných cest k důkazu výše uvedeného Peanova tvrzení. Viz dále komentář v Historické poznámce 15.4.3.

15.3 Věta o existenci a jednoznačnosti

Seznámíme se ještě s podobnou důležitou větou, v níž se o funkci f předpokládá více a která dává i (lokální) jednoznačnost řešení popsané počáteční úlohy. Peanova věta z předchozí části ilustruje užití kritéria kompaktnosti v prostoru $\mathcal{C}([\, a, b\,])$ a stejnoměrné konvergence, nebývá však součástí základního kurzu analýzy. Důkaz v následující části uvedené frekventovanější věty je založen na užití Banachovy věty o kontrakci. Budeme postupovat zcela nezávisle na předchozí části a proto některé úvahy zopakujeme.

Věta 15.3.1 (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Nechť* $\delta > 0$ *a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)\,.$$

Předpokládejme, že v rovnici (15.3)

$$y' = f(x, y)\,, \tag{15.3}$$

je funkce f *spojitá v intervalu* I *a že existuje kladné číslo* K *takové, že pro všechna* $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ *a pro všechna* $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$ *platí*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

(*stručněji říkáme, že* $f(x, \cdot\,)$ *jsou pro* $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ (*stejně*) *lipschitzovské v proměnné* $y \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$). *Potom platí:*

(a) *Existuje interval* (c, d) *a řešení* φ *rovnice* (15.3) *na intervalu* (c, d) *takové, že je* $x_0 \in (c, d)$ *a* $\varphi(x_0) = y_0$*, tj. řešení vyhovuje* počáteční podmínce (15.4).

(b) *Jestliže řešení* φ_1, φ_2 *splňují podmínku* (15.4), *existuje okolí bodu* x_0, *na kterém tato řešení splývají.*

Důkaz. Z kompaktnosti intervalu $[\,x_0 - \delta, x_0 + \delta\,] \times [\,y_0 - \delta, y_0 + \delta\,]$ plyne existence takového čísla $M \in (0, +\infty)$, že na tomto intervalu je $|f| \leq M$. Nejprve převedeme řešení popsané úlohy pomocí Lemmatu 15.1.5 na řešení jiné úlohy (místo diferenciální rovnice budeme pracovat s *integrální* rovnicí). Zvolíme interval $[\,c, d\,]$ tak, aby $x_0 \in (c, d)$ a byly splněny současně dvě podmínky:

$$(1^*)\quad M(d - c) < \delta \qquad \text{a} \qquad (2^*)\quad q := K(d - c) < 1\,.$$

Smysl této speciální volby bude zřejmý dále.

Označme $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p([\,c, d\,])$ podmnožinu všech funkcí φ prostoru $\mathcal{C}([\,c, d\,])$, vyhovujících podmínce

$$|\,\varphi(x) - y_0| \leq M|x - x_0|\,, \quad x \in [\,c, d\,]\,. \tag{p}$$

Pro všechna $x \in [\,c, d\,]$ je zřejmě (využíváme podmínku (1*))

$$|\,\varphi(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq M(d - c) < \delta\,; \tag{15.14}$$

definujeme-li nyní zobrazení $A : \varphi \mapsto A\varphi$ vztahem

$$(A\varphi)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad \varphi \in \mathcal{C}_p([\,c, d\,])\,, \tag{15.15}$$

je integrand v integrálu na pravé straně (15.15) korektně definován a je to spojitá funkce na $[\,c, d\,]$. Řešit rovnici (15.3) s podmínkou (15.4) je ekvivalentní s problémem řešit rovnici $\varphi = A\varphi$; srovnej s Lemmatem 15.1.5. Všimneme si ještě, že pro $\varphi \in \mathcal{C}_p([\,c, d\,])$ je pravá strana rovnosti (15.5) spojitá funkce na $[\,c, d\,]$.

Podmínka (1^*) dává

$$|A\varphi(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \Big| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))|\,\mathrm{d}t \le M|x - x_0|\,,$$

takže $A(\mathcal{C}_p) \subset \mathcal{C}_p$. Množina $\mathcal{C}_p$ je uzavřenou podmnožinou metrického prostoru $\mathcal{C}([\,c,d\,])$, a tedy podle Tvrzení 13.2.7 jeho úplným podprostorem. Na množinu $\mathcal{C}_p$ a na zobrazení $A : \varphi \mapsto A\varphi$ použijeme Větu 13.2.18 o pevném bodu. Dříve však musíme ještě ukázat, že A je na $\mathcal{C}_p$ se „supremovou" metrikou $\rho(\varphi,\psi) = \|\varphi - \psi\|_\infty$ kontrakce.

Víme, že v I je splněna výše uvedená lipschitzovská podmínka

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

pro všechna $x \in [\,c,d\,] \subset (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$, $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$. Pro operátor A, pro $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_p$, a pro každé $x \in [\,c,d\,]$ platí odhady (nyní užíváme podmínku (2^*))

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x) - A\psi(x)| = {} & \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t \Big| \le \\
& \le \int_{x_0}^{x} \big|\, f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) \,\big|\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x} K\,|\,\varphi(t) - \psi(t)\,|\,\mathrm{d}t \le \\
& \le K \int_{x_0}^{x} \|\,\varphi - \psi\,\|_\infty\,\mathrm{d}t \le K(d-c)\|\,\varphi - \psi\,\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Přejdeme-li ještě vlevo k supremu přes všechna $x \in [\,c,d\,]$, dostaneme

$$\|A\varphi - A\psi\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty\,,$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ je „supremová" metrika v úplném metrickém prostoru $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p([\,c,d\,])$ a $q < 1$. Volbou intervalu $[\,c,d\,]$ dostatečně malé délky ve smyslu podmínky (2^*) jsme tedy dosáhli toho, že A je kontrakce. Tím jsme ověřili předpoklady Banachovy věty.

Pro pevný bod φ operátoru A na prostoru $\mathcal{C}_p$ zřejmě platí $\varphi \in \mathcal{C}_p$ a

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in (c,d)\,, \tag{15.16}$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen; funkce φ je dokonce z prostoru $\mathcal{C}^1((c,d))$, neboť vyhovuje předcházející integrální rovnici. Banachova věta dává zároveň (lokální) jednoznačnost řešení φ rovnice (15.15), a tedy i počáteční úlohy z Věty 15.3.1: pokud by existovala řešení φ a ψ počáteční úlohy, jejichž restrikce na interval $[\,c,d\,]$ zvolený v průběhu důkazu by byly *různé*, řešily by φ a ψ rovnici (15.16) a muselo by platit

$$0 < \|\varphi - \psi\|_\infty = \|A\varphi - A\psi\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty$$

s $0 < q < 1$, což vede ke sporu. □

15.4 Rovnice vyšších řádů

Případ složitější rovnice

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

můžeme formálně upravit. Položíme-li

$$y(x) = y_1(x)\,, \quad y'(x) = y_2(x)\,, \dots, \quad y^{(n-1)}(x) = y_n(x)\,,$$

přejdeme k ekvivalentní úloze řešit *soustavu* rovnic 1. řádu

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = y_3\,, \dots, \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,.$$

Bez zjevného zvýšení obtížnosti lze vyšetřovat soustavu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\ &\vdots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Stručnější zápis této soustavy využívá vektorového označení: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$. Vektorová funkce

$$\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)$$

zobrazuje interval $[\,a, b\,]$ na reálné ose do $\mathbb{R}^n$. Funkce $\boldsymbol{f} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ je definována na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a zobrazuje G do $\mathbb{R}^n$. Pro funkci $\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ na $[\,a, b\,]$ se spojitými složkami g^k definujeme

$$\|\,\boldsymbol{g}\,\|_\infty = \max\{\,\sup\{|\,g^k(t)\,|\,;\, t \in [\,a, b\,]\},\, k = 1, \dots, n\}\,.$$

Množinu všech takových funkcí označíme ${}^n\mathcal{C}([\,a, b\,])$; jde tedy vlastně o kartézský součin n prostorů $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Zformulujme větu obdobnou předchozí větě:

Věta 15.4.1. *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0^1 - 2\delta, y_0^1 + 2\delta) \times \dots \times (y_0^n - 2\delta, y_0^n + 2\delta)\,.$$

Nechť $\boldsymbol{y} = (y^1, \dots, y^n)$ a $\boldsymbol{f} = (f^1, \dots, f^n)$. Předpokládejme, že v rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{15.17}$$

je zobrazení $\boldsymbol{f}$ spojité v intervalu I. Dále předpokládáme, že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $(x, \boldsymbol{y}_1), (x, \boldsymbol{y}_2) \in I$ platí

$$\|\,\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)\,\|_\infty \le K\,\|\,\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\,\|_\infty\,,$$

takže $\boldsymbol{f}$ je (stejně) lipschitzovská vůči $\boldsymbol{y}$ pro všechna x v $(x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$. Potom

(a) *existuje řešení* $\boldsymbol{\varphi}$ *rovnice* (15.17) *na intervalu* (c, d) *obsahujícím* x_0 *takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad (\textit{po složkách:} \quad \varphi^k(x_0) = y_0^k, \ \ k = 1, \ldots, n), \tag{15.18}$$

tj. řešení $\boldsymbol{\varphi}$ *vyhovuje předcházející počáteční podmínce;*

(b) *řešení je určeno lokálně jednoznačně, tj. každá dvě taková řešení splývají na nějakém okolí* x_0.

Důkaz předcházející Věty 15.3.1 lze skoro „okopírovat“, je však *technicky* složitější. Popíšeme proto jen stručně jeho hlavní kroky. Z důvodů snazšího chápání budeme vektorové označení nejprve rozepisovat po složkách. Zvolíme vhodně interval $[c, d]$ vyhovující obdobným podmínkám (1^*) a (2^*) a jako při důkazu Věty 15.3.1 přejdeme k ekvivalentní integrální formulaci úlohy

$$\varphi^k(x) = y_0^k + \int_{x_0}^{x} f^k(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Dále definujeme operátor $\boldsymbol{A}$ na (metrickém) podprostoru ${}^n\mathcal{C}_p([c, d])$ prostoru ${}^n\mathcal{C}([c, d])$ všech funkcí $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovujících podmínce

$$\|\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{y}_0\|_\infty \le M|x - x_0|\,, \quad x \in [c, d]\,, \tag{p}$$

a to analogicky jako v předcházejícím důkazu, tj.

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi})^k(x) := y_0^k + \int_{x_0}^{x} f^k(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [c, d]\,,\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Při užití vektorového zápisu má tvar

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}(x) := \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [c, d]\,. \tag{15.19}$$

Podmínka (2^*) zaručuje volbu $[c, d]$ takovou, že operátor $\boldsymbol{A}$ je kontrakcí na prostoru ${}^n\mathcal{C}_p([c, d])$. Analogicky spočteme, že pro každé $x \in [c, d]$ (místo absolutní hodnoty stojí nyní nalevo „maximová“ metrika)

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}(x)\|_\infty \le K\,(d - c)\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty \le q\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty\,.$$

Po úpravě levé strany, podobně jako v důkazu, který jsme již dělali, posléze dostaneme

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi}\|_\infty \le q\,\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty\,,$$

kde je $0 < q < 1$. Zbytek je zřejmý.

Jako důsledek předcházející věty dostaneme větu pro počáteční úlohu pro rovnici n-tého řádu; užijeme standardního označení, běžného v teorii obyčejných diferenciálních rovnic, a to i za cenu ztráty přímé souvislosti s předcházejícím označením.

Věta 15.4.2. *Nechť $\delta > 0$, $[\,x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\,] \in \mathbb{R}^{n+1}$, a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta) \times \cdots \times (y_{n-1} - 2\delta, y_{n-1} + 2\delta)\,.$$

Nechť dále je funkce f v rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{15.20}$$

spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a (stejně) lipschitzovská pro každé x vzhledem k posledním n proměnným. Potom platí:

(a) *Existuje řešení φ rovnice* (15.20) *takové, že je*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto řešení vyhovuje počáteční podmínce.

(b) *Jestliže dvě řešení φ_1, φ_2 splňují obě počáteční podmínku, shodují se na nějakém okolí bodu x_0.*

Historická poznámka 15.4.3. Cauchy dokázal pouze „slabší Větu 15.3.1“, pracoval totiž se silnějším předpokladem spojitosti derivace funkce f podle proměnné y. Teprve později r. 1876 Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903) oslabil tuto podmínku do formy, kterou jsme použili v této větě my. Jestliže generujeme posloupnost postupných aproximací $\Phi_{n+1} = A(\Phi_n)$, která je skryta v důkazu Banachovy věty o pevném bodu, nazývá se tato posloupnost *Picardova posloupnost postupných aproximací.* K důkazu věty ji použil Charles Émile Picard (1856 – 1941) r. 1890. Tento nástroj byl však již používán dříve. Picardův důkaz dále zlepšil r. 1894 Ernst Leonard Lindelöf (1870 – 1946). Viz [6], str. 146.

Vzniká přirozená otázka, zda existuje nějaké *maximální* řešení, které vyhovuje podmínce (15.4). Odpověď na tuto otázku je kladná. Řešení, jejichž existenci jsme dokázali, se totiž „dají slepit“.

Věta 15.4.4. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a nechť funkce $\boldsymbol{f}$ v rovnici*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\,, \tag{15.17}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči $\boldsymbol{y}$. Potom

(a) *existuje interval (c, d) obsahující bod x_0 a na něm definované maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ rovnice* (15.17) *takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0\,,$$

tj. toto maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovuje počáteční podmínce (15.18)*;*

(b) *toto maximální řešení je určeno jednoznačně.*

Poznámka 15.4.5. Než předcházející větu dokážeme, dodejme na vysvětlenou, že předpokládáme, že ke každému bodu $[\,x, \boldsymbol{y}\,] \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ existuje interval $I \subset G$, který tento bod obsahuje a na kterém jsou splněny pro tento bod a I předpoklady Věty 15.4.1. Protože v takovém bodě se nemůže řešení „štěpit", je tvrzení intuitivně zřejmé.

