I. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic a určete množinu všech bodů z $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$

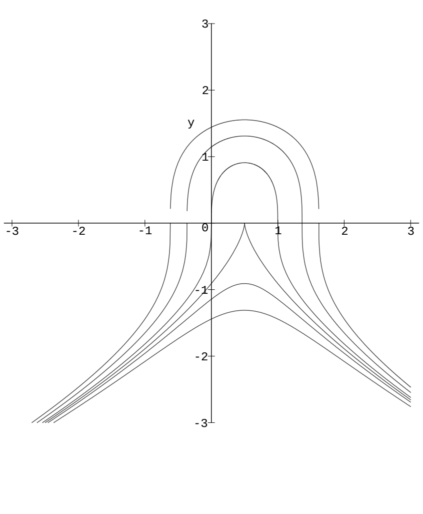
1. $y \cdot y' = \frac{1-2x}{y}$ **2.** $xy' + y = y^2$ **3.** $y' = 10^{x+y}$ **4.** $e^{-y}(1+y') = 1$ **5.** $y' = \frac{\cos x}{e^y}$

6. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0,\ x \in (-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **7.** $y' \sin x = y \ln y,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$

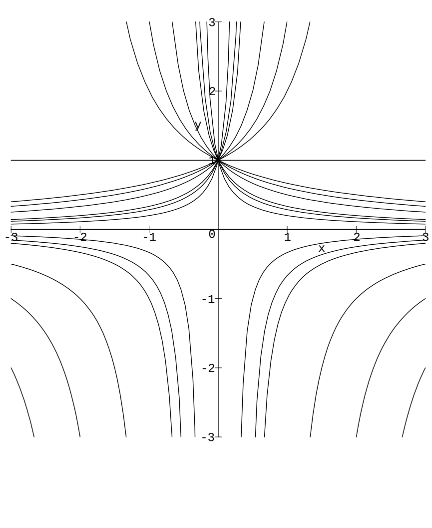
8. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2},\ y(0) = 1$ **9.** $y - xy' = b(1 + x^2 y'),\ y(1) = 1\ (b \in \mathbb{R})$

Výsledky a návody. **1.** $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c < -\frac{1}{4}$; $y^{1,2}_{-1/4} = -\sqrt[3]{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y^{1,2,3}_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 < -3(x - \frac{1}{2})^2\}$. **2.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y^{1,2}_c = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ nebo } y = 1\}$ (bodem $(0,1)$ prochází nekonečně mnoho řešení, ale jen jedno z nich je definováno na celém $\mathbb{R}$). **3.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$; $\emptyset$. **4.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y^1_c = -\log(1 + e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y^2_c = -\log(1 - e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le 0\}$. **5.** $y_c = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 1$; $y^k_c = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in (-1, 1]$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. **6.** $y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$, $x \in (-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$, $x \in (-1,1)$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$, pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$, $x \in (-1,1)$; $\emptyset$. **7.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y^k_c = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ (body $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ prochází nekonečně mnoho řešení, ale jen jedno z nich je definované na celém $\mathbb{R}$). Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **8.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y^{1,2}_\infty = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y^{1,2}_c = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y^1_1. **9.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y^{1,2}_c = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b < -1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b \in (-1,1) \cup (1, \infty)$.

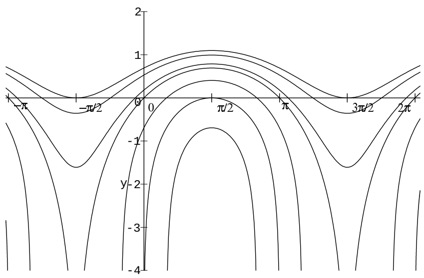
1.

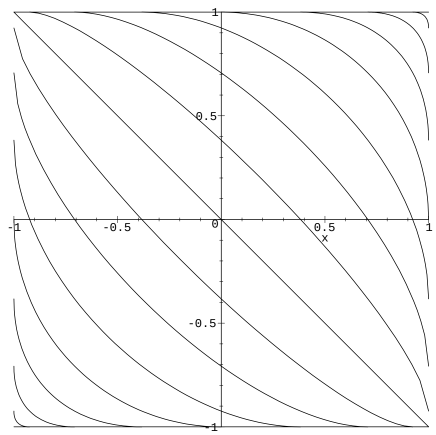


2.



