

Příklady ke cvičení z MMA – ZS 2013/14

(středa, M3, 9:50 – 11:20)

Poznámka (*): Pokud nebude uvedeno jinak budeme vždy pracovat s prostory nad tělesem $T = \mathbb{R}$. Ve všech ostatních případech (tj. při $T = \mathbb{C}$), bude těleso explicitně specifikováno. Budeme používat některé zkratky: MP pro metrický prostor(-y), NLP pro normovaný prostor(-y), UP pro prostor se skalárním součinem (unitární prostor), TP pro topologický prostor apod. Později zavedeme ještě další zkratky.

Cvičení 1: Pokud je metrika ρ na NLP X definována příslušnou normou, má speciální vlastnosti: pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha \in T$ platí

$$\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z), \quad \rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y).$$

Proč? Znáte nějakou metriku na LP, která tuto vlastnost nemá? Má-li metrika na LP tyto dvě vlastnosti, je generována nějakou normou?

Cvičení 2: Vlastnosti normy „kopírují“ vlastnosti absolutní hodnoty na \mathbb{R} . Uvědomte si trojúhelníkovou nerovnost pro normu, resp. její části, pokud ji zapisujete v „obsažnějším“ tvaru

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

Tuto složenou nerovnost budeme často používat. ze které plyne spojitost normy. Lze dokázat, že všechny normy na LP n -tic reálných (komplexních) čísel jsou ekvivalentní!

Cvičení 3: Připomeňte zavedení skalárního součinu na LP X ! Vlastnosti budeme obvykle zapisovat ve tvaru:

$$\begin{aligned}(x, x) &\geq 0, (x, x) = 0, \text{ právě když } x = 0, \\ (\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z), \\ (x, y) &= (y, x), \text{ resp. } (x, y) = \overline{(y, x)},\end{aligned}$$

přičemž poslední vztah užíváme v případě, že pracujeme na LP nad \mathbb{C} . Normu na X pak definujeme vztahem $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ a používáme zkratku UP.

Cvičení 4: Dokažte, že norma generovaná skalárním součinem na UP splňuje podmínku: pro všechna $x, y \in X$ je

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

(tzv. rovnoběžníkové pravidlo; ukažte, že tento název má své opodstatnění). Existuje normovaný lineární prostor (NLP), ve kterém norma tuto podmínku nesplňuje?

Jestliže norma na NLP X (nad \mathbb{R}) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, lze odpovídající skalární součin definovat takto: položíme

$$p(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2);$$

funkce p na $X \times X$ je již hledaným skalárním součinem. Ukažte, že obecně přes „definici“ součinu $(x, y) := (1/2)(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ cesta nevede. V případě, že pracujeme s prostorem X nad \mathbb{C} , je $p(ix, y) = -p(x, iy)$ a hledaný skalární součin má tvar

$$(x, y) := p(x, y) - ip(ix, y).$$

Důkaz odpovídajícího tvrzení vyžaduje trochu práce.

Cvičení 5: Dokažte, že na UP platí tzv. Schwarzova nerovnost

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| !$$

Cvičení 6: Pro normu na (komplexním) UP dokažte pomocí Schwarzovy nerovnosti trojúhelníkovou nerovnost !

Cvičení 7: Prostor m je tvořen všemi omezenými posloupnostmi, prostor c všemi konvergentními posloupnostmi, prostor c_0 všemi posloupnostmi konvergentními k 0 a prostor s_0 všemi posloupnostmi, které mají pouze konečný počet nenulových členů. Ve všech lze zavést pro $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty =: \{x_k\}$ normu vztahem

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup\{|x_k|; k \in \mathbb{N}\}$$

(Můžeme pracovat s posloupnostmi reálných nebo komplexních čísel.) Jestliže $X \subset\subset Y$ značí vztah X je lineárním podprostorem Y , je zřejmé

$$s_0 \subset\subset c_0 \subset\subset c \subset\subset m \subset\subset s,$$

kde s je LP všech posloupností čísel (z \mathbb{R} nebo z \mathbb{C}).

Cvičení 8: Normu v prostoru všech n -tic reálných (nebo komplexních) čísel lze pro $p \geq 1$ zavést předpisem

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Ukažte, že je

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_k|; k \in \{1, \dots, n\}\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Tyto prostory značíváme ℓ_n^p (je tedy $\ell_n^\infty \subset\subset m$).

Cvičení 9: Analogicky zavádíme pro $p \geq 1$ prostory posloupností: Na lineárním prostoru ℓ^p všech posloupností $\mathbf{x} = \{x_k\}$, pro něž je $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$ definujeme

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Při použití tohoto označení je rozumné klást $\ell^\infty = m$ z analogických důvodů jako ve Cvičení 7.

Cvičení 10: Zaveďte na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nezápornou funkci $\sigma(x, y)$ předpisem

$$\sigma(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} !$$

Všimněte si, že je omezená a ukažte, že σ je metrika \mathbb{R} ! Poznámka: Funkce p na LP X s vlastnostmi

- (1) $p(x) \geq 0$,
- (2) $p(0) = 0$,
- (3) $p(x) = p(-x)$
- (4) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- (5) pro $t_k \rightarrow t$ a pro $x_k \rightarrow x$ je $p(t_k x_k - t x) \rightarrow 0$

je paranorma na X . Zkoumejte $p(x - y)$!

Cvičení 11: Zobecněte předchozí úlohu a dokažte, že je-li $\rho = \rho(x, y)$ metrika na MP X , je také

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

(omezená) metrika na X . To nám dává možnost zavést omezenou metriku na jakémkoli MP. Přitom se tato metrika od původní liší jen „nepodstatně“ – k této konstrukci se ještě vrátíme.