Důkaz Věty 15.4.4. Nechť $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ jsou dvě řešení (15.17), definovaná na intervalech (c_1, d_1) a (c_2, d_2), obsahujících bod x_0, a nechť platí $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{\psi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Označme

$$(c, d) := (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)\,, \quad H := \{x \in (c, d)\,;\, \boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)\}\,.$$

Potom $x_0 \in H$, a tedy $H \neq \emptyset$. Použijeme nyní Větu 13.4.4, podle které je interval souvislou množinou. Množina H je uzavřená v intervalu (c, d), neboť pro posloupnost bodů $x_n \in H$, $x_n \to x^* \in (c, d)$ plyne ze spojitosti funkcí $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$, že

$$(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})(x_n) \to (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})(x^*) = 0\,.$$

Množina H je však i otevřená v (c, d), neboť podle věty o lokální jednoznačnosti plyne z $\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)$ rovnost $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ na nějakém okolí $\mathcal{U}(x)$ bodu x. Proto je $H = (c, d)$, a lze tedy definovat $\boldsymbol{\varphi}^*$ na sjednocení obou intervalů tak, že položíme

$$\boldsymbol{\varphi}^* := \boldsymbol{\varphi} \text{ na } (c_1, d_1)\,, \quad \boldsymbol{\varphi}^* := \boldsymbol{\psi} \text{ na } (c_2, d_2)\,.$$

Avšak stejným způsobem lze definovat maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}_{\max}$ pomocí množiny všech řešení $\{\boldsymbol{\varphi}_\alpha\,;\, \alpha \in A\}$, splňujících podmínku $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Je-li (c_α, d_α) definiční obor řešení $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$, je $x_0 \in (c_\alpha, d_\alpha)$. Položíme pro všechna $\alpha \in A$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\max} := \boldsymbol{\varphi}_\alpha \text{ na } (c_\alpha, d_\alpha)\,;$$

definice je dle předchozí úvahy korektní, $\boldsymbol{\varphi}_{\max}$ je hledané maximální řešení, přičemž $c := \inf\{c_\alpha;\ \alpha \in A\}$ a $d := \sup\{d_\alpha;\ \alpha \in A\}$. □

Poznámky 15.4.6. 1. V Příkladu 10.3.3 lze za G z předcházející Věty 15.4.4 volit oblasti $G_1 := \{[\,x, y\,];\, y > 0\}$ nebo $G_2 := \{[\,x, y\,];\, y < 0\}$, neboť to jsou *maximální* oblasti, v nichž jsou splněny předpoklady Věty 15.4.4. Čtenář by si měl znovu uvědomit, že definiční obor (interval) každého maximálního řešení v G_1 závisí na počáteční podmínce, tj. bodu $[\,x_0, y_0\,]$, který v G_1 zvolíme.

2. Je-li G množina z Věty 15.4.4, pak by se čtenář mohl domnívat, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ s definičním oborem (c, d) existuje $\lim_{x \to d-} \boldsymbol{\varphi}(x)$ a že „graf maximálního řešení končí v nějakém bodě hranice G". Platí však jen mnohem méně: označíme-li $\mathrm{Gr}(\boldsymbol{\varphi})$ graf $\boldsymbol{\varphi}$, platí

$$\operatorname{dist}(\mathrm{Gr}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbb{R}^2 \setminus G) = 0\,,$$

tj. graf $\boldsymbol{\varphi}$ „se neomezeně blíží k doplňku $\mathbb{R}^2 \setminus G$ množiny G".

Protože je např. $\big[(1/x)\sin(1/x)\big]' = (-1/x^2)\big[(1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)\big]$, má rovnice

$$y' = (-1/x^2)\big[(1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)\big]$$

v $G = \{[\,x, y\,];\, x > 0\}$ maximální řešení $\varphi(x) = (1/x)\sin(1/x)$, $x \in (0, \infty)$, které se však k doplňku G „blíží" velmi komplikovaným způsobem.

Jako důsledek Věty 15.4.4 dostaneme tvrzení o existenci maximálního řešení pro rovnice n-tého řádu.

Důsledek 15.4.7. *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je oblast,* $[x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}] \in G$*, a nechť funkce* f *v rovnici*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{15.20}$$

je v G *spojitá a lokálně lipschitzovská vůči posledním* n *proměnným. Potom*

(a) *existuje interval* (c, d) *obsahující bod* x_0 *a na* (c, d) *definované maximální řešení* φ *rovnice* (15.20) *takové, že platí*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto maximální řešení φ *vyhovuje předcházejícím počátečním podmínkám;*

(b) *toto maximální řešení* φ *je určeno jednoznačně.*

15.5 Lineární diferenciální rovnice

V dalším se budeme zabývat *lineární diferenciální rovnicí* řádu n. Její jednotlivá řešení budeme odlišovat indexy y_1, y_2, atd., proto změníme označení předepsaných hodnot v počáteční podmínce. Čtenáři doporučujeme, aby si připomenul jednoduchá tvrzení z Kapitoly 10. Budeme pracovat s pevně zvoleným intervalem (c, d); *funkce* $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou spojité funkce na (c, d). Vyšetřovaná rovnice je tvaru (dále však označení proměnné x budeme vynechávat)

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,. \tag{15.21}$$

Stejně jako v případě rovnice prvního řádu i zde snadno nahlédneme, že řešením rovnice (15.21) je funkce z prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$. Terminologie souvisí s tím, že levá strana rovnice (15.21) je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$ do $\mathcal{C}((c, d))$: je zřejmé, že pro y, y_1, y_2 z tohoto prostoru a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= L(y_1) + L(y_2)\,, \\ L(\alpha y) &= \alpha L(y)\,. \end{aligned}$$

Kromě rovnice (15.21) budeme ještě uvažovat rovnici

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = 0\,, \tag{15.22}$$

což je *přiřazená rovnice k* (15.21) *s nulovou pravou stranou*; někdy se užívá i názvu *přiřazená homogenní rovnice.* Náš postup je založen stejně jako v případě rovnice 1. řádu opět na myšlence nalézt všechna řešení rovnice (15.21) pomocí všech řešení rovnice (15.22).

Funkce $a_1, \dots, a_n$ jsou spojité na (c, d) a tedy i lokálně omezené. Pravá strana rovnosti

$$y^{(n)}(x) = b(x) - a_n(x)y(x) - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)}(x)$$

uvažovaná jako funkce proměnných $x, y, \dots y^{(n-1)}$, vyhovuje předpokladům Důsledku 15.4.7: Je-li totiž $\mathcal{U}(x)$ okolí bodu x, které leží i se svým uzávěrem v (c, d), pro všechna $t \in \mathcal{U}(x)$ je

$$\begin{aligned} &|b(t) - a_n(t)u_1 - \cdots - a_1(t)u_n - (b(t) - a_n(t)v_1 - \cdots - a_1(t)v_n)| \le \\ &\le \sup\{|a_k(t)|\,;\, k = 1, 2, \dots, n,\ t \in \mathcal{U}(x)\}\bigl(|u_1 - v_1| + \cdots + |u_n - v_n|\bigr)\,. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že maximální řešení rovnice (15.21) jsou definována na intervalu (c, d) a jsou jednoznačně určena počátečními podmínkami. Poznamenejme, že pro rovnici 1. řádu jsme maximální řešení jednoduše přímo spočetli.

Zcela analogicky jako v případě rovnice prvního řádu se dokáží následující jednoduchá tvrzení (důkazy vynecháme):

Lemma 15.5.1. *Je-li y_1 řešení rovnice* (15.21) *na (γ, δ) a y_2 řešením rovnice* (15.22) *na (γ, δ), pak je součet $y_1 + y_2$ řešením rovnice* (15.21) *na (γ, δ). Speciálně to platí pro maximální řešení.*

Lemma 15.5.2. *Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (15.21) *na intervalu (γ, δ), pak je jejich rozdíl $y_1 - y_2$ řešením rovnice* (15.22) *na (γ, δ). Speciálně to opět platí pro maximální řešení.*

Věta 15.5.3. *Obecné řešení rovnice* (15.21) *obdržíme jako součet jednoho maximálního řešení rovnice* (15.21) *a obecného řešení rovnice* (15.22)*. Jinak řečeno, je-li y_1 maximálním řešením rovnice* (15.21)*, pak pro každé maximální řešení y rovnice* (15.21) *existuje maximální řešení y_2 rovnice* (15.22) *tak, že platí*

$$y = y_1 + y_2\,.$$

Tvrzení 15.5.4. *Všechna maximální řešení rovnice* (15.22) *tvoří lineární prostor.*

Protože nás tento lineární prostor (podprostor $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$) zajímá, budeme nejprve studovat lineární nezávislost diferencovatelných funkcí.

Definice 15.5.5. Nechť $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$. Potom funkci [1]) definovanou na (c, d) předpisem

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x), & \dots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (c, d)\,,$$

[1]) Stejně bývá nazýván i determinant v následující rovnosti na pravé straně.

budeme nazývat podle jejího objevitele JÓZEFA MARII HÖNE-WROŃSKIHO (1776 – 1853) *Wrońskiho determinantem* funkcí $y_1, \dots, y_n$, resp. krátce, avšak nespisovně, *wronskiánem* funkcí $y_1, \dots, y_n$.

Tvrzení 15.5.6. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé funkce z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$. Potom*

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0\,,\ \ x \in (c,d)\,,$$

tj. wronskián těchto funkcí je roven identicky 0.

Důkaz. Pokud jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně závislé, existují konstanty $c_1, \dots, c_n$, které nejsou vesměs rovny 0 tak, že platí

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0$$

(jde o rovnost funkcí na (c,d) !). Zderivujeme tuto rovnost $(n-1)$-krát, čímž dostaneme pro všechna $x \in (c,d)$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x) & + & \cdots & + & c_n y_n(x) & = & 0\,, \\ c_1 y_1'(x) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x) & = & 0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0\,. \end{array} \tag{15.23}$$

Pro každé x má tato soustava lineárních rovnic s neznámými $c_1, c_2, \dots, c_n$ netriviální řešení, a to dokonce nezávislé na x. Odtud ale plyne, že matice soustavy musí být singulární pro každé $x \in (c,d)$, a proto platí

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0\,, \quad x \in (c,d)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Připomínáme Důsledek 15.4.7 (pozor na změnu označení!), z něhož plyne existence a jednoznačnost maximálního řešení rovnice (15.22) pro $x_0 \in (c,d)$ a každou počáteční podmínku tvaru

$$y(x_0) = z_0\,,\ \dots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1}\,.$$

Zvolíme-li nyní postupně např.

$$\begin{array}{llll} y(x_0) = 1\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 1\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ \quad\vdots & \quad\vdots & & \quad\vdots \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \end{array} \tag{15.24}$$

pak tomuto systému n počátečních podmínek odpovídá n lineárně nezávislých řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice (15.22), protože $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x_0) \neq 0$.

Tvrzení 15.5.7. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé funkce z $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$, které jsou* řešeními rovnice (15.22). *Potom platí pro všechna $x \in (c,d)$*

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť existuje nějaké $x_0 \in (c,d)$ tak, že

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x_0) = 0\,.$$

Potom má soustava (15.23) pro $x = x_0$ netriviální řešení $(c_1, \dots, c_n)$. Položme

$$y^* := c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n\,.$$

Zřejmě je $y^*(x_0) = 0$. Jestliže však jsou $y_1, \dots, y_n$ řešení (15.22), je i y^* řešením (15.22) a

$$y^*(x_0) = 0\,,\ (y^*)'(x_0) = 0\,, \dots\,, (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0\,;$$

podle věty o jednoznačnosti je $y^*(x) \equiv 0$, tj. y^* je nulové řešení. Je tedy

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0$$

a tato rovnost platí všude v (c,d). Odtud plyne, že $W[\,y_1, \dots, y_n\,]$ nemůže nabývat hodnoty 0 v žádném bodě $x \in (c,d)$, pokud jsou řešení $y_1, \dots, y_n$ nezávislá. □

Poznámka 15.5.8. Není-li wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$ identicky roven 0, jsou tyto funkce lineárně nezávislé, což plyne z již dříve dokázaného tvrzení. Předchozí tvrzení ukazuje, že pro $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}((c,d))$, které *jsou řešeními* (15.22), nastává právě jedna z možností:

1. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0$ pro všechna $x \in (c,d)$, nebo
2. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) \neq 0$ pro všechna $x \in (c,d)$.

Poznámka 15.5.9. Tvrzení podstatně závisí na větě o jednoznačnosti: jsou-li $y_1, \dots, y_n$ pouze (dostatečně hladké) funkce, pro které je wronskián nulový, pak *neplyne* z podmínky 1. jejich lineární závislost. Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil nalézt vhodný ilustrativní příklad.

Tvrzení 15.5.10. *Dimenze prostoru všech maximálních řešení rovnice n-tého řádu*
(15.22) *je právě n.*

Důkaz. Víme již, jak lze např. pomocí (15.24) nalézt n lineárně nezávislých maximálních řešení rovnice (15.22). Nyní dokážeme, že tato řešení tvoří bázi lineárního prostoru všech maximálních řešení rovnice (15.22): Jestliže je y libovolné řešení rovnice $L(y) = 0$, pak zvolme $x_0 \in (c,d)$ a označíme

$$z_0 := y(x_0)\,,\ z_1 := y'(x_0)\,, \dots\,,\ z_{n-1} := y^{(n-1)}(x_0)\,;$$

Nyní ze soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & z_0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & z_{n-1} \end{array}$$

určíme koeficienty $c_1, \ldots, c_n$. Matice soustavy je totiž zřejmě regulární, takže koeficienty $c_1, \ldots, c_n$ jsou určeny jednoznačně. Potom je

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

protože levá i pravá strana jsou maximálními řešeními (15.22) se shodnými počátečními podmínkami v bodě x_0. □

Rovnice (15.22) má tedy právě n lineárně nezávislých maximálních řešení, která tvoří bázi prostoru všech maximálních řešení (15.22); je vhodné si však uvědomit, že pouze víme, že tato řešení *existují*, ale nemáme obecně žádnou metodu, jak je spočítat.