5. **6.**





II. Řešte následující diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{2y}{x}$ **2.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ **3.** $y' = \frac{y}{x} - 1$ **4.** $y'x = y + x^2$ **5.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$ **7.** $xy' + y = \log x + 1$ **8.** $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ $(a \in \mathbb{R})$
9. $(2x+1)y' + y = x$ **10.** $y' - y\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ **11.** $y' + y\cos x = \sin 2x$ **12.** $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **3.** $y = -x\log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{1}{|a|}\log\frac{1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}} + c\right)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

- -

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **3.** $y = -x\log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{1}{|a|}\log\frac{1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}} + c\right)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

III. Aplikace diferenciálních rovnic

1. V kuchyni je teplota 20°C. Za jak dlouho se právě vypnutá vroucí polévka ochladí na 25°C, pokud po deseti minutách má teplotu 60°C? (Rychlost ochlazování je přímo úměrná rozdílu teplot.)
2. Určete křivku, která prochází bodem $(-a, a)$ takovou, že pro každou její tečnu bod dotyku je středem úsečky, kterou na tečně vytínají průsečíky s osami.
3. Ve městě jistá firma začala rozdávat reklamní letáky propagující nový prací prášek. Člověk, který si dosud leták nevzal, si ho vezme s pravděpodobností a. Ten, kdo si ho vzal, s pravděpodobností b začne nový prášek používat, a s pravděpodobností c leták zahodí a už si nikdy další nevezme. (S pravděpodobností $1-b-c$ tedy bude zatím váhat.) Jaká bude úspěšnost nového prášku?
4. Za jak dlouho po dělení se nově vzniklá buňka znovu rozdělí, pokud se dělí v okamžiku, kdy zdvojnásobí svůj objem, a přitom objem roste úměrně povrchu, při svém vzniku měla poloměr 0.01 mm, a za hodinu již 0.015 mm?
5. Trpaslíci střídavě mluví a mlčí. Pravděpodobnost, že mlčící promluví, je a, pravděpodobnost, že mluvící umlkne, je b. Kolik trpaslíků bude mluvit, bude-li jejich komunita žít dostatečně dlouho? Závisí to na počátečním stavu (tj. na tom, kolik jich mluvilo na počátku)?

- -

Výsledky a návody. **1.** 40 minut. **2.** $xy = -a^2$. **3.** $\frac{b}{b+c}$, pokud $a > 0$; pokud $a = 0$, pak ovšem nulová. **4.** Po té hodině už budou dvě buňky. Pak lze zadání interpretovat dvěma způsoby: Buď tak, že by buňka měla po hodině poloměr 0.015 mm za předpokladu, že by se nedělila; pak by první dělení nastalo $2 \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)$ hodin od začátku. Nebo tak, že po hodině společný objem obou existujících buněk je roven objemu, který by měla buňka o poloměru 0.015 mm; pa by první dělení nastalo za $\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-1)}{1.5-\sqrt[3]{2}(2-\sqrt[3]{2})}$ hodin od začátku. **5.** Pokud $a > 0$ nebo $b > 0$, pak $\frac{a}{a+b}$; nezávisle na počátečním stavu. Pokud ovšem $a = b = 0$, pak počáteční stav zůstává navždy.

==

IV. Řešte soustavy diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' + z - y = e^x$, $y' - z + y = e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1, v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1, v(0) = 1, z(0) = 0)$

- -

Výsledky a návody. **1.** $z = \frac{3B-A}{4}e^x + \frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y = \frac{A-3B}{4}e^x + \frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c-d)e^{-6x}\sin x + de^{-6x}\cos x$, $y = ce^{-6x}\cos x + (c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{3}(c+d)e^{-4x} - \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + \frac{1}{3}(c+d)e^{-4x} + \frac{1}{3}(2c-d)e^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{a-b}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$, $w = \frac{c-a-b}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{3}e^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{b+c-2a}{3}e^{-x}$, $v = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+c-2b}{3}e^{-x}$, $w = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+b-2c}{3}e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$

==

V. Řešte soustavu $y' = Ay$, pokud $A =$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- -

Výsledky a návody. **1.** $y = (a \cdot e^{3x}, e^{3x} \cdot (-\frac{a}{2}x^2 + (a-b)x + a + b - c), e^{3x} \cdot (\frac{a}{2}x^2 + bx + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **2.** $y = (e^{2x}(bx+c), e^{2x}(2bx+b+2c), e^{2x}(bx+a+c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **3.** $y = (e^{-x}(3bx + 5a + b + 3c), e^{-x}(bx+c), e^{-x}(bx+a+c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **4.** $y = (3ae^{-x} + e^x(2b-c), 5ae^{-x} + be^x, 6ae^{-x} + ce^x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Test číslo 1 – první verze

1. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' \cdot x = \sqrt{1-y^2} \cdot \arcsin y.$$

Načrtněte jejich grafy. (25 bodů)

Řešení.

