Komutativní okruhy: Cvičení 1

8. října 2019

1. Dokaž, že sjednocení řetězce (libovolně mnoha) ideálů $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ je ideál.

2. Pro ideály I, J definujme $I + J := \{a + b | a \in I, b \in J\}$. Dokaž, že $I + J$ je nejmenší ideál v R, který obsahuje I a J.

3. Buď R okruh a M ideál v R. Dokaž:

   a) M je maximální, právě když pro všechna $a \in R \backslash M$ platí $R = M + aR$.

   b) Pokud M je maximální a $a \in R \backslash M$, pak existují $m \in M$ a $r \in R$ taková, že $1 = m + ar$.

4. Urči $\mathbb{Q}[x]/(x+2), \mathbb{Q}[x]/(x^2-2), \mathbb{Q}[x]/(x^2-1), \mathbb{R}[x]/(x^2-2), \mathbb{Z}[x]/(x^2-2)$.

5. Mějme ideály I, J, K okruhu R. Dokaž, že $IJ \subset I \cap J$ a $I(J+K) = IJ + IK$. Najdi příklad, kdy $IJ \neq I \cap J$.

Další příklady:

6. Dokaž, že operace na faktorokruhu jsou definované korektně a že jde o okruh (a dokaž ostatní věci z přednášky, které jsme nechali jako cvičení).

7. Dokaž 3. větu o izomorfismu (větu 1.5).

8. Pro podmnožiny A, B okruhu R definujme $A \odot B := \{ab | a \in A, b \in B\}$ (pozor, toto neodpovídá násobení ideálů). Buď I ideál v R. Dokaž, že $(a+I) \odot (b+I) \subset ab + I$. Platí opačná inkluze?

9. Uvažujme okruh $\mathbb{Z}$ a uvažujme v něm ideály $I = (168)$ a $J = (288)$.

   a) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v $\mathbb{Z}$?

   b) Urči $I + J, IJ, I \cap J, I^2 + J$.

   c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I, J, IJ, $I \cap J$, resp. J^2.

10. Buď R obor hlavních ideálů a $a, b \in R$.

    a) Urči $(a)(b), (a) + (b), (a) \cap (b)$.

    b) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v R?

    c) Dokaž, že faktor R podle nenulového prvoideálu je těleso.

11. Uvažujme obor hlavních ideálů $\mathbb{Q}[x]$ a ideály $I = (x^3+x^2+2x+2)$ a $J = (x^3-2x^2+2x-4)$.

    a) Urči $I + J, IJ, I \cap J, I^2 + J^3$.

    b) Které faktory modulo hlavní ideál z bodu a) jsou obory?

    c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I, J, IJ, $I \cap J$, resp. J^2.

Hinty:
Obecně: když nevíš, zkus to sporem!
4. 1. věta o izomorfismu.
7. Projekce $\pi\colon R \twoheadrightarrow R/I$ a její zúžení na $\varphi\colon S \to R/I$. 1. věta o izomorfismu pro φ.
8. Neplatí. Zvol $R = \mathbb{Z}$ a prvočíslo v $ab + I$.