Definice 15.5.11. Každá n-tice lineárně nezávislých řešení rovnice (15.22) definovaných na intervalu (γ, δ) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (15.22) na (γ, δ).

Úlohu řešit rovnici (15.22) jsme převedli na úlohu nalézt její fundamentální systém *maximálních* řešení; potom lze *každé řešení* rovnice (15.22) vyjádřit jako restrikci vhodné lineární kombinace funkcí z tohoto fundamentálního systému. Obecné řešení rovnice (15.22) je tedy tvaru

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n\,,$$

kde $\{\, y_1, \ldots, y_n \,\}$ je nějaký fundamentální systém maximálních řešení rovnice (15.22) a $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolné (reálné) konstanty.

Při hledání obecného řešení rovnice (15.21) postupujeme analogicky jako v případě rovnice 1. řádu, podle tvrzení z Lemmat 15.5.1, 15.5.2 a Věty 15.5.3. Odtud ihned plyne praktický návod: Obecné řešení rovnice (15.21) je součtem obecného řešení rovnice (15.22) a jednoho libovolně zvoleného řešení rovnice (15.21); tomuto řešení se opět říká *partikulární řešení*.

Určení obecného řešení rovnice (15.22) není v obecném případě lehké. Tak např. pro rovnice prvního řádu umíme úlohu zredukovat na hledání vhodné primitivní funkce. Umíme-li nějaké partikulární řešení rovnice (15.21) uhodnout, lze řešení někdy převést na řešení rovnice nižšího řádu. Někdy je rovnice (15.22) speciálního tvaru, a pak ji lze díky tomu rovněž vyřešit. Tyto metody nebudeme podrobněji rozebírat a čtenáře, pokud by se tyto metody chtěl naučit, odkazujeme např. na [3], [11], [15] a další učebnice.

Známe-li obecné řešení rovnice (15.22), existuje metoda, pomocí níž lze určit potřebné partikulární řešení rovnice (15.21). Je zobecněním metody, se kterou se čtenář setkal v Poznámce 10.1.13 a která je založena na předpokladu, že se toto partikulární řešení dá vyjádřit ve tvaru lineární kombinace fundamentálního systému řešení s koeficienty, které jsou *funkcemi* na (c,d), tj.

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\,, \quad x \in (c,d)\,. \tag{15.25}$$

Historická poznámka 15.5.12. Tato metoda se objevuje v jednoduché verzi v souvislosti se studiem speciální rovnice 2. řádu poprvé u Leonharda Eulera (1707 – 1783) r. 1739. V obecnější podobě ji při systematickém studiu lineárních diferenciálních rovnic (s nekonstantními koeficienty) použil později Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813); ten se patrně inspiroval staršími metodami výpočtů v astronomii. Viz [6].

Provedeme nyní následující výpočet: derivujeme y ve tvaru (15.25) a ve vyjádření y' položme součet členů obsahujících $c_1', \dots, c_n'$ roven 0; pak počítáme y'' a postupujme obdobně, atd. Klademe výrazy ve druhé až předposlední rovnici zcela vpravo v závorkách, obsahující derivace $c_1', \dots, c_n'$, vždy rovny 0, čímž dostaneme $(n-1)$ rovnic pro neznámé $c_1', \dots, c_n'$. Formální úprava dává dobrou představu o podstatě věci, pro stručnost vynecháváme proměnnou x:

$$\begin{aligned}
y &= c_1y_1 + \cdots + c_ny_n\,, \\
y' &= c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' && + \left(c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n\right), \\
y'' &= c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n'' && + \left(c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'\right), \\
&\vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} && + \left(c_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-2)}\right), \\
y^{(n)} &= c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)} && + \ c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)}\,.
\end{aligned}$$

Upravme předcházejících $(n+1)$ rovnic tak, že vynásobíme prvou rovnici funkcí a_n, druhou rovnici funkcí a_{n-1} atd. Předposlední rovnici násobíme funkcí a_1. Všechny takto získané rovnice včetně poslední neupravované sečteme. Protože $y_1, \dots, y_n$ jsou řešeními (15.22), dostáváme po snadné úpravě s přihlédnutím k (15.21)

$$L(y) = c_1L(y_1) + \cdots + c_nL(y_n) + c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Prvých n sčítanců se zřejmě anuluje; dostaneme tak poslední, tj. n-tou rovnici

$$c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Nalezená soustava

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1'y_1 & + & \cdots & + & c_n'y_n & = & 0\,, \\
c_1'y_1' & + & \cdots & + & c_n'y_n' & = & 0\,, \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
c_1'y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_n'y_n^{(n-1)} & = & b\,,
\end{array}$$

pro neznámé funkce $c_1', \dots, c_n'$ má regulární matici, proto se problém redukuje na nalezení n primitivních funkcí k n spojitým funkcím, čímž získáme potřebné partikulární řešení. Podotýkáme, že zde užíváme Cramerovo pravidlo známé z algebry, pomocí kterého vyjadřujeme $c_1', \dots, c_n'$ ve tvaru podílů spojitých funkcí (dělíme wronskiánem fundamentálního systému řešení).

Popsaná metoda se nazývá *metoda variace konstant*. Její aplikace na konkrétní případy může být velmi pracná, zejména pokud ji provádíme „ručně".

15.6 Případ konstantních koeficientů

Vraťme se k problému určení fundamentálního systému řešení rovnice (15.22). Ve speciálním případě, kdy má rovnice (15.21), resp. (15.22), za koeficienty $a_1, \dots, a_n$ *konstantní* funkce na (c, d), můžeme převést úlohu nalézt fundamentální systém řešení rovnice (15.22) na ryze algebraickou úlohu. Zdůrazněme, že naším cílem je najít pro případ takové rovnice (15.22) s koeficienty $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *reálné funkce* (na $\mathbb{R}$), tvořící fundamentální systém řešení (15.22).

Předpokládejme, že rovnice (15.22), tj. $L(y) = 0$, má řešení tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{15.26}$$

a pokusme se nalézt podmínky charakterizující volbu takových α. Po zderivování a dosazení do (15.22) obdržíme

$$L(\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n \alpha^0 \right) = 0\,. \tag{15.27}$$

Stačí tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$, které je kořenem tzv. *charakteristické rovnice* příslušné k (15.22)

$$P(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,. \tag{15.28}$$

a máme jedno (reálné) řešení tvaru (15.26). Tímto způsobem přiřazujeme operátoru L *charakteristický polynom* P.

Avšak rovnice (15.28) nemusí vůbec mít *reálné* kořeny: Základní věta algebry o existenci kořene každé algebraické rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde P je polynom stupně $\mathrm{st}(P) \geq 1$, nám jako důsledek dává pro rovnici stupně n, $n \geq 1$, existenci *právě n obecně komplexních kořenů*, počítaných včetně jejich násobnosti.

Vznikají přirozené otázky:

1. Je-li charakteristická rovnice přiřazená operátoru L z rovnice (15.22) tvaru
$$P(\alpha) = 0\,, \tag{15.29}$$
pak její vícenásobné kořeny dávají pouze jedno „přirozené řešení"; jak lze nalézt celý fundamentální systém řešení rovnice (15.22)?

2. Co dělat s komplexními kořeny rovnice (15.29) v případě, že hledáme *reálný* fundamentální systém (P je polynom s reálnými koeficienty)?

Výsledky jsou průhlednější, interpretujeme-li je z hlediska *komplexních funkcí* reálné proměnné. Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (obecně komplexní) kořeny (15.29) a jsou-li tyto kořeny navzájem různé, jsou funkce

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \mathrm{e}^{\alpha_2 x}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

řešeními (15.22) a jsou navzájem nezávislé, tj. tvoří fundamentální systém. Pro jejich wronskián dostaneme snadným výpočtem

$$W[\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_n x}] = \mathrm{e}^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \dots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

přičemž determinant vpravo je tzv. *Vandermondův determinant*; jeho hodnota je rovna součinu všech dvojčlenů $(\alpha_j - \alpha_k)$ pro $1 \le j < k \le n$, a je tedy nenulová. Jsou-li tyto kořeny vesměs reálné, získáme tak fundamentální systém složený z n reálných funkcí.

Poznámka 15.6.1. Má-li charakteristický polynom P v (15.28) pouze *reálné* koeficienty $a_1, \dots, a_n$, pak s každým kořenem α má též kořen $\overline{\alpha}$ (číslo komplexně sdružené). Je-li totiž $P(\alpha) = 0$, je také

$$0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n} = (\overline{\alpha})^n + a_1(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_n \,. \tag{15.30}$$

Když některé kořeny charakteristické rovnice nejsou reálné, dostáváme řešení rovnice (15.22), která jsou však komplexními funkcemi reálné proměnné. Ta jsou nad $\mathbb{R}$ nezávislá. Je-li $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$, jsou řešení tvaru

$$\mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x) \,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x) \,.$$

Přejdeme k jejich vhodným lineárním kombinacím, které dají reálnou a imaginární část:

$$\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x \,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x \,.$$

Z předcházející úvahy nebo přímým výpočtem snadno ověříme, že jsou to lineárně nezávislé funkce: Z rovnosti

$$c_1\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x + c_2\mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x = 0$$

dostaneme dělením $\mathrm{e}^{\beta x} \ne 0$ a pak zderivováním a dělením $\gamma \ne 0$ dvojici rovnic:

$$\begin{aligned} c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x &= 0 \,, \\ -c_1\sin\gamma x + c_2\cos\gamma x &= 0 \,. \end{aligned}$$

Tato soustava má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$.

Poznámka 15.6.2. Zbývá vyřešit případ vícenásobných kořenů. Motivací nám bude úvaha: Jsou-li $\alpha_1 \neq \alpha_2$ reálná čísla, která jsou kořeny (15.29), je

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 x} - \mathrm{e}^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 x}\big(\mathrm{e}^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} - 1\big)}{(\alpha_1 - \alpha_2)x}\, x$$

rovněž řešení (15.22). Představíme-li si, že dvojnásobný kořen vzniká „splynutím“ dvou kořenů, můžeme provést experiment: Při $\alpha_1 \to \alpha_2$ má zlomek vpravo zřejmě limitu $x\mathrm{e}^{\alpha_2 x}$. To nás vede k *domněnce*, že tato funkce je rovněž řešením (15.22) a že toto řešení je s ostatními „zřejmými“ lineárně nezávislé. Ověření správnosti domněnky, ke které jsme popsanou úvahou dospěli, není složité, ale je pracnější a *technicky* trochu náročnější.

Tvrzení 15.6.3. *Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ navzájem různé kořeny rovnice* (15.29) *s násob- nostmi $s_1, \dots, s_r$ a je $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = n$, pak*

$$\begin{array}{llll} \mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & \dots, & x^{s_1 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \\ \mathrm{e}^{\alpha_2 x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_2 x}, & \dots, & x^{s_2 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{\alpha_k x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_k x}, & \dots, & x^{s_r - 1}\mathrm{e}^{\alpha_r x} \end{array} \tag{15.31}$$

tvoří fundamentální systém řešení (15.22).

Pokud má charakteristický polynom P reálné koeficienty, lze přechodem k vhodným lineárním kombinacím řešení příslušných komplexně sdruženým kořenům dosáhnout toho, že vzniklý fundamentální systém je tvořen pouze reálnými funkcemi.

Pro důkaz Tvrzení 15.6.3 je vhodné si připravit několik jednoduchých lemmat.

Lemma 15.6.4. *Nechť operátor v rovnici $L(y) = 0$ má charakteristickou rovnici $Q(\alpha) = 0$ s kořenem $\alpha_0 = 0$ násobnosti s, tj.*

$$Q(\alpha) = \alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \cdots + b_{n-s}\alpha^s = 0\,,$$

kde $b_{n-s} \neq 0$. Pak má rovnice $L(y) = 0$ lineárně nezávislá řešení

$$1\,,\ x\,, \dots, x^{s-1}\,.$$

Důkaz. Dosazením se snadno přesvědčíme, že funkce jsou řešeními rovnice. Stejně snadno zjistíme, že wronskián těchto funkcí $W[\,1, x, \dots, x^{s-1}] \neq 0$; jde totiž o determinant trojúhelníkové matice, na jejíž hlavní diagonále jsou vesměs nenulové prvky. Proto jsou tato řešení lineárně nezávislá. ☐

Lemma 15.6.5. *Nechť operátor v rovnici $L(y) = 0$ má charakteristickou rovnici $Q(\alpha) = 0$ s obecným kořenem α_0 násobnosti s. Potom má rovnice $L(y) = 0$ řešení*

$$1 \cdot \mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ x\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ \dots,\ x^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha_0 x}\,.$$

Důkaz. Hledejme řešení y rovnice $L(y) = 0$ ve tvaru součinu: $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x}$; proměnnou x budeme u funkce z pro zestručnění zápisu vynechávat. Je

$$y = z\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ y' = z'\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x} + z\,\alpha_0\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x}, \dots ,$$

takže po dosazení dostaneme $L(y) = L\big(z\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x}\big) = \mathrm{e}^{\alpha_0 x} M(z)$, kde M je lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty. Najdeme charakteristický polynom Q_1 operátoru M. Z (15.27) dostáváme

$$L(\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x} Q(\alpha)\,. \tag{15.32}$$

Dále platí

$$\mathrm{e}^{\alpha x} Q_1(\alpha) = M\big(\mathrm{e}^{\alpha x}\big)\,, \qquad \text{tedy} \qquad Q_1(\alpha) = \frac{M\big(\mathrm{e}^{\alpha x}\big)}{\mathrm{e}^{\alpha x}}\,.$$

Odtud snadno spočteme

$$Q_1(\alpha) = \frac{M\big(\mathrm{e}^{\alpha x}\big)}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = \frac{L\big(\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\alpha_0 x}\big)}{\mathrm{e}^{\alpha_0 x}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = \frac{L\big(\mathrm{e}^{(\alpha+\alpha_0)\,x}\big)}{\mathrm{e}^{(\alpha+\alpha_0)\,x}} = Q\big(\alpha + \alpha_0\big)\,,$$

z čehož vyplývá: Má-li charakteristický polynom Q kořen α_0 násobnosti s, má charakteristický polynom Q_1 kořen 0 násobnosti s. Podle Lemmatu 15.6.4 jsou funkce $1, x, \dots, x^{s-1}$ řešeními rovnice $M(z) = 0$, takže funkce

$$1 \cdot \mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ x\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ \dots,\ x^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha_0 x}$$

jsou řešeními rovnice $L(y) = 0$. □

Tím jsme získali „stavební prvky“ pro systém (15.31). Nyní dokážeme platnost tvrzení, které je samo o sobě zajímavé, a pomocí kterého již důkaz snadno dokončíme.