A. Nejprve si všimněme, že pro každé řešení y této rovnice musí platit $y \in [-1,1]$.

B. Ze zadání je okamžitě vidět, že funkce $y=1$, $y=-1$ a $y=0$ (na $\mathbb{R}$) jsou řešeními této rovnice.

C. Na intervalech, kde $x \neq 0$ a $y \in (0,1)$ nebo $y \in (-1,0)$, můžeme počítat následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}\cdot\arcsin y} &= \frac{1}{x} & \\
(\log|\arcsin y|)' &= (\log|x|)' & \\
\log|\arcsin y| &= \log|x| + c, & c \in \mathbb{R} \\
|\arcsin y| &= k|x|, & k > 0 \\
\arcsin y &= kx, & k \neq 0 \\
y &= \sin(kx), & k \neq 0
\end{aligned}$$

Z pátého řádku (který je ekvivalentní s dvěma předchozími) dostáváme podmínku $kx \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, protože funkce arcsin nabývá hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vezmeme-li v úvahu výše uvedené podmínky, za nichž jsme úpravy dělali, dostaneme navíc, že $x \neq 0$. Závěrem bodu C. můžeme říci, že řešení y splňující podmínku $y \in (0,1)$ nebo $y \in (-1,0)$, definovaná na intervalech, které neobsahují 0, vypadají takto:

$$\begin{aligned}
y &= \sin(kx), & x &\in \left(-\frac{\pi}{2k}, 0\right),\ k > 0, \\
y &= \sin(kx), & x &\in \left(0, -\frac{\pi}{2k}\right),\ k < 0, \\
y &= \sin(kx), & x &\in \left(0, \frac{\pi}{2k}\right),\ k > 0, \\
y &= \sin(kx), & x &\in \left(\frac{\pi}{2k}, 0\right),\ k < 0.
\end{aligned}$$

Tento zápis lze zjednodušit:

$$\begin{aligned}
y &= \sin(kx), & x &\in \left(0, \frac{\pi}{2|k|}\right),\ k \neq 0, \\
y &= \sin(kx), & x &\in \left(-\frac{\pi}{2|k|}, 0\right),\ k \neq 0.
\end{aligned}$$

D. Nyní dáme dohromady předchozí výsledky, abychom určili všechna maximální řešení. Triviální řešení ($y=0$, $y=1$, $y=-1$) z bodu B. není kam prodloužit, a tedy jsou maximální.

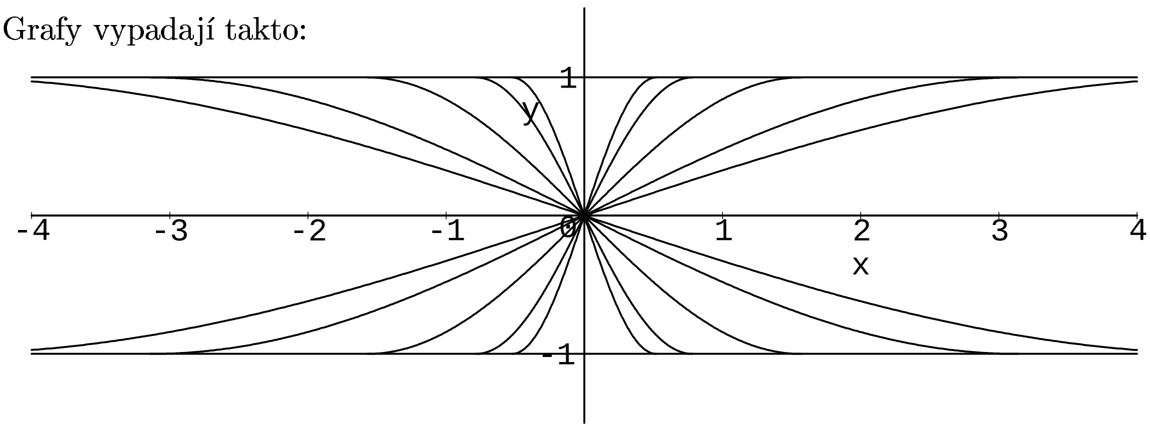
Dále si všímejme řešení z bodu C.
(i) Řešení $y = \sin(kx)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2|k|})$ se chová takto: limita v $0+$ je 0, limita v $\frac{\pi}{2|k|}-$ je $\operatorname{sgn} k$. Derivace $y' = k\cos(kx)$ má v $0+$ limitu k, v $\frac{\pi}{2|k|}-$ limitu 0.
(ii) Řešení $y = \sin(kx)$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2|k|}, 0)$ se chová takto: limita v $0-$ je 0, limita v $-\frac{\pi}{2|k|}+$ je $-\operatorname{sgn} k$. Derivace $y' = k\cos(kx)$ má v $0-$ limitu k, v $-\frac{\pi}{2|k|}+$ limitu 0.
Z toho dostáváme, že všechna maximální řešení jsou:

