

## Zápočtová písemka k předmětu MMA (jako ukázka)

Nejprve si celý text pozorně přečtěte. Všechna svá tvrzení se snažte odůvodnit! Prosím, nezapomeňte vyplnit záhlaví tohoto listu a nezapomeňte svá řešení podepsat.

- (1) Je prostor  $m$  všech reálných omezených posloupností separabilní? Své tvrzení stručně zdůvodněte!
- (2) Jak se definuje norma (spojitého) lineárního funkcionálu  $f$  na normovaném lineárním prostoru  $X$ ? Jak pak definujeme na prostoru spojitých lineárních funkcionálů na  $X$  metriku?
- (3) Charakterizujte v diskrétním prostoru všechny konvergentní posloupnosti!
- (4) Je jednotková krychle  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  kompaktní? Odpověď zdůvodněte!
- (5) Je množina  $\{[x, y]; x^2 y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  totálně omezená.?
- (6) Je prostor  $\mathcal{C}([0, 1])$  separabilní?
- (7) Jaké vlastnosti musí mít metrika na lineárním prostoru  $X$ , aby ji bylo možno generovat normou?
- (8) Zformulujte tzv. Banachovu větu o kontrakci! K čemu jsme ji použili?
- (9) Definujte řídkou množinu a množinu 1. kategorie!
- (10) Je-li  $M$  omezená podmnožina metrického prostoru  $(P, \rho)$  a  $x \notin M$ , je pak  $\text{dist}(x, M) > 0$ ?