Lemma 15.6.6. *Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou libovolná navzájem různá (komplexní) čísla. Jestliže polynomy $H_1, H_2, \dots, H_r$ vyhovují rovnici*

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0\,,$$

potom jsou H_k identicky nulové polynomy pro všechna $k = 1, 2, \dots, r$.

Důkaz. Nejprve si povšimneme, že je-li $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$ a $H \not\equiv 0$ je polynom stupně m, pak

$$\big(\mathrm{e}^{\mu x} H(x)\big)' = \mathrm{e}^{\mu x}\mu H(x) + \mathrm{e}^{\mu x} H'(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\big(H'(x) + \mu H(x)\big) =: \mathrm{e}^{\mu x} K(x)\,,$$

kde polynom K má rovněž stupeň m. Dále postupujeme „konečnou“ indukcí vzhledem k r: Dokážeme, že vždy všechny K_k a tedy i H_k jsou identicky nulové. Pro

$r = 1$ je tvrzení zřejmé, protože exp nenabývá nikde hodnoty 0, a tak musí platit $H_1 \equiv 0$. Dále ukážeme, že pokud platí tvrzení pro $r - 1 \geq 1$, platí i pro r: z rovnosti

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0 \quad \text{plyne} \quad H_r(x) = -\sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{e}^{(\alpha_k - \alpha_r)\, x} H_k(x)\,.$$

Nyní derivujeme poslední rovnost tolikrát, abychom dostali (poprvé) vlevo identicky nulovou funkci; obdržíme tak rovnost

$$0 = \sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{e}^{(\alpha_k - \alpha_r)\, x} K_k(x)\,,$$

přičemž stupně každých dvou polynomů H_k a K_k jsou pro $k = 1, 2, \ldots, r-1$ stejné. Vzhledem k tomu, že exponenty v exponenciále jsou všechny různé, je podle indukčního předpokladu $K_k \equiv 0$ a také $H_k \equiv 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, r-1$. Odtud plyne, že také $H_r \equiv 0$, čímž je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Důkaz Tvrzení 15.6.3. Protože lineární kombinace řešení ze seznamu (15.31) má formálně tvar kombinace

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0\,,$$

kde H_k je polynom, který má stupeň s_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, r$, dostáváme odtud, že funkce v seznamu (15.31) jsou lineárně nezávislé a tedy (15.31) je popis fundamentálního systému řešení rovnice (15.22).

Pokud má charakteristický polynom P rovnice $L(y) = 0$ všechny koeficienty reálné, postupujeme jako v Poznámce 15.6.1 a z „párových" komplexních řešení vytvoříme řešení reálná. Tím je důkaz Tvrzení 15.6.3 dokončen. □

Příklad 15.6.7. Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$L_1(y) := y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{15.33}$$

má její charakteristická rovnice tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Jejími různými kořeny jsou čísla 1 a 2, proto je fundamentální systém řešení tvořen funkcemi e^x a e^{2x} a její obecné řešení obvykle zapisujeme ve tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, což je popis prvků dvojrozměrného prostoru generovaného funkcemi e^x a e^{2x}. Podobně v případě dvojnásobného kořene charakteristické rovnice pro rovnici

$$L_2(y) := y'' - 2y' + y = 0 \tag{15.34}$$

je tvořen fundamentální systém řešení funkcemi e^x a $x\mathrm{e}^x$. Konečně pro rovnici

$$L_3(y) := y'' + 4y' + 13y = 0\,, \tag{15.35}$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $-2 + 3\mathrm{i}$ a $-2 - 3\mathrm{i}$, dostaneme jim odpovídající komplexní funkce $\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})x}$ a $\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})x}$. Zřejmě je

$$\mathrm{e}^{(-2\pm3\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x \pm \mathrm{i}\sin 3x)\,.$$

Obě komplexní funkce reálné proměnné mají (až na znaménko) shodnou reálnou a imaginární část $\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x$ a $\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; tyto funkce rovněž tvoří fundamentální systém řešení rovnice (15.35). O správnosti těchto jednoduchých tvrzení se lze přesvědčit přímým výpočtem.

Existuje „jednoduchý trik“, který umožňuje snadno, bez použití další integrace, kterou bychom prováděli při užití variace konstant, nalézt partikulární řešení rovnice (15.21) pro speciální pravé strany. Je vhodné si pamatovat jeho „komplexní verzi“, ze které snadno plyne postup v „reálném případě“. *Jestliže je pravá strana $b(x)$ rovnice* (15.21) *tvaru*

$$f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde f je polynom stupně r (*s komplexními koeficienty*) *a* $\lambda \in \mathbb{C}$, *pak klademe* $k = 0$ *pro případ* $P(\lambda) \neq 0$, *respektive* $k =$„násobnost kořenu λ charakteristického polynomu P“, *a rovnice* (15.21)

$$L(y) = f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

má partikulární řešení tvaru

$$x^k\,g(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde g je polynom (*s komplexními koeficienty*) *téhož stupně r jako f.* Ostatní případy pravých stran typu $f(x)\cos x$, resp. $f(x)\sin x$ apod. jsou v tomto případu zahrnuty, čtenář si je však musí samostatně promyslet. Jelikož při aplikaci metody zároveň ověřujeme, že předpokládané řešení je skutečně partikulárním řešením (15.21), nebudeme tento trik nijak teoreticky zdůvodňovat; viz [11], str. 128, [8], str. 52, nebo [15], str. 244. Praktickou ukázku poskytuje následující příklad.

Příklad 15.6.8. Navážeme na předcházející Příklad 15.6.7. Řešme rovnici

$$L_1(y) = y'' - 3y' + 2y = 2x + 3\,. \tag{15.36}$$

Kořeny příslušné charakteristické rovnice pro (15.33) jsou čísla 1 a 2, pravá strana (15.36) má tvar $\mathrm{e}^{0x}(2x+3)$ a 0 *není* kořenem charakteristické rovnice. Protože $2x+3$ je polynom stupně 1, hledáme partikulární řešení rovnice (15.36) ve tvaru $\mathrm{e}^{0x}(ax+b) = ax+b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Po zderivování a dosazení do (15.36) dostaneme rovnici

$$0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 3\,,$$

ze které snadno spočteme $a = 1$, $b = 3$. Tímto způsobem jsme snadno určili partikulární řešení $y_1 = x + 3$ rovnice (15.36), a proto je její obecné řešení tvaru

$$y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x + 3\,.$$

Pro rovnici $L_1(y) = x^2 e^{2x}$ je situace nepatrně složitější, protože 2 je (jednoduchým) kořenem charakteristické rovnice pro (15.33); v tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx)\,.$$

Konečně pro rovnici $L_1(y) = e^x \cos 2x$ uvážíme, že její pravá strana je reálnou částí funkce $e^{(1+2i)x}$, a protože komplexní číslo $1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice pro (15.33), hledáme v tomto případě partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x\,,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Podobně pro rovnici $L_2(y) = e^x(x+3)$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_1 = e^x(ax^3 + bx^2)$, protože číslo 1 je *dvojnásobným* kořenem charakteristické rovnice pro (15.34). Konečně pro rovnici $L_3(y) = x^2 e^{-2x} \sin 3x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx)\, e^{-2x} \cos 3x + (dx^3 + fx^2 + gx)\, e^{-2x} \sin 3x\,,$$

kde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$, protože komplexní čísla $-2 \pm 3i$ jsou jednoduchými kořeny charakteristické rovnice pro (15.35).

Poznamenejme, že je pak již jen záležitostí početní praxe odhadnout, zda je výhodnější použít variaci konstant nebo „hádání“ tvaru řešení. Pokud se zbavíme nutnosti hledat primitivní funkce, neznamená to zdaleka, že jiný postup je časově méně výhodný. Podrobný výklad metody nalezne čtenář např. v [11], str. 128.

Příklad 15.6.9. Dostatek praktických příkladů na užití rovnic vyšších řádů poskytuje např. fyzika. Rovnice

$$y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$$

s $\omega > 0$ a s $a = 0$ je rovnice tzv. *harmonického lineárního oscilátoru.* Jejím netriviálním obecným řešením ($c_1^2 + c_2^2 > 0$) jsou funkce

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{15.37}$$

Položíme-li $C = (\, c_1^2 + c_2^2\,)^{1/2} > 0$, pak existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$y(t) = C \sin(\omega t + t_0)\,.$$

Číslo C je tzv. *amplituda* a t_0 *fáze.* Jestliže je $a > 0$, pak povaha řešení rovnice (15.37) závisí na vztahu ω a a. Řešení popisují silně tlumené ($a > \omega$), kriticky tlumené ($a = \omega$) či slabě tlumené ($a < \omega$) kmity. Viz např. [10], str. 76 a násl. V těchto skriptech nalezne čtenář mnoho příkladů aplikací teorie (obyčejných) diferenciálních rovnic.

15.7 Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Budeme se ještě krátce zabývat systémy diferenciálních rovnic. V této části budeme užívat ještě hlubší poznatky z algebry. Následující výklad ukazuje jejich využití. Ilustrativní příklad nám ukáže, že se budeme moci omezit, podobně jako již dříve, na systémy (soustavy) rovnic prvního řádu.

Příklad 15.7.1. Mechanickou konfiguraci, v níž je na pružině o tuhosti k_1 zavěšeno závaží o hmotnosti m_1, na kterém je na pružině o tuhosti k_2 zavěšeno závaží o hmotnosti m_2, popisuje systém

$$
\begin{aligned}
m_1 y_1'' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,,\\
m_2 y_2'' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,.
\end{aligned}
$$

Předpokládáme, že kromě gravitační síly nepůsobí na systém žádná další vnější síla. Funkce y_1 a y_2 popisují výchylky závaží od rovnovážného stavu. Pomocí substituce $y_1' = (1/m_1)y_3$, $y_2' = (1/m_2)y_4$ dostaneme systém prvního řádu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= (1/m_1)y_3\,,\\
y_2' &= (1/m_2)y_4\,,\\
y_3' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,,\\
y_4' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,.
\end{aligned}
$$

Předešlý příklad lze snadno zobecnit: každý podobný systém lze analogicky převést na systém prvního řádu. Dále ukážeme, jak *ve speciálních případech* řešit systém (soustavu) diferenciálních rovnic prvního řádu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\
&\ \vdots\\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,
\end{aligned}
$$

který jsme zkráceně zapisovali ve tvaru

$$
\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,,
$$

a pro který jsme odvodili „lokální“ existenční Větu 15.4.1. Chceme-li systém prakticky řešit, jsou zjednodušení nutná: omezíme se proto na *lineární systémy.* Obecně jde totiž o složitý problém, avšak, stejně jako výše, pro speciální případy je k dispozici poměrně jednoduchá teorie. Budeme se tedy zabývat systémem

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + b_1(x)\,,\\
y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n + b_2(x)\,,\\
&\ \vdots\\
y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)\,,
\end{aligned}
\tag{15.38}
$$

který budeme zapisovat „maticově“ ve tvaru

$$
\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,;
$$

zde $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{b}$ chápeme jako *sloupcové n-rozměrné vektory*, $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou (reálné) funkce. Přitom budeme předpokládat, že a_{jk} a b_j jsou *spojité* funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. V tomto případě pro každý bod $[\,x_0, \boldsymbol{y}^0\,] \in I \times \mathbb{R}^n$ existuje podle Věty 15.4.4 právě jedno řešení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ definované na intervalu I, splňující podmínku $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$.

Není příliš překvapující, že budeme uvažovat opět *dva* systémy rovnic, a to jednak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{15.39}$$

a pak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}\,. \tag{15.40}$$

Postupně odvodíme tvrzení, která budou obdobná jako v případě lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Lemma 15.7.2. *Všechna řešení systému* (15.40) *definovaná na tomtéž intervalu tvoří lineární prostor. Speciálně to platí pro všechna maximální řešení.*

Důkaz. Pro řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ systému (15.40) a c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ zřejmě platí

$$(\,c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)' = c_1\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}(x)\,(\,c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)\,,$$

což dokazuje tvrzení. □

Nyní ukážeme, že tento prostor má dimenzi n. Nejprve budeme řešit důležitou otázku, kdy jsou n-rozměrné vektorové funkce $\boldsymbol{g}_k(x) = (g_k^1(x), g_k^2(x), \ldots, g_k^n(x))$, $x \in I$, $k = 1, \ldots, n$, lineárně nezávislé na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li lineárně závislé, pak musí existovat netriviální lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tak, že (vektorová) funkce

$$c_1\boldsymbol{g}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{g}_n(x) \equiv \mathbf{0}\,,$$

tj. tato kombinace je n-rozměrným nulovým vektorem v každém bodě $x \in I$. K tomu je nutné, aby determinant matice, jejíž sloupce tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \ldots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, byl na I *nulovou funkcí*. Determinant funkční matice, jejíž sloupce tvoří funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \ldots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, má analogické vlastnosti jako dříve zavedený Wrónskiho determinant. To nám bude vodítkem pro další postup.