$$y = 0, x \in \mathbb{R}, \qquad y = -1, x \in \mathbb{R}, \qquad y = 1, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2k}] \\ \sin(kx) & x \in (-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}) \\ 1 & x \in [\frac{\pi}{2k}, \infty) \end{cases}, \qquad \text{pro } k > 0$$

$$y(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, \frac{\pi}{2k}] \\ \sin(kx) & x \in (\frac{\pi}{2k}, -\frac{\pi}{2k}) \\ -1 & x \in [-\frac{\pi}{2k}, \infty) \end{cases}, \qquad \text{pro } k < 0$$

E. Grafy vypadají takto:



2. Najděte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} u' &= 2u + 5v + 2w \\ v' &= u + 9v + 3w \\ w' &= -2u - 19v - 6w \end{aligned}$$

(25 bodů)

Řešení. Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & -19 & -6 \end{pmatrix}$. Nejprve najděme vlastní čísla:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 2 \\ 1 & 9-\lambda & 3 \\ -2 & -19 & -6-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(9-\lambda)(-6-\lambda) + (-2)\cdot 5 \cdot 3 \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot (-19) - 5 \cdot (-6-\lambda) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (9-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 3 \cdot (-19) \\ &= -(\lambda^2 - 11\lambda + 18)(6+\lambda) - 30 - 38 + 30 + 5\lambda + 36 - 4\lambda + 6 \cdot 19 - 57\lambda \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 18\lambda + 66\lambda - 6 \cdot 18 - 2 - 56\lambda + 6 \cdot 19 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4. \end{aligned}$$

Vidíme, že jedním kořenem je 1. Po vydělení determinantu polynomem $\lambda - 1$ dostaneme polynom $-\lambda^2 + 4\lambda - 4$, který má dvojnásobný kořen 2. Vlastní čísla jsou tedy 1 a dvojnásobné 2. Hledejme vlastní vektory.

K číslu 1:

$$\begin{aligned} 2a+5b+2c&=a \\ a+9b+3c&=b \\ -2a-19b-6c&=c \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} a+5b+2c&=0 \\ a+8b+3c&=0 \\ -2a-19b-7c&=0 \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} 3b+c&=0 \\ a+8b+3c&=0 \\ -3b-c&=0 \end{aligned}\,,$$

řešením je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

K číslu 2:

$$\begin{aligned} 2a+5b+2c&=2a \\ a+9b+3c&=2b \\ -2a-19b-6c&=2c \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} 5b+2c&=0 \\ a+7b+3c&=0 \\ -2a-19b-8c&=0 \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} 5b+2c&=0 \\ a+7b+3c&=0 \\ -5b-2c&=0 \end{aligned}\,,$$

řešením je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, a jiný lineárně nezávislý vlastní vektor neexistuje. Proto hledejme vektor $\mathbf{v}$, pro který $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, neboli

$$\begin{aligned} 2a+5b+2c&=2a+1 \\ a+9b+3c&=2b+2 \\ -2a-19b-6c&=2c-5 \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} 5b+2c&=1 \\ a+7b+3c&=2 \\ -2a-19b-8c&=-5 \end{aligned}\,,\ \text{tedy}\quad \begin{aligned} 5b+2c&=1 \\ a+7b+3c&=2 \\ -5b-2c&=-1 \end{aligned}\,,$$

tedy například vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Z obecných vět vyplývá, že pokud uděláme substituci pomocí matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, t.j. $u = p+q$, $v = p+2q-r$, $w = -3p-5q+3r$, dostaneme soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, t.j.

$$p' = p, \qquad q' = 2q + r, \qquad r' = 2r.$$

Ta má řešení $p = ae^x$, $q = e^{2x}(cx+b)$, $r = ce^{2x}$. Ze substitučních rovnic dostáváme řešení původní soustavy

$$\begin{aligned} u &= ae^x + (b+cx)e^{2x}, \\ v &= ae^x + (2cx+2b-c)e^{2x}, \\ w &= -3e^x - (5cx+5b-3c)e^{2x}. \end{aligned}$$

– –

Test číslo 1 – druhá verze

1. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' \cdot x = -\sqrt{1-y^2} \cdot \arccos y.$$

Načrtněte jejich grafy. (25 bodů)

Řešení.