Cvičení 12: Je poměrně vžitě užívání standardního označení pro prostory všech posloupností reálných, resp. komplexních čísel, které pak uvažujeme jako prostory nad \mathbb{R} , resp. \mathbb{C} . Tento prostor lze opatřit matrikou ρ např. tak, že pro všechna $x, y \in X$ položíme

$$\rho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Tento prostor budeme značit s .

Cvičení 13: Systém \mathfrak{B} všech otevřených množin metrického prostoru (X, ρ) má tyto vlastnosti:

- (a) $\emptyset, X \in \mathfrak{B}$,
- (b) sjednocení libovolného podsystemu systému \mathfrak{B} je prvkem \mathfrak{B} , a
- (c) průnik konečného podsystemu systému \mathfrak{B} je prvkem \mathfrak{B} .

Všimněte si, že pro libovolnou dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, lze nalézt $U_x, U_y \in \mathfrak{B}$ tak, že $x \in U_x$, $y \in U_y$ a $U_x \cap U_y = \emptyset$ (systém \mathfrak{B} *odděluje body* prostoru X).

Cvičení 14: Libovolný systém \mathfrak{B} podmnožin množiny X s vlastnostmi (a), (b), (c) z předcházejícího cvičení se nazývá *topologie* (na X). Topologii na X velmi často značíme τ a dvojici (X, τ) nazýváme *topologický prostor*. Prvky systému τ jsou otevřené množiny (X, τ) a pomocí nich lze zavést v (X, τ) řadu pojmů, které znáte z teorie MP (pozor, vše „nefunguje“ zcela analogicky jako v MP!).

Cvičení 15: Triviálními topologiemi na X jsou např. systémy $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ nebo systém $\tau_2 = \mathfrak{P}(X)$ všech podmnožin množiny X . Které funkce na (X, τ_1) nebo na (X, τ_2) jsou spojité? Je-li $\#(X) \geq 2$, τ_1 neodděluje body X . (Problém možnosti vytvořit topologii metrikou nebudeme blíže zkoumat.)

Cvičení 16: Ukažte, že v s platí: je-li $x_k \rightarrow x_0$ v s a $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$ v T , pak $\alpha_k x_k \rightarrow \alpha_0 x_0$.

Cvičení 17: V tomto cvičení zobecníme Schwarzovu nerovnost na \mathbb{R}^m : pro každá čísla $p, q \in (0, \infty)$ splňující podmínku $p + q = pq$, neboli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

a každé dva body $[x_1, \dots, x_m], [y_1, \dots, y_m]$ z \mathbb{R}^m platí Hölderova nerovnost

$$\sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Cvičení 18: Pro každé p , $1 < p < \infty$, a pro každou dvojici bodů $x = [x_1, \dots, x_m]$, $y = [y_1, \dots, y_m]$ z \mathbb{R}^m platí nerovnost Minkovského (česky Minkowského)

$$\left(\sum_{k=1}^m |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Jaký je její význam v kontextu MP?

Cvičení 19: Dokažte Hölderovu a Minkovského nerovnost pro prostory posloupností ℓ^p (tj. obdobné nerovnosti pro nekonečné řady)!

Cvičení 20: Připomeňte definici otevřené a uzavřené koule a sféry v kontextu MP. V diskretním MP „jednotková sféra obsahuje libovolně mnoho disjunktních otevřených jednotkových koulí“.

Cvičení 21: Připomeňte si definici *diametru množiny*. Proč je součástí definice část, vymežující speciálně $\text{diam}(\emptyset)$? Všimněte si vztahů mezi „poloměrem“ a „průměrem“ koule v diskretním prostoru!

Cvičení 22: Jak popisujeme vzájemný vztah bodu a množiny v MP? Připomeňte si definici vnitřního, vnějšího a hraničního bodu množiny! Jak se definuje hromadný bod množiny?

Cvičení 23: Jak definujeme spojitost a limitu funkce, definované na MP? Proč nemůžeme definovat limitu funkce vzhledem k množině v jejím izolovaném bodě?

Cvičení 24: Definice *vzdálenosti množin* M, N v MP (P, ρ) je $(M, N \neq \emptyset)$

$$\text{dist}(M, N) := \inf\{\rho(x, y); x \in M, y \in N\}.$$

Často zjednodušíme, zde např. píšeme $\text{dist}(x, A)$ místo $\text{dist}(\{x\}, A)$ a mluvíme o vzdálenosti bodu od množiny.

Cvičení 25: Označme $d_A(x)$ pro neprázdnou množinu $A \subset (P, \rho)$ vzdálenost bodu x od množiny A . Dokažte nerovnost

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq \rho(x, y).$$

Je-li $x \in A$, je $d_A(x) = 0$. Lze toto tvrzení obrátit, tj. plyne z $d_A(x) = 0$, že $x \in A$?

Cvičení 26: Najděte dvě disjunktní množiny v \mathbb{R} s nulovou vzdáleností! Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x, r)$ a $K(x, r)$ vždy 0? Je pro $r > 0$ vzdálenost $B(x, r)$ a $S(x, r)$ vždy 0? Je pro $r > 0$ vzdálenost $S(x, r)$ a $K(x, r)$ vždy 0?

Cvičení 27: Lze volit M, N neprázdne *uzavřené* v \mathbb{R}^n s $\text{dist}(M, N) = 0$ disjunktní?

Cvičení 28: Je vzdálenost $d_A(x)$ bodu od množiny spojitá funkce? Lze ji nějak využít, např. k popisu uzávěru \overline{A} množiny A ?