Pomocí Věty 15.4.4 o jednoznačnosti najdeme n lineárně nezávislých řešení

$$\boldsymbol{y}_1 = (y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n),\ \ldots,\ \boldsymbol{y}_n = (y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^n)\,,$$

která splňují rovnici (15.40) a pro nějaké $x_0 \in I$ podmínku

$$\boldsymbol{y}_k(x_0) = \mathbf{e}^k\,, \quad k = 1, \ldots, n\,; \tag{15.41}$$

vektor $\mathbf{e}^k$ je standardní souřadnicový vektor $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, který má k-tou souřadnici rovnou 1, zatímco ostatní jsou rovny 0. Řešení jsou opravdu lineárně nezávislá, protože z $\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k = \mathbf{0}$ plyne dosazením x_0 rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k(x_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{e}^k = \mathbf{0}\,.$$

Protože $\mathbf{e}^k$, $k = 1, \dots, n$, jsou lineárně nezávislé, plyne odtud $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Lemma 15.7.3. *Všechna maximální řešení systému* (15.40) *tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. Z předchozí úvahy vyplývá, že dimenze tohoto prostoru je alespoň n. Je-li $\boldsymbol{y}^*$ libovolné řešení systému (15.40), je $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \dots, h^n)$ a $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \sum_{k=1}^{n} h^k \mathbf{e}^k$. Pak podle věty o jednoznačnosti je $\boldsymbol{y}^*(x) = \sum_{k=1}^{n} h^k \boldsymbol{y}_k(x)$ pro všechna $x \in I$. □

Jsou-li funkce $\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_n$, resp. jejich složky g_j^k, $j, k = 1, 2, \dots, n$, funkcemi z $\mathcal{C}^k(I)$, je i jejich determinant funkcí z $\mathcal{C}^k(I)$. Přitom je pro lineárně závislé funkce roven 0 všude v I. Ukážeme, že v případě vektorových funkcí $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$, které jsou *řešeními systému* (15.40), platí alternativa v „silnější“ podobě: je-li determinant matice $\left(y_j^k\right)$ různý od 0 alespoň v jednom bodě intervalu I, je nenulový ve *všech* bodech I. Je-li totiž nulový v nějakém bodě $x_0 \in I$, existuje netriviální lineární kombinace taková, že $c_1 \boldsymbol{y}_1(x_0) + \cdots + c_n \boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}$. Pak podle věty o jednoznačnosti je

$$c_1 \boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n \boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}$$

pro všechna $x \in I$. Jestliže srovnáme dosud nalezené poznatky s tím, co jsme odvodili pro lineární rovnici n-tého řádu, vidíme, že je účelné i v tomto případě zavést pojem *fundamentálního systému řešení*.

Definice 15.7.4. Množinu každých n lineárně nezávislých řešení systému (15.40) na intervalu (c, d) nazýváme *fundamentální systém řešení soustavy* (15.40) na (c, d). Matici, jejíž *sloupce* tvoří fundamentální systém maximálních řešení soustavy (15.40), nazýváme *fundamentální maticí soustavy* (15.40). Budeme ji značit $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Y}(x)$. Je tedy

$$\boldsymbol{Y}(x) := \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_n^n \end{pmatrix} \tag{15.42}$$

Důsledek 15.7.5. *Determinant fundamentální matice systému* (15.42) *je na I všude různý od* 0*.*

Označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ *sloupcový* vektor, můžeme zkráceně zapisovat *obecné řešení* jako maticový součin $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}$. Snadno nahlédneme, že i v tomto případě platí analogická tvrzení jako pro lineární rovnici n-tého řádu; jejich důkaz by byl jen opakováním úvah, které jsme již jednou prováděli a které mají elementární charakter. Shrneme tyto poznatky do jediného tvrzení:

Tvrzení 15.7.6. *Obecné řešení systému* (15.40) *obdržíme jako množinu všech lineárních kombinací fundamentálního systému řešení soustavy* (15.40)*; závisí tak na n parametrech, kterými jsou koeficienty této lineární kombinace. Rozdíl každých dvou řešení systému* (15.39) *je řešením* (15.40). *Proto obecné řešení systému* (15.39) *obdržíme jako* (*množinový*) *součet obecného řešení systému* (15.40) *a* (*jednoho*) *partikulárního řešení systému* (15.39).

Jestliže známe fundamentální systém řešení systému (15.40), můžeme pro určení partikulárního řešení systému (15.39) užít metodu variace konstant. Při jejím odvození použijeme s výhodou maticový zápis.

Budeme hledat řešení systému (15.39) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\,,$$

kde sloupcový vektor $\boldsymbol{c}(x)$ je (vektorovou) *funkcí* na intervalu I a $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice systému (15.40), která je tedy regulární v každém bodě $x \in I$ a jejíž prvky jsou spojité funkce na I. Pro toto řešení dostaneme

$$\boldsymbol{Y}'(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \big(\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\big)' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Protože $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)$, porovnáním výrazů stojících vlevo a vpravo vyplývá, že $\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$, $x \in I$, a tedy

$$\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\,\boldsymbol{b}(x)\,.$$

Inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}$ je regulární v každém bodě $x \in I$ a její prvky jsou spojité funkce na I; to plyne z vlastností $\boldsymbol{Y}$ a ze vzorce pro výpočet prvků inverzní matice. Proto na pravé straně předcházející rovnosti stojí spojitá vektorová funkce. Integrací poslední rovnosti (v mezích x_0 a x) dostaneme pro každé $x \in I$ vzorec

$$\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{c}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Věta 15.7.7. *Jestliže jsou maticová funkce $\boldsymbol{A}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a je-li $x_0 \in I$, má Cauchyho počáteční úloha pro systém*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0\,,$$

právě jedno řešení na I pro každý bod $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Toto řešení je popsáno vzorcem

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{Y}(x)\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,. \tag{15.43}$$

Důkaz. Pro důkaz správnosti vzorce si stačí uvědomit, že výraz vpravo je v bodě x_0 roven vektoru $\boldsymbol{y}^0$. $\square$

15.8 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Zařazení této části má poměrně zřejmý charakter. V předchozí části jsme poznali, že jsme schopni nalézt metodou variace konstant obecné řešení soustavy lineárních rovnic, pokud známe její *fundamentální!systém řešení*. Ten však obecně nalézt neumíme. Ukážeme si však, jak je to možné v případě, že jde o soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

V této části musíme využít poměrně hlubokých poznatků z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si tuto partii přečetl např. v [2], kde je vyložena právě jako aplikace příslušných poznatků z lineární algebry.

Nejprve se seznámíme s tzv. *eliminační metodou*. Budeme řešit systém rovnic

$$\begin{aligned} (y^1)'(x) &= a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n + b^1(x)\,, \\ (y^2)'(x) &= a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{2n}y^n + b^2(x)\,, \\ &\vdots \\ (y^n)'(x) &= a_{n1}y^1 + a_{n2}y^2 + \cdots + a_{nn}y^n + b^n(x)\,, \end{aligned} \tag{15.44}$$

ve kterém jsou koeficienty a_{jk} konstantní a b^i jsou spojité (reálné) funkce na intervalu (c, d). V maticovém tvaru zapisujeme systémy, se kterými budeme pracovat, takto:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}\,, \tag{15.45}$$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,. \tag{15.46}$$

Poslední systém se často nazývá *autonomní systém lineárních diferenciálních rovnic* a užívá se k popisu fyzikálních nebo technických problémů, jejichž prvky nejsou závislé na čase.

Popišme nejprve některé možné přístupy k řešení systému (15.44). Jsou-li funkce $b^i \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$, zvolme jednu z rovnic, např. první a zderivujme výrazy na obou jejích stranách. Obdržíme rovnici

$$(y^1)''(x) = a_{11}(y^1)' + a_{12}(y^2)' + \cdots + a_{1n}(y^n)' + (b^1)'(x)\,,$$

do které dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \ldots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)''(x) = d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}y^n + \delta^2(x)\,.$$

V dalším kroku zderivováním dostaneme

$$(y^1)'''(x) = d_{21}(y^1)' + d_{22}(y^2)' + \cdots + d_{2n}(y^n)' + (\delta^2)'(x)\,,$$

do které opět dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \ldots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Obdrženou rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)'''(x) = d_{31}y^1 + d_{32}y^2 + \cdots + d_{3n}y^n + \delta^3(x)\,.$$

Po konečně mnoha krocích dostaneme rovnici

$$(y^1)^{(n)}(x) = d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,.$$

Získali jsme tak soustavu rovnic pro $(y^1)', (y^1)'', \ldots, (y^1)^{(n)}$, která je tvaru (v první rovnici $(y^1)'(x) = a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n + b^1(x)$ jen formálně změníme označení koeficientů)

$$\begin{aligned} (y^1)'(x) &= d_{11}y^1 + d_{12}y^2 + \cdots + d_{1n}\,y^n + \delta^1(x)\,,\\ (y^1)''(x) &= d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}\,y^n + \delta^2(x)\,,\\ &\;\vdots \\ (y^1)^{(n)}(x) &= d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,. \end{aligned} \tag{15.47}$$

Z těchto rovnic postupně vyloučíme $y^2, \ldots, y^n$, a to tak, že např. z první rovnice vypočteme y^2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Dostaneme tak $(n-1)$ rovnic, které již neobsahují y^2. Tak postupně snižujeme počet rovnic i neznámých, až dospějeme k jediné rovnici n-tého řádu pro y^1. Vypočteme její obecné řešení (bude obsahovat n konstant $c^1, \ldots, c^n$). Pak dosadíme do systému (15.47) za $(y^1)', (y^1)'', \ldots, (y^1)^{(n)}$ a dopočteme $y^1, y^2, \ldots, y^n$ z *algebraického systému* n rovnic o n neznámých.

Z popisu metody vidíme, že je sice pracná, ale elementární. Takto hladce však nevede vždy k cíli. Může se stát, že nedojdeme až k systému (15.47), ale po menším počtu kroků se na pravé straně všechny neznámé $y^2, \ldots, y^n$ zruší. Dostaneme tak pro y^1 lineární rovnici s konstantními koeficienty nižšího řádu nežli n. Její obecné řešení bude záviset na méně nežli n konstantách. Pak lze dosadit y^1 do (15.44) a ze vzniklého systému vytvořit novou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty pro y^2 analogickým postupem, který jsme užili pro y^1. Tato situace může nastat několikrát za sebou. Tak se řešení systému n rovnic může převést na řešení několika lineárních rovnic s konstantními koeficienty řádů nižších než n (součet jejich řádů je n); viz např. [7].

V dalších odstavcích si připomeneme několik pojmů z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si příslušnou látku eventuálně prostudoval v [2]. Tento text obsahuje totiž i kapitolu, v níž čtenář nalezne aplikaci teorie na řešení systémů diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty tvaru (15.40).

Definice 15.8.1. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná čísla, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazýváme polynom (symbolem $\boldsymbol{E}$ značíme jednotkovou matici typu $n \times n$)

$$P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

charakteristickým polynomem matice $\boldsymbol{A}$ [2]). Jeho kořeny se nazývají *vlastní čísla* nebo *vlastní hodnoty* matice $\boldsymbol{A}$, rovnice $P(\lambda) = 0$ je *charakteristická rovnice příslušná k* $\boldsymbol{A}$. Množinu všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme *spektrum* matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\sigma(\boldsymbol{A})$.

Příklad 15.8.2. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15.48}$$

má charakteristický polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + \\ + (1-\lambda) - 3(1+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \end{aligned}$$

a její spektrum je tedy $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 3, -2\}$.

Definice 15.8.3. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, nazýváme každý *nenulový* vektor $\boldsymbol{v}$ vyhovující rovnici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ *vlastním vektorem matice* $\boldsymbol{A}$ *příslušným k vlastnímu číslu* λ.

Poznámka 15.8.4. Vlastní vektory hrají důležitou roli v mnoha aplikacích. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}c\boldsymbol{v} = \lambda c\boldsymbol{v}$, takže $\boldsymbol{A}$ transformuje podprostor generovaný $\boldsymbol{v}$ na tentýž podprostor, který je proto invariantní. V předcházející definici vlastního vektoru jsme se omezili na nenulové vektory. Pro nulový vektor $\boldsymbol{v}$ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ pro *každé* $\lambda \in \mathbb{C}$, což je nezajímavý případ. Na druhé straně připouštíme, že jak vlastní čísla, tak i vlastní vektory mohou být komplexní. Budeme pracovat i s komplexními funkcemi v roli řešení, i když je naším cílem vyjádřit obecné řešení pomocí reálných funkcí.

Příklad 15.8.5. Nyní navážeme na Příklad 15.8.2. Potom je vlastní vektor [3]) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$, matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$, netriviálním řešením soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, neboli soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

[2]) Pokud se zavádí charakteristický polynom pomocí matice $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$, dostaneme stejné výsledky; odpovídající teorie se liší jen nepodstatně.

[3]) Při výpočtu by se nám dvojí indexy mohly plést, užíváme proto zjednodušené označení a pamatujeme si, že počítáme vektor $\boldsymbol{v}_1$ příslušný k vlastnímu číslu λ_1. Tak postupujeme i při výpočtu dalších vlastních vektorů.

Jejím řešením obdržíme $\boldsymbol{v}_1 = (v^1, v^2, v^3) = c(-1, 4, 1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, což je popis *všech* vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

Podobně dospějeme k vyjádření všech vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$, které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = d(1, 2, 1)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, a všech vlastních vektorů, které odpovídají poslednímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ a které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = e(-1, 1, 1)$, $e \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$.