A. Nejprve si všimněme, že pro každé řešení y této rovnice musí platit $y \in [-1, 1]$.

B. Ze zadání je okamžitě vidět, že funkce $y = 1$ a $y = -1$ (na $\mathbb{R}$) jsou řešeními této rovnice.

C. Na intervalech, kde $x \neq 0$ a $y \in (-1,1)$, můžeme počítat následovně:

$$
\begin{aligned}
-\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}\cdot\arccos y} &= \frac{1}{x} \\
(\log \arccos y)' &= (\log|x|)' \\
\log \arccos y &= \log|x| + c, \qquad && c \in \mathbb{R} \\
\arccos y &= k|x|, && k > 0
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu jsme použili i fakt, že funkce arccos nabývá na $(-1,1)$ kladných hodnot, proto nepíšeme $|\arccos y|$, ale $\arccos y$. Z posledního řádku (protože $\arccos y \in (0,\pi)$) dostáváme, že $k|x| \in (0,\pi)$, tedy $|x| \in (0, \frac{\pi}{k})$. Poslední rovnost můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$\arccos y = kx, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{k}\right), k > 0 \text{ nebo } x \in \left(\frac{\pi}{k}, 0\right), k < 0.$$

Odtud dostaneme řešení

$$
\begin{aligned}
y &= \cos(kx), \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{k}\right),\ k > 0, \\
y &= \cos(kx), \qquad x \in \left(\frac{\pi}{k}, 0\right),\ k < 0).
\end{aligned}
$$

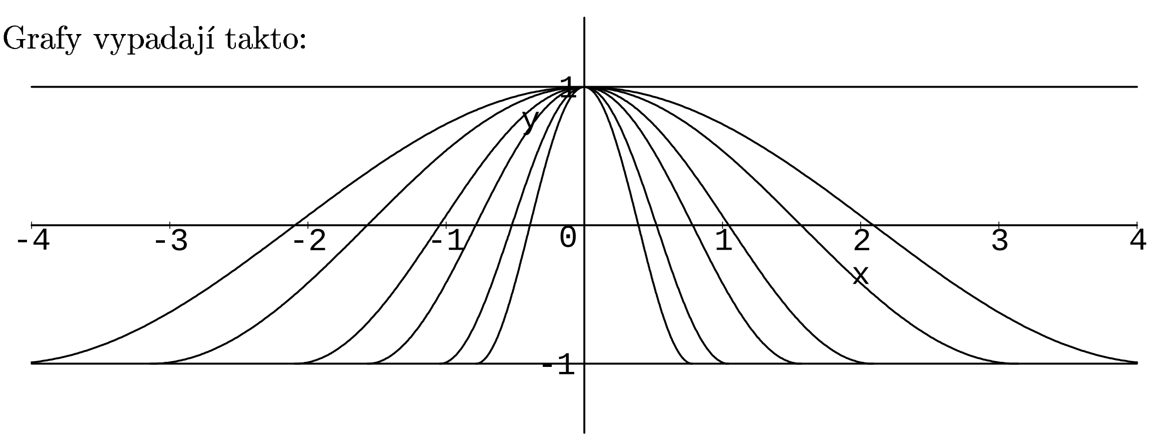
To jsou tedy všechna řešení s hodnotami v $(-1,1)$ na intervalech neobsahujících 0.
D. Nyní dáme dohromady předchozí výsledky, abychom určili všechna maximální řešení.
Triviální řešení ($y = 1$, $y = -1$) z bodu B. není kam prodloužit, a tedy jsou maximální.
Dále si všímejme řešení z bodu C.
(i) Řešení $y = \cos(kx)$ na $(0, \frac{\pi}{k})$ pro $k > 0$: Limita v $0+$ je 1, limita v $\frac{\pi}{k}-$ je -1. Derivace $y' = -k\sin(kx)$ má v $0+$ i v $\frac{\pi}{k}-$ limitu 0.
(ii) Řešení $y = \cos(kx)$ na $(\frac{\pi}{k}, 0)$ pro $k < 0$: Limita v $0-$ je 1, limita v $\frac{\pi}{k}+$ je -1. Derivace $y' = -k\sin(kx)$ má v $0-$ i v $\frac{\pi}{k}+$ limitu 0.
Odtud plyne, že všechna maximální řešení jsou:

$$y = -1,\ x \in \mathbb{R} \qquad y = 1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \cos(kx) & x \in (0, \frac{\pi}{k}) \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{k}, \infty) \end{cases}, \text{ pro } k > 0, \qquad y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, \frac{\pi}{k}) \\ \cos(kx) & x \in (\frac{\pi}{k}, 0) \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}, \text{ pro } k < 0,$$

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, \frac{\pi}{k}) \\ \cos(kx) & x \in (\frac{\pi}{k}, 0) \\ \cos(lx) & x \in (0, \frac{\pi}{l}) \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{l}, \infty) \end{cases}, \text{ pro } k < 0, l > 0$$

E. Grafy vypadají takto:



2. Najděte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} u' &= 10u + 14v + 5w \\ v' &= -2u - 2v - w \\ w' &= -7u - 11v - 3w \end{aligned}$$

(25 bodů)

Řešení. Matice soustavy je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \\ -7 & -11 & -3 \end{pmatrix}$. Nejprve najděme vlastní čísla:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 14 & 5 \\ -2 & -2-\lambda & -1 \\ -7 & -11 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) + 14\cdot(-1)\cdot(-7) \\ &+ 5\cdot(-1)\cdot(-11) - 5\cdot(-2-\lambda)\cdot(-7) - 14\cdot(-2)\cdot(-3-\lambda) - (10-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-11) \\ &= (\lambda^2 + 5\lambda + 6)(10-\lambda) + 7\cdot 14 + 110 - 70 - 35\lambda - 6\cdot 14 - 28\lambda - 110 + 11\lambda \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 50\lambda + 60 + 14 - 70 - 24\lambda - 28\lambda \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4. \end{aligned}$$

Vidíme, že jedním kořenem je 1. Po vydělení determinantu polynomem $\lambda - 1$ dostaneme polynom $-\lambda^2 + 4\lambda - 4$, který má dvojnásobný kořen 2. Vlastní čísla jsou tedy 1 a dvojnásobné 2. Hledejme vlastní vektory.
K číslu 1:

$$\begin{aligned} 10a + 14b + 5c &= a \\ -2a - 2b - c &= b \\ -7a - 11b - 3c &= c \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} 9a + 14b + 5c &= 0 \\ -2a - 3b - c &= 0 \\ -7a - 11b - 4c &= 0 \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} -a - b &= 0 \\ -2a - 3b - c &= 0 \end{aligned},$$

řešením je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
K číslu 2:

$$\begin{aligned} 10a + 14b + 5c &= 2a \\ -2a - 2b - c &= 2b \\ -7a - 11b - 3c &= 2c \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} 8a + 14b + 5c &= 0 \\ -2a - 4b - c &= 0 \\ -7a - 11b - 5c &= 0 \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} a + 3b &= 0 \\ 2a + 4b + c &= 0 \\ -3a - 9b &= 0 \end{aligned},$$

řešením je například vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, a jiný lineárně nezávislý vlastní vektor neexistuje. Proto hledejme vektor $\mathbf{v}$, pro který $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, neboli

$$\begin{aligned} 10a + 14b + 5c &= 2a + 3 \\ -2a - 2b - c &= 2b - 1 \\ -7a - 11b - 3c &= 2c - 2 \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} 8a + 14b + 5c &= 3 \\ -2a - 4b - c &= -1 \\ -7a - 11b - 5c &= -2 \end{aligned}, \text{ tedy } \begin{aligned} a + 3b &= 1 \\ 2a + 4b + c &= 1 \\ -3a - 9b &= -3 \end{aligned},$$

řešením je například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Z obecných vět vyplývá, že pokud uděláme substituci pomocí matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, t.j. $u = p + 3q + r$, $v = -p - q$, $w = p - 2q - r$, dostaneme soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, t.j.

$$p' = p, \qquad q' = 2q + r, \qquad r' = 2r.$$

Ta má řešení $p = ae^x$, $q = e^{2x}(cx+b)$, $r = ce^{2x}$. Ze substitučních rovnic dostáváme řešení původní soustavy

$$\begin{aligned} u &= ae^x + (3b + c + 3cx)e^{2x}, \\ v &= -ae^x - (cx + b)e^{2x}, \\ w &= e^x - (2cx + 2b + c)e^{2x}. \end{aligned}$$