Je vhodné si nyní ukázat, k čemu nám vlastní čísla a vlastní vektory budou. Poznamenejme, že u lineární rovnice n-tého řádu jsme hledali řešení ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ a tímto obratem jsme převedli problém na řešení algebraické rovnice stupně n. Nyní budeme hledat řešení ve tvaru (je to vektorová funkce!) $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor s konstantními složkami. Dosazením do vyšetřovaného systému dostaneme

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}\,,$$

což nás přivádí ke hledání čísel λ a (netriviálních) vektorů $\boldsymbol{v}$, pro které platí $\lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, a tedy i $\big(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. V případě, že se nám podaří takto najít n lineárně nezávislých řešení, je tím problém nalezení obecného řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ vyřešen.

Lemma 15.8.6. *Nechť* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$*,* $1 \leq k \leq n$*, jsou* nezávislé *vlastní vektory, příslušné (ne nutně různým) vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$*. Potom*

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\,, \ldots,\ \boldsymbol{y}_k(x) = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k$$

jsou lineárně nezávislá řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$*.*

Důkaz. Ověřme ještě jednou, že takto dostáváme řešení systému: je

$$\boldsymbol{y}_k'(x) = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k\,.$$

Položme $\sum_{j=1}^{k} c_j\,\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$. Dosazením $x = 0$ do lineární kombinace řešení $\boldsymbol{y}_j$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\,\boldsymbol{y}_j(x)\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\,\mathrm{e}^{\lambda_j x}\boldsymbol{v}_j\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\,\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}\,.$$

S ohledem na nezávislost $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ dostáváme $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ a tedy i nezávislost řešení $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$. □

Příklad 15.8.7. Pro rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \tag{15.49}$$

má rovnice $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ kořeny $\lambda_{1,2} = -1$ a $\lambda_3 = 2$. Dvojnásobnému kořeni odpovídá soustava rovnic ekvivalentní s jedinou rovnicí pro složky vlastního vektoru

$$v^1 + v^2 + v^3 = 0\,,$$

takže lze volit *dva* lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu -1, např. $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0)$ a $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -1)$. Snadno zjistíme, že k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2$ lze zvolit vlastní vektor $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$ a nalézt tak obecné řešení rovnice (15.49) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1 \,\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \,\mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \,\mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Naproti tomu již u jednoduché rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,,$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$, existuje pouze *jediný* lineárně nezávislý vektor odpovídající tomuto kořeni a který má tvar $\boldsymbol{v} = (c, -c)$, $c \neq 0$. To signalizuje možné obtíže při výskytu vícenásobných vlastních čísel.

Povšimneme si, že problém nenastává v případě, kdy vlastní čísla λ_k, $k = 1, \ldots, n$, jsou navzájem různá. Platí totiž následující

Tvrzení 15.8.8. *Vlastní vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \leq k \leq n$, příslušné k* různým *vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ matice $\boldsymbol{A}$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí. Pro $k = 1$ je platnost tvrzení zřejmá z definice vlastního vektoru. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro $(k-1)$ a odvoďme jeho platnost pro k. Jestliže pro $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ je

$$c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\,\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,, \tag{15.50}$$

pak také platí

$$\boldsymbol{A}(\,c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\,\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}\,;$$

Protože jsou $\boldsymbol{v}_j$ vlastní vektory příslušné k vlastním číslům λ_j, $j = 1, \ldots, k$, plyne odtud

$$c_1\,\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\lambda_2\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\,\lambda_k\,\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,. \tag{15.51}$$

Vynásobíme rovnici (15.50) číslem λ_k a vzniklou rovnost odečteme od (15.51). Dostaneme tak vztah

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\,\boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}\,.$$

Podle indukčního předpokladu jsou vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ lineárně nezávislé; protože jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ navzájem vesměs různá, plyne z předcházející rovnosti $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Odtud dostáváme i $c_k = 0$ a tvrzení je dokázáno. $\square$

Příklad 15.8.9. Navážeme na předcházející Příklad 15.8.5, ve kterém jsme nalezli tvar vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům. Zvolme $c = d = e = 1$; pak vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 4, 1)$ přísluší k $\lambda_1 = 1$, vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ a $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$.

Máme-li tedy řešit soustavu, zapsanou v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{15.52}$$

ve kterém matici na pravé straně rovnice jsme vyšetřovali v Příkladech 15.8.5 a 15.8.2, lze její obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{15.53}$$

K řešení počáteční úlohy není třeba další výklad, uvedeme proto jen jednoduchý ilustrativní příklad:

Příklad 15.8.10. Řešte rovnici s danou počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{15.54}$$

Snadno zjistíme, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1)$. Dospějeme tak k rovnici

$$c_1\,\mathrm{e}^{-1\cdot 0} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{3\cdot 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jejímž řešením vzhledem k neznámým c_1, c_2 obdržíme hledané řešení počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Situace je však poněkud složitější, jestliže má charakteristický polynom P obecně komplexní kořeny. Hledáme totiž řešení vyjádřené pomocí reálných funkcí. Jsou-li prvky matice $\boldsymbol{A}$ reálná čísla, má i P reálné koeficienty. Postupujeme pak analogicky jako v Poznámce 15.6.1. Kořeny P, které nejsou reálné, se vyskytují v párech a jsou komplexně sdružené. Nechť tedy jsou $\lambda = \beta + \mathrm{i}\gamma$ a $\overline{\lambda} = \beta - \mathrm{i}\gamma$ vlastní čísla matice s reálnými koeficienty $\boldsymbol{A}$. Protože pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, dostáváme rovnosti [4])

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,,$$

[4]) Proužek zde značí u vektorů přechod ke komplexně sdruženým číslům „po složkách“.

takže $\overline{\boldsymbol{v}}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Tyto vektory jsou podle Tvrzení 15.8.8 lineárně nezávislé. Označíme-li $\operatorname{Re}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ nezávislá řešení

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\\ \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\end{aligned}$$

a tedy i nezávislá *reálná řešení* $(1/2)(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$, $(1/2\mathrm{i})(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$, tj.

$$\mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\cos\gamma x - \boldsymbol{v}_2\sin\gamma x)\,,\quad \mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\sin\gamma x + \boldsymbol{v}_2\cos\gamma x)\,.$$

Tak můžeme nalézt ke každému páru komplexně sdružených (různých) vlastních čísel dvojici lineárně nezávislých reálných řešení; při výpočtu pak již stačí k jednomu z komplexně sdružených různých vlastních čísel najít vlastní vektor a ze získaného komplexního řešení vzít jeho reálnou a imaginární část.

Příklad 15.8.11. Určete obecné řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,, \tag{15.55}$$

Snadno určíme charakteristickou rovnici $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$ a jejím řešením kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. Pro λ_1 snadno spočteme, že lze za příslušný vlastní vektor volit např. $\boldsymbol{v}_1 = (2,-2,3)$. Pro $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 0 & 0\\ 3 & -2\mathrm{i} & -2\\ 2 & 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix} = 0\,,$$

takže za vektor, příslušný k λ_2 lze volit $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,-\mathrm{i})$. Jemu odpovídá komplexní řešení

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)\big((0,1,0) + \mathrm{i}(0,0,-1)\big)$$

a přechodem k jeho reálné a imaginární části dostaneme dvojici reálných řešení

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix}\,,\qquad \boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\ \sin 2x\\ -\cos 2x\end{pmatrix}\,.$$

Nyní již snadno napíšeme obecné řešení rovnice (15.55):

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{x}\left[c_1\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\ \cos 2x\\ \sin 2x\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\ \sin 2x\\ -\cos 2x\end{pmatrix}\right]\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,, \tag{15.56}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou reálné konstanty (konstantní funkce).

Má-li matice $\boldsymbol{A}$ násobná vlastní čísla, je situace často ještě složitější: K jednomu takovému vlastnímu číslu se nám nemusí podařit popsaným postupem najít dostatečný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů; viz Příklad 15.8.7. Následující postup je motivován řešením jednoduché rovnice $y' = ay$, kde $a \in \mathbb{R}$. Jejím řešením je každá funkce $y(x) = \mathrm{e}^{ax}c$ s $c \in \mathbb{R}$. Vedeni analogií můžeme se pokusit hledat řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ve tvaru $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je libovolný prvek $\mathbb{R}^n$. K tomu však potřebujeme další pojmy.

Definice 15.8.12. Je-li $\boldsymbol{B}$ libovolná matice typu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\,\boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\,\boldsymbol{B}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}\,. \tag{15.57}$$

Předchozí definice vyžaduje komentář: nekonečný součet matic chápeme „po prvcích“, jde tedy o matici, jejímiž prvky jsou součty řad. Tyto řady konvergují, protože pro

$$\boldsymbol{B} = \big(\, b_{jk} \,\big)_{j,\,k=1,\ldots,n}$$

a takové $M \in (0, \infty)$, že $|b_{jk}| \le M$ pro $j, k = 1, \ldots, n$, jsou absolutní hodnoty prvků matice $\boldsymbol{B}^k$ odhadnuty pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ shora číslem $n^{k-1}M^k$. Odtud plyne konvergence řady, která je prvkem matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ srovnávacím kritériem; řada, se kterou srovnáváme, má tvar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}M^k}{k\,!}\,,$$

a její konvergenci snadno ověříme např. podílovým kriteriem. Podle definice dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\boldsymbol{A}^k\,. \tag{15.58}$$

Povšimněme si, že pracujeme s maticí, jejíž prvky jsou funkce, které jsou součty mocninných řad. Odtud plyne legitimnost následujících úprav.

Derivováním (matice) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ podle proměnné x dostaneme z (15.58)

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)' &= \boldsymbol{A} + 2\frac{x}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + 3\frac{x^2}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + 4\frac{x^3}{4!}\,\boldsymbol{A}^4 + \cdots = \\ &= \boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \frac{x^3}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + \cdots\Big) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\,.\end{aligned} \tag{15.59}$$

Odtud vidíme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$ řešením systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$. Pro praktické využití tohoto poznatku je však nutné umět nějakým jednoduchým způsobem určit matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Obecně je těžké matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v konkretním případě určit, nicméně ve speciálních případech to možné je. Pro náš problém je důležité to, že vždy lze určit n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{v}$ tak, že řada (15.58) lze ve vyjádření $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ sečíst. Dále ukážeme, jak můžeme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ exaktně určit, pokud známe n lineárně nezávislých řešení rovnice (15.46).

Pro matice, jejichž násobení je komutativní, tj. pro něž je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ [5]), snadno obdržíme (využíváme stejnoměrné konvergence mocninných řad pro záměnu pořadí sčítání)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m}}{m!\,(k-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^m}{m!} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,,$$

takže pro ně dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,;$$

odtud vyplývá, že je $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{E}$, a také rovnost

$$\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x}\,.$$

Tak např. vzorec (15.43) z Věty 15.7.7 pro konstantní matici $\boldsymbol{A}$ nabude přehlednějšího tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-x_0)} \boldsymbol{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-t)} \boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{15.60}$$

Vzhledem k tomu, že již víme, že $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Ay}$, lze určit $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jako fundamentální matici $\boldsymbol{Y}(x)$ ze sloupcových vektorů řešení $\boldsymbol{y}_k(x)$, odpovídajících počátečním podmínkám (15.41). Z věty o jednoznačnosti vyplývá, že tak (poněkud pracně) dostaneme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K tomu se ještě vrátíme. Protože

$$e^{\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})x}\,\mathrm{e}^{\lambda \boldsymbol{E}x} \boldsymbol{v}$$

a úpravou vyjádření $\mathrm{e}^{\lambda \boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$ snadno obdržíme

$$\mathrm{e}^{\lambda \boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v} = \Big(\boldsymbol{E} + \frac{\lambda x}{1!}\,\boldsymbol{E} + \frac{\lambda^2 x^2}{2!}\,\boldsymbol{E} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}\Big(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}\,,$$

vyplývá odtud $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\boldsymbol{v}$, z čehož s přihlédnutím k Definici 15.8.12 obdržíme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2 + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v}\,. \tag{15.61}$$

Povšimneme si, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ je pak i pro všechna $l \in \mathbb{N}_0$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m+l}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^l\big[\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}\,\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

[5]) Připomínáme, že násobení matic obecně *není* komutativní.

Odtud však plyne, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ je součet ve vyjádření (15.61) *konečný*, tj. že v rozvoji

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m-1}\Big)\,\boldsymbol{v} \qquad (15.62)$$

jsou členy, odpovídající mocninám $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^k$ s $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, rovny $\boldsymbol{0}$.

Není-li možné najít n nezávislých vlastních vektorů, je situace složitější. To nastává v případě, že násobnost některého vlastního čísla λ je větší, nežli je dimenze prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Pak můžeme pracovat s tzv. *zobecněnými vlastními vektory*, kterými doplníme již nalezené nezávislé vlastní vektory na bázi (vlastní vektory považujeme zároveň i za zobecněné vlastní vektory).

Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti k, ke kterému je třeba doplnit další zobecněné vlastní vektory, budeme postupovat takto: nalezneme nejprve vlastní vektory $\boldsymbol{v}$, které jsou lineárně nezávislými řešeními rovnice

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

Není-li těchto vektorů již k, budeme hledat všechny lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{v}$, pro které platí $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Potom pro každý takový vektor je

$$e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)$$

dalším řešením rovnice (15.46). Analogicky pokračujeme dále. Z toho vyplývá tento algoritmus:

1. Nalezneme všechny vlastní čísla a vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže má $\boldsymbol{A}$ celkem n lineárně nezávislých vlastních vektorů, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ odpovídajících n lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Všimněte si, že pak nekonečná řada pro $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v}$ s vlastním číslem λ a vlastním vektorem $\boldsymbol{v}$ obsahuje jediný nenulový člen.

2. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má celkem r, $r < n$, lineárně nezávislých vlastních vektorů. Odtud dostaneme pouze r lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Vyberme vlastní číslo λ, pro které je počet příslušných vlastních vektorů menší než jeho násobnost a najdeme všechny lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že je $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Z nich dostaneme další řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ tvaru

   $$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)\,.$$

   To postupně uděláme se všemi odpovídajícími vlastními čísly $\boldsymbol{A}$.