VI. Fourierovy řady

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$ a určete součet všude, kde řada konverguje. (a) $\sin^2 x$, (b) $\cos^3 x$, (c) $\cos^{2m} x$, (d) $\frac{\sin mx}{\sin x}$, (e) $\frac{1}{\sin x}$.
2. Vyjádřete funkci $f(x) = x^2$ na $(0, 2\pi)$ jako součet trigonometrické řady a výsledek aplikujte v bodě $x = 0$.
3. Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci $\sin ax$ na $(-\pi, \pi)$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, aplikujte v bodě $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ na $(-\pi, 0)$ v sinovou řadu.
5. Funkci $f(x) = x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$ vyjádřete jako součet trigonometrické řady obsahující jen členy tvaru (a) $c \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$ liché, (b) $c \cos kx$, $k \in \mathbb{N}$ liché, (c) $c \cos kx$, $k \in \mathbb{N}$ sudé, (d) $c \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$ sudé. Jak vypadají součty těchto řad?

Výsledky a návody. **1.** a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. b) $\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. c) $\frac{1}{2^{2m}} \cdot \binom{2m}{m} + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \binom{2m}{m-n} \cos 2nx$, konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. d) Pro $m = 2k$: $\sum_{n=1}^{k} 2\cos(2n-1)x$; pro $m = 2k+1$: $1 + \sum_{n=1}^{k} 2\cos 2nx$; konverguje všude k f, je to trigonometrický polynom. e) Toto není fourierovská funkce, nemá FŘ. **2.** $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)} \cdot \sin \pi a \cdot \sin nx$; $\frac{\pi}{\cos \pi a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}-a} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}+a}\right)$. **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\cdot(-1)^n \cdot \frac{\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx$. **5.** a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^k}{\pi\cdot(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$, součet je $f^*(x) = \begin{cases} -\pi - x & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}] \\ x & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$, a 2π-periodicky. b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1} - \frac{4}{\pi\cdot(2k+1)^2}\right) \cdot \cos(2k+1)x$, součet je

$$f^*(x) = \begin{cases} -\pi - x & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}) \\ |x| & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x + \pi & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 0 & x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

, a 2π-periodicky. c) $\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi\cdot k^2}\cos 2kx$, součet je $f^*(x) = \begin{cases} \pi + x & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}] \\ |x| & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$, a 2π-periodicky. d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^k}{k}\sin 2kx$, součet je $f^*(x) = \begin{cases} \pi + x & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}) \\ x & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x - \pi & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 0 & x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$, a 2π-periodicky.

VII. VEKTOROVÁ POLE, KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

ZJISTĚTE, ZDA UVEDENÁ VEKTOROVÁ POLE
JSOU GRADIENTEM NĚJAKÉ FUNKCE, A POKUD ANO, PAK JAKÉ

1. (x,y) **2.** (y,x) **3.** (x,x) **4.** $(x^2+2xy-y^2, x^2-2xy-y^2)$ **5.** $\left(\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2}, \frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\right)$
6. $\left(\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}, \frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}\right)$ **7.** $(e^x(y+e^y(x-y+2)), e^x(1+e^y(x-y)))$ **8.** (x,y,z) **9.** (z,y,x)
10. (z,x,y) **11.** $(y^2-z^2, 2yz, -x^2)$ **12.** (y^2, z^2, x^2)

SPOČTĚTE KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY $\int_\gamma \varphi$, KDE

13. $\varphi(x,y)=(-y,x)$, a) γ je úsečka z počátku do bodu $(1,2)$, b) γ je část paraboly $y=2x^2$ od bodu $(0,0)$ do $(1,2)$, c) γ je lomená čára $(0,0)\to(1,0)\to(1,2)$. **14.** $\varphi(x,y)=(y,x)$, γ jako v předchozím příkladě. **15.** $\varphi(x,y)=(x^2-2xy, y^2-2xy)$, γ je úsek paraboly $y=x^2$, $x\in[-1,1]$.
16. $\varphi(x,y)=(x^2+y^2, x^2-y^2)$, γ je určena rovnicí $y=1-|1-x|$, $x\in[0,2]$.
17. $\varphi(x,y)=(x+y, x-y)$, γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, probíhaná proti směru hodinových ručiček.
18. $\varphi(x,y)=(2a-y,x)$, γ je oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.
19. $\varphi(x,y)=(y,x)$, γ je nějaká křivka z $(-1,2)$ do $(2,3)$. **20.** $\varphi(x,y)=(x,y)$, γ je nějaká křivka z $(0,1)$ do $(3,-4)$. **21.** $\varphi(x,y)=(x-y, y-x)$, γ je nějaká křivka z $(1,-1)$ do $(1,1)$. **22.** $\varphi(x,y)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, γ je nějaká křivka z $(1,0)$ do $(6,8)$, která neprochází počátkem. **23.** $\varphi(x,y,z)=(y^2-z^2, 2yz, -x^2)$, γ je křivka (t,t^2,t^3), $t\in[0,1]$. **24.** $\varphi(x,y,z)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$, γ neprochází počátkem, počáteční bod je vzdálen a od počátku a koncový b od počátku.