3. Nedostaneme-li tak již všech n potřebných řešení, hledáme dále pro příslušná λ všechny další lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové,

že sice je $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, avšak $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. Pro každý takový vektor je

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v}+\frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}+\frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\Big)$$

dalším řešením rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

4. Analogicky postupujeme dále, dokud takto nezískáme očekávaných n lineárně nezávislých řešení $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Následující „algebraické“ tvrzení, které nebudeme dokazovat, ukazuje, že právě popsaný algoritmus vede k nalezení n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice. Zároveň nám poskytuje i horní odhad počtu kroků, které tímto algoritmem musíme udělat, abychom dostali potřebných n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice.

Lemma 15.8.13. *Nechť charakteristický polynom P pro rovnici $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ má r navzájem různých kořenů $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ s násobnostmi $k_1,k_2,\dots,k_r$, takže*

$$P(\lambda)=c(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}\,,$$

kde $c\neq 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má pro nějaké $j\in\{1,2,\dots,r\}$ pouze $\ell_j<k_j$ lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j. Potom má rovnice
$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ alespoň ℓ_j+1 nezávislých řešení.

Obecněji, má-li rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ celkem $m_j<k_j$ nezávislých řešení, pak má rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{m+1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ alespoň m_j+1 nezávislých řešení.

Z Lemmatu 15.8.13 plyne existence takového d_j, $d_j\le k_j$, pro něž má rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{d_j}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ alespoň k_j lineárně nezávislých řešení (zobecněných vlastních vektorů). Tak lze ke každému vlastnímu číslu λ_j, $j=1,2,\dots,r$ nalézt k_j lineárně nezávislých řešení rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Všechna tato řešení mají tvar

$$\boldsymbol{y}(x)=\mathrm{e}^{\lambda_j x}\Big(\boldsymbol{v}+\frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}+\cdots+\frac{x^{d_j-1}}{(d_j-1)!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{d_j-1}\boldsymbol{v}\Big)\,.$$

Tímto způsobem lze ke k-násobnému vlastnímu číslu λ nalézt k lineárně nezávislých řešení. Dále lze ukázat, že všechna takto získaná $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$ řešení rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ jsou lineárně nezávislá.

Za zmínku stojí, že v případě *hermitovské* matice, tj. matice, pro kterou transponovaná matice k $\overline{\boldsymbol{A}}$ je rovna $\boldsymbol{A}$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ reálná. Speciálně to platí pro reálné symetrické matice. Navíc násobnost každého vlastního čísla λ *je rovna* dimenzi prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, takže taková matice je jednoduchá.

Příklady 15.8.14. (1) Všimneme si jevu, který nám při řešení systémů působí obtíže. Jestliže řešíme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ s maticí

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

má charakteristická rovnice této matice jediný trojnásobný nulový bod $\lambda = -1$. Soustava $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má matici s hodností 1, a tedy dimenze prostoru řešení je 2 a je ostře menší než násobnost vlastního čísla $\lambda = -1$. Vlastní vektory $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyhovují jediné rovnici $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$; snadno nalezneme dva nezávislé vlastní vektory $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, 1)$. Čtenář může porovnat efektivitu jednotlivých postupů nalezení fundamentální matice.

(2) Na následujícím jednodušším příkladu ukážeme použití metody zobecněných vlastních vektorů a najdeme obecné řešení systému

$$\begin{aligned} (y^1)' &= 17y^1 + 9y^2\,, \\ (y^2)' &= -25y^1 - 13y^2\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Pro vlastní vektory dostaneme rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. systém

$$\begin{aligned} 15v^1 + 9v^2 &= 0\,, \\ -25v^1 - 15v^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Stačí tedy nalézt řešení jedné z rovnic (jsou lineárně závislé): dostaneme tak obecné řešení $\boldsymbol{v} = (v^1,\, v^2) = (-3c/5,\, c)$ a dosazením $c = 5$ dostaneme vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (-3, 5)$. Nyní nalezneme zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{z} = (z^1, z^2)$ řešením soustavy

$$\begin{aligned} 15z^1 + 9z^2 &= -3\,, \\ -25z^1 - 15z^2 &= 5\,. \end{aligned}$$

a dostaneme $(z^1, z^2) = (-(1 + 3d)/5, d)$, takže pro $d = 3$ dostaneme $\boldsymbol{z} = (-2, 3)$. Fundamentální systém obsahuje řešení

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{2x}(x\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z}) = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -3x - 2 \\ 5x + 3 \end{pmatrix},$$

takže obecné řešení $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2)$ rozepsané po složkách má tvar

$$\begin{aligned} y^1 &= -3\,c_1\mathrm{e}^{2x} - (3x + 2)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,, \\ y^2 &= 5\,c_1\mathrm{e}^{2x} + (5x + 3)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$

Příklad 15.8.15. (viz [3], str. 325) Řešte počáteční problém

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15.63}$$

Charakteristický polynom matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je $P(\lambda) = (2-\lambda)^3$, takže jediným vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti 3 je $\lambda_1 = 2$. Každý vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k $\lambda_1 = 2$ vyhovuje rovnici

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,.$$

Odtud vyplývá, že $v^2 = v^3 = 0$ a za v^1 lze volit libovolné nenulové číslo. Proto

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je jedním netriviálním řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Matice $\boldsymbol{A}$ tak má jediný lineárně nezávislý vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2$. Hledejme proto řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $v^3 = 0$, přičemž v^1 a v^2 lze volit libovolně. Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyhovuje rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = 0$ a přitom $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq 0$. Proto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \left[\boldsymbol{E} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tak jsme získali druhé řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, avšak rovnice $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = 0$ má pouze dvě lineárně nezávislá řešení; budeme tedy postupovat podle výše uvedeného algoritmu dále. Budeme hledat všechna řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je řešením nalezené rovnice. Jestliže zvolíme např. $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1)$, je $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Proto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{2x} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \left(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

je třetí lineárně nezávislé řešení. Obecné řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Užitím počáteční podmínky určíme hodnoty c_1, c_2, c_3 dosazením do předcházející rovnice a obdržíme tak rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

jejím řešením dostaneme $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 1$. Řešení počáteční úlohy je tedy tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 + 5x - \frac{1}{2}x^2 \\ 2 - x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je-li fundamentální matice pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ klíčem k řešení rovnice, dá se očekávat, že znalost řešení, případně fundamentální matice, kterou jsme zavedli v Definici 15.7.4, nám může pomoci k určení matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K důkazu tvrzení o jejich souvislosti budeme potřebovat několik jednoduchých lemmat:

Lemma 15.8.16. *Matice $\boldsymbol{Y}$ je fundamentální maticí soustavy $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, právě když je*

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) \quad a \quad \det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$ jsou sloupcové vektory matice $\boldsymbol{Y}$. Zřejmě je

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \big(\boldsymbol{y}_1'(x), \boldsymbol{y}_2'(x), \dots, \boldsymbol{y}_n'(x)\big), \quad x \in \mathbb{R},$$

a také

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2(x), \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_n(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15.64}$$

Vidíme, že splnění n rovnic $\boldsymbol{y}_k'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2, \dots, n$, je ekvivalentní se splněním jediné „maticové“ rovnice $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x)$. První část podmínky tedy zajišťuje, že sloupce matice $\boldsymbol{Y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, jsou tvořeny řešeními rovnice. Druhá část zajišťuje jejich nezávislost: podle Důsledku 15.7.5 je podmínka $\det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0$ ekvivalentní s podmínkou $\det\big(\boldsymbol{Y}(x)\big) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy i s nezávislostí sloupců matice $\boldsymbol{Y}$. □

Lemma 15.8.17. *Maticová funkce* $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ *je fundamentální maticí soustavy popsané rovnicí* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Důkaz. Tvrzení popisuje obsah rovnosti (15.59), kterou jsme již dokázali. □

Lemma 15.8.18. *Nechť* $\boldsymbol{Y}$ *a* $\boldsymbol{Y}^*$ *jsou fundamentální matice soustavy popsané rovnicí* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. *Potom existuje konstantní matice* $\boldsymbol{C}$, *pro kterou je*

$$\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Sloupce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$ matice $\boldsymbol{Y}$ jsou nezávislá řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Proto každé z řešení $\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots, \boldsymbol{y}_n^*$ je lineární kombinací

$$\boldsymbol{y}_j^* = c_{j1}\boldsymbol{y}_1 + c_{j2}\boldsymbol{y}_2 + \dots + c_{jn}\boldsymbol{y}_n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{15.65}$$

Nechť $\boldsymbol{C}$ je matice $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_n)$, kde

$$\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix};$$

pak n rovnic (15.65) je ekvivalentních maticové rovnici $\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}$, $x \in \mathbb{R}$, čímž je lemma dokázáno. □

Věta 15.8.19. *Nechť* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(x)$ *je fundamentální matice systému popsaného rovnicí* $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. *Potom*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(0), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15.66}$$

tj. součin libovolné fundamentální matice $\boldsymbol{Y}$ *rovnice* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ *s maticí k ní inverzní vyčíslenou v bodě* 0 *dává vždy matici* $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{Y}$ fundamentální matici rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje podle Lemmat 15.8.17 a 15.8.18 konstantní matice $\boldsymbol{C}$ tak, že je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{C}\,.$$

Dosaďme do této rovnosti $x = 0$. Z $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y}(0)\,\boldsymbol{C}$ vyplývá, že $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Y}^{-1}(0)$, což již dává dokazovanou rovnost. ☐

Další metody pro výpočet matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ nalezne čtenář např. v knize [8]. Ukážeme si aplikaci dokázaného tvrzení.

Příklad 15.8.20. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme charakteristickou rovnici soustavy:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0\,.$$

Řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

kterou snadno upravíme na ekvivalentní systém dvou nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} -\,2\,v^1 + \ v^2 - v^3 &= 0 \\ 3\,v^2 + v^3 &= 0 \end{aligned}$$

určíme jeden (nezávislý) vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1,\, v^2,\, v^3)$ příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = 3$: $\boldsymbol{v} = (2,\, 1\,, -3)$. Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 2$ dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

ze které získáme ekvivalentní systém rovnic

$$\begin{aligned} -\,v^1 + \ v^2 - v^3 &= 0 \\ -\,v^1 \qquad - v^3 &= 0 \end{aligned}$$

s jediným dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1,\, 0\,, -1)$. Musíme tedy sáhnout k hledání zobecněného vlastního řešení: budeme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

S touto rovnicí ekvivalentní soustava se redukuje na jedinou lineární rovnici

$$v^1 \qquad + v^3 = 0$$

s dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1\,,1\,,-1)$. Přejdeme od nezávislých zobecněných vlastních vektorů k lineárně nezávislým řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\,, \ \boldsymbol{y}_2 = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & x & -x \\ -x & 1 & -x \\ 2x & -x & 1+2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ -1-x \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Fundamentální matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & (1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^{2x} \\ -3\,\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{2x} & -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\,.$$

Vypočteme její hodnotu v bodě 0 a k takto vzniklé matici spočteme matici inverzní:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosadíme do vzorce (15.66), čímž dostaneme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v „uzavřeném tvaru“, tedy nikoli ve formě nekonečné řady:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\,.$$

Toho můžeme využít k dořešení úlohy (srovnejte s prvním členem ve vzorci (15.60)): hledané řešení $\boldsymbol{y}$ vyhovující dané počáteční podmínce je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \\ -x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\,.$$

K tomuto příkladu se ještě jednou vrátíme; pro srovnání ho spočteme jinou metodou.

Poznámka 15.8.21. Protože jsme převáděli řešení lineární rovnice n-tého řádu na řešení speciálního systému 1. řádu, lze tušit, že mezi oběma problémy je úzká souvislost. To lze využít i při výpočtu fundamentální matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Výsledek uvedeme pro informaci bez důkazu:

Věta 15.8.22. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $n \times n$ a nechť*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

je její charakteristická rovnice. Nechť y je řešení diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0, \;\; y^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Potom platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = z_1(x)\boldsymbol{E} + z_2(x)\boldsymbol{A} + \cdots + z_n(x)\boldsymbol{A}^{n-1}\,,$$

kde $z_k = z_k(x)$ obdržíme z řešení $y = y(x)$ transformací

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy umět řešit jen rovnice n-tého řádu a znát tuto větu. U systému rovnic je situace v případě násobných kořenů charakteristické rovnice často komplikovanější než u jediné rovnice vyššího řádu, kde je výsledek relativně jednoduchý.

Pro řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ lze užít také *Jordanova kanonického tvaru* matice $\boldsymbol{A}$. To je *výhodné* vzhledem ke znalostem získaným eventuálně již dříve v rámci studia algebry. Jak bylo již zmíněno, tato partie je s množstvím příkladů zpracována v [2], omezíme se proto jen na základní popis metody, která je tam detailně popsána. Poznamenejme, že trochu odlišný tvar Jordanových buněk (s jedničkami „pod diagonálou") není podstatný. Připomeňme, že dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{C}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\,.$$

Mezi všemi maticemi podobnými matici $\boldsymbol{A}$ hraje významnou roli její Jordanův kanonický tvar. Připomeňme, že čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jordanova buňka*. Diagonální bloková matice, bloky na jejíž diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá *Jordanova matice*. Je známo, že každá matice s reálnými prvky je podobná jisté Jordanově matici, avšak nad tělesem komplexních čísel. Tato Jordanova matice je určena až na pořadí Jordanových buněk na diagonále jednoznačně. Zkráceně říkáme, že každá taková matice má Jordanův kanonický tvar. Metoda nalezení Jordanova kanonického tvaru matice $\boldsymbol{A}$ a příslušné transformační matice $\boldsymbol{C}$ je součástí látky probírané v základním kursu lineární algebry.

Řešíme-li rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, nalezneme Jordanův kanonický tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ spolu s maticí $\boldsymbol{C}$, pro kterou $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, resp. $\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Položíme-li $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je pak rovnost $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ekvivalentní s rovností

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}\,,$$

a tedy s rovností $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$. Rovnice se tak rozpadne na menší systémy, které odpovídají jednotlivým Jordanovým buňkám. Tyto soustavy již snadno řešíme. Tak např. Jordanově buňce

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

odpovídá systém rovnic

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + z_2\,, \\ z_2' &= \qquad \lambda z_2 + z_3\,, \\ z_3' &= \qquad\qquad \lambda z_3 + z_4\,, \\ z_4' &= \qquad\qquad\qquad \lambda z_4\,, \end{aligned}$$

jehož řešení je, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem, tvaru (řešíme zde „odzadu“)

$$\begin{aligned} z_4 &= a\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_3 &= (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_2 &= \Big(\frac{ax^2}{2} + bx + c\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_1 &= \Big(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Pro obecnou Jordanovu buňku si čtenář snadno řešení představí. Tak postupně nalezneme řešení, odpovídající všem Jordanovým buňkám a sestrojíme tak řešení $\boldsymbol{z}$. Tím ovšem řešení systému nekončí, musíme ještě provést „zpětnou transformaci“ a přejít tak od řešení systému $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$ k řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Protože $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$.

Příklad 15.8.23. Vrátíme se nyní k úloze, kterou jsme řešili v Příkladu 15.8.20 a spočteme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jinak, pomocí převodu na Jordanův tvar. Připomeňme, že matice $\boldsymbol{A}$

byla dána ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a že jsme určili její vlastní čísla $\lambda = 3$ s násobností 1 a $\lambda = 2$ s násobností 2; vlastnímu číslu 2 odpovídá jediný nezávislý vlastní vektor. Jordanův tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ pak je (pořadí buněk na diagonále si můžeme zvolit, avšak to ovlivní transformační matici $\boldsymbol{C}$, kterou musíme určit [6])

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tento tvar jsme určili snadno též díky rozměru matice (viz [3]), potřebujeme však ještě transformační matici $\boldsymbol{C}$ a také i $\boldsymbol{C}^{-1}$. Z rovnice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

určíme úpravami známými z algebry

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

plyne odtud

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Čtenář si může jen stěží udělat obrázek o pracnosti jednotlivých uvedených postupů z několika málo příkladů, které jsme uvedli. Volba těchto postupů je vždy podmíněna tím, co řešitel úlohy lépe ovládá. Řadu řešených příkladů lze nalézt např. v [14].

Vyřešili jsme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ pro speciální případ $\boldsymbol{b}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ a máme k dispozici metodu variace konstant, pomocí níž můžeme řešit systém i v případě obecné vektorové funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Avšak tento postup může být velmi pracný; v případě lineární rovnice n-tého řádu jsme pro speciální tvar

[6]) Pokud známe vlastní čísla matice, nelze z nich u rozměrnějších matic určit tvar matice $\boldsymbol{J}$. Proto je dobré transformační matici určovat souběžně s převodem na Jordanův tvar.

„pravé strany“ rovnice $\boldsymbol{b}(x)$ použili často méně pracnou metodu porovnávání koeficientů, která navíc „obcházela“ integraci. I zde je takový postup možný a je analogický, i když nepatrně složitější. Platí toto tvrzení: *Jestliže jsou složky vektoru $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x)$ polynomy stupně nejvýše r-tého a jestliže 0 je k-násobným kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, pak existuje partikulární řešení systému*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{15.67}$$

jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého. Poznamenejme, že $k = 0$, právě když determinant $\det(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ není roven 0. Proti případu jedné lineární rovnice n-tého řádu se mohou ve složkách řešení vyskytovat s nenulovými koeficienty i mocniny stupně *menšího než k*. Rovněž není bez zajímavosti, že tvrzení platí i pro „komplexní případ“.

Nebudeme uvádět speciální tvar partikulárního řešení pro případ, že složky vektoru $\boldsymbol{b}$ obsahují polynomiální násobky goniometrických funkcí a zformulujeme výsledek jen pro „komplexní případ“: *Nechť v rovnici* (15.67) *je vektor $\boldsymbol{b}$ tvaru $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{Q}_r(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, kde složky vektoru $\boldsymbol{Q}_r$ jsou (obecně komplexní) polynomy stupně nejvýše r-tého. Potom existuje řešení $\boldsymbol{y}$ systému* (15.67) *tvaru*

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{R}_{r+k}(x)\,,$$

kde $\boldsymbol{R}_{r+k}$ je matice, jejímiž prvky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého a kde k je násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu matice $\boldsymbol{A}$. Poznamenejme konečně na závěr této části, že i v tomto případě můžeme využít princip superpozice k rozkladu $\boldsymbol{b}$ na takové vektory, na které lze aplikovat předcházející tvrzení na každý zvlášť.

15.9 Autonomní systémy

V tomto odstavci se budeme krátce zabývat stabilitou řešení, avšak pouze pro tzv. autonomní systémy. Jsou to systémy tvaru (15.17), v nichž pravá strana nezávisí na proměnné x. I v případě, že je neumíme řešit, existují možnosti, jak se o chování jejich řešení alespoň ve speciálních případech některé věci dozvědět.

Budeme tedy studovat autonomní systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\,. \tag{15.68}$$

Pro potřeby tohoto závěrečného odstavce dále předpokládáme, že všechna řešení, se kterými pracujeme, jsou spojitě rozšířena do bodu 0 a jsou to tedy funkce definované na neomezeném intervalu $[0, +\infty)$. Popišme otázky, které nás zajímají:

(A) Existuje konstantní řešení, které reprezentuje *rovnovážný stav* systému, tj. takové $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$, pro které je $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ pro všechna $x > 0$?

(B) Nechť $\boldsymbol{y}_1$ je řešením rovnice (15.68) a nechť $\boldsymbol{y}_2$ je takové řešení (15.68), pro které je v bodě 0 norma rozdílu $\|\boldsymbol{y}_1(0) - \boldsymbol{y}_2(0)\|$ „malá“. Bude $\boldsymbol{y}_2(x)$ také „blízko“ $\boldsymbol{y}_1(x)$ i pro všechna $x > 0$?

(C) Pokud řešení (15.68) existuje na nějakém intervalu $(0, +\infty)$, jak se chová pro $x \to +\infty$? Existuje např. nějaký rovnovážný stav $\boldsymbol{y}^0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) je $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$?

Otázka (A) není těžká. Má-li $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ být řešením systému (15.68), pak je $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$, a tedy: $\boldsymbol{y}^0$ *je rovnovážným stavem systému* (15.68)*, právě když je*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Otázka (B) je složitější. Vyžaduje především *přesnější popis* problému, který poskytuje následující definice:

Definice 15.9.1. Řekneme, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (15.68) je *stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) a všechna $x > 0$ platí

$$(\|\,\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0)\,\| < \delta) \implies (\|\,\boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x)\,\| < \varepsilon)\,.$$

Řešení, které není stabilní, se nazývá *nestabilní*.

Pro autonomní systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{15.69}$$

s konstantní maticí $\boldsymbol{A}$ lze dokázat následující výsledky (viz např. [12]):

Věta 15.9.2. (1) *Jsou-li reálné části všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ záporné, je každé řešení autonomního systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ stabilní.*

(2) *Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ kladnou reálnou část, je každé řešení systému* (15.69) *nestabilní.*

(3) *Nechť mají všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou nebo nulovou reálnou část a nechť $\lambda_j = \mathrm{i}\gamma_j$, $j = 1, \dots, m$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ s nulovou reálnou částí. Nechť vlastní čísla λ_j mají násobnost k_j, $j = 1, \dots, m$. Potom je každé řešení systému* (15.69) *stabilní, má-li matice $\boldsymbol{A}$ pro každé j celkem k_j lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j.*

Podstatné je, že existují metody, jak jednoduše zjistit, že popsaná situace nastává, aniž je nutno hledat vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$; stačí pouze znát její charakteristický polynom. Např. tzv. *Hurwitzovo kritérium* umožňuje relativně jednoduše zjistit, zda všechny kořeny charakteristického polynomu mají *záporné* reálné části.

Také pro (C) uvedeme jednu potřebnou definici. Otázka (C) je pro řešení systému (15.68) složitější nežli pro systém (15.69), ale definici podáme i pro systém (15.68).

Definice 15.9.3. Budeme říkat, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (15.68) je *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) a všechna $x > 0$ platí

$$(\| \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0) \| < \delta) \implies (\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| < \varepsilon)$$

a zároveň je $\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| \to 0$ pro $x \to +\infty$.

Mají-li v případě systému (15.69) všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou reálnou část, „blíží se" zřejmě všechna řešení k 0, tj. platí tvrzení (viz např. [12]):

Věta 15.9.4. *Řešení systému* (15.69) *je asymptoticky stabilní, právě když mají všechna vlastní čísla matice* $\boldsymbol{A}$ *zápornou reálnou část.*

Historické poznámky 15.9.5. V této kapitole jsme použili mnoha poznatků z algebry. K oblasti studia lineárních rovnic položil základy Gottfried Wilhelm Leibniz (1642 – 1727) pracemi z r. 1678 a r. 1693. Metoda řešení soustav rovnic o dvou, třech a čtyřech neznámých pochází z r. 1729 od Colina Maclaurina (1698 – 1746), byla však publikována po jeho smrti r. 1748. Švýcar Gabriel Cramer (1704 – 1752), po němž se dnes postup (*Cramerovo pravidlo*) nazývá, ho popsal r. 1750.

Významným algebraikem byl Alexander-Theophile Charles August Vandermonde (1735 – 1786). Pro práce z oblasti teorie řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů bývá označován jako předchůdce Nielse Henrika Abela (1802 – 1829). Nesporně je však tvůrcem *teorie determinantů*, ve které mu náleží řada výsledků.

Obyčejné diferenciální rovnice (ODE) tvoří významnou partii matematiky, která je vzhledem k četným aplikacím velmi důležitá. Velmi podnětné jsou v tomto směru učebnice [3] a [6]. U vět o existenci a jednoznačnosti jsme se o hlavních protagonistech vývoje již krátce zmínili. Neprobírali jsme typy rovnic, které lze bez větší námahy vyloženým aparátem řešit; viz např. [8]. Také jsme neuváděli složitější tvrzení o chování maximálních řešení.

Rovnice druhého řádu byly v souvislosti s fyzikálními problémy studovány již r. 1691. Studovali je Jacob Bernoulli (1655 – 1705) i Johann Bernoulli (1667 – 1748). Jedním z takových problémů byl popis kmitání strun. Zde Johann Bernoulli navázal na Brooka Taylora (1685 – 1731). Další výsledky v této problematice získali Euler r. 1728 a Daniel Bernoulli (1700 – 1782) r. 1733, kteří dospěli nejen k základní frekvenci kmitání struny, ale i k vyšším harmonickým. Daniel Bernoulli r. 1734 již úspěšně řešil rovnici řádu 4. R. 1739 informoval Euler Johanna Bernoulliho o řešení obecných lineárních rovnic s konstantními koeficienty. Poznamenejme, že o stáří poznatků z této oblasti svědčí např. to, že pojmy *charakteristický polynom* nebo *charakteristická rovnice* pocházejí patrně již od Eulera. Tato etapa vývoje ODE spočívající, zhruba řečeno, v hledání obecných metod integrace rovnic, trvala do r. 1775, pak došlo ve studiu této problematiky na dlouhou dobu k jistému útlumu.

V případě komplexních funkcí *komplexní proměnné* je řešení diferenciálních rovnic rovněž rozvinutou partií matematické analýzy; poznamenejme alespoň to, že řešení lze např. hledat ve tvaru mocninné řady. Těmito řadami se budeme ještě jednou zabývat v Kapitole 16.

Příklad, ukazující možnou nejednoznačnost řešení, jsme uvedli již v Kapitole 10. Tzv. Lipschitzovu podmínku zavedl poprvé Lipschitz r. 1864 při vyšetřování Fourierových řad. Poznamenejme konečně, že jedinečným zdrojem poznatků z oblasti historie ODE je kniha [6].

Poznamenejme ještě, že studium problémů, vedoucích na systémy diferenciálních rovnic, lze stopovat až k Isaacu Newtonovi (1642 – 1727). V tomto směru tvořil hlavní objekt studia pohyb vzájemného gravitačního působení dvou a více těles.

Otázek stability jsme se pouze dotkli, avšak i ony patří ke klasickým partiím teorie ODE. Jedním z těch, kteří významně přispěli ke studiu stability, byl ruský matematik Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857 – 1918). Zabýval se praktickým problémem existence rotujících elipsoidálních kapalných útvarů při malých změnách rychlosti rotace. Populárně lze ideu stability popsat takto: Rovnovážný stav systému (15.68) je stabilní, jestliže každé řešení, které je v čase $t = 0$ „blízko“ rovnovážného stavu bude „blízko“ i v libovolném budoucím okamžiku.

Literatura:

[1] Agnew, R. P.: *Differential equations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1960, (druhé vydání).

[2] Bečvář, J.: *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[3] Braun, M.: *Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York, 1978, (druhé vydání).

[4] Brzezina, M.: *Jak na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ?*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 2001.

[5] Černý, I.: *Matematická analýza, 3. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1996.

[6] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995, (třetí vydání).

[7] Holický, P., Kalenda, O. F. K.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2002.

[8] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[9] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, SNTL, Praha, 1975.

[10] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie Brno, Brno, 2000, (3. vydání).

[11] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[12] Nagy, J.: *Stabilita řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, SNTL, Praha, 1983.

[13] Pontrjagin, L. S.: *Obyknovjenyje diferencial'nyje uravněnija*, GIFML, Moskva, 1961.

[14] Samojlenko, A. M. a kol.: *Differencialnyje uravněnija – priměry i zadači*, Vysšaja škola, Moskva, 1989.

[15] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.