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $\frac12(x^2+y^2+c)$ na $\mathbb{R}^2$. **2.** $xy+c$ na $\mathbb{R}^2$. **3.** Není. **4.** $\frac13x^3+x^2y-xy^2-\frac13y^3+c$ na $\mathbb{R}^2$. **5.** Vektorové pole je definované v $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, a není gradientem žádné funkce se stejným definičním oborem. Avšak v polorovině $y>0$ nebo $y<0$ je gradientem funkce $\frac{1}{\sqrt8}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{y\sqrt8}+C$. Volbou konstant v horní a dolní polorovině lze dosáhnout, aby bylo gradientem i v bodech kladné nebo záporné poloosy x. **6.** $\frac{-2y^2}{(x+y)^2}+\log|x+y|+c$, v polorovinách $x+y>0$ a $x+y<0$. **7.** $e^x(y+e^x(x-y+1))+c$ na $\mathbb{R}^2$. **8.** $\frac{x^2+y^2+z^2+c}{2}$ na $\mathbb{R}^3$. **9.** $xz+\frac{y^2}{2}+c$ na $\mathbb{R}^3$. **10.** Není. **11.** Není. **12.** Není. **13.** a) 0, b) $\frac23$, c) 2. **14.** a)-c) 2. **15.** $-\frac{14}{15}$. **16.** $\frac43$. **17.** 0 (je to integrál gradientu přes uzavřenou křivku). **18.** $-2\pi a^2$. **19.** 8. **20.** 12. **21.** -2. **22.** 9 **23.** $-\frac{29}{35}$ **24.** $b-a$

VIII. SPOČTĚTE KŘIVKOVÝ INTEGRÁL $\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$, KDE

1. $f(x,y)=x^2+y^2$, $\gamma(t)=(4t-1, 3t+1)$, $t\in[-1,1]$. **2.** $f(x,y)=x$, $\gamma(t)=(t,t^2)$, $t\in[0,1]$.
3. $f(x,y)=x+y$, $\gamma(t)=(e^t+1, e^t-1)$, $t\in[0,\log 2]$. **4.** $f(x,y)=2x-y$, $\gamma(t)=(\sin t,\cos t)$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. **5.** $f(x,y)=xy$, $\gamma(t)=(3y, t^4)$, $t\in[0,1]$. **6.** $f(x,y,z)=xyz$, γ je úsečka z bodu $(1,-1,2)$ do bodu $(3,2,5)$. **7.** $f(x,y,z)=2x+9xy$, $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$.
8. $f(x,y,z)=xy$, $\gamma(t)=(4\cos t, 9\sin t, 7t)$, $t\in[0,\frac52\pi]$.
9. Určete polohu těžiště homogenního tenkého drátu půlkruhového tvaru $(x^2+y^2=a^2, y\ge 0)$.
10. Určete hmotnost a polohu těžiště homogenního tenkého drátu o husotě k, který má tvar spirály $(3\cos t, 3\sin t, t)$, $t\in[0,2\pi]$.
11. Drát tvaru čtvrtkružnice $x^2+y^2=a^2$ v prvním kvadrantu má v bodě (x,y) hustotu kxy. Určete jeho hmotnost a polohu těžiště.
12. Určete práci vykonanou silovým polem $\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}\cdot(x,y,z)$ při přemístění hmotného bodu a) z bodu $(0,4,0)$ do bodu $(0,4,3)$ po úsečce, b) z bodu $(0,0,1)$ do bodu $(3,4,0)$ nějak.
13. Určete práci, kterou vykoná silové pole při jednom (nebo více) oběhu částice po jednotkové kružnici proti směru hodinových ručiček, pokud pole má tvar a) konstantní, b) (x,y), c) $(-y,x)$, d) $\frac{1}{3x^2-2xy+3y^2}(y,-x)$.

Výsledky a návody. **1.** $\frac{380}{3}$ **2.** $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ **3.** $3\sqrt{2}$ **4.** 1 **5.** $\frac{49}{24}$ **6.** $7\sqrt{22}$ **7.** $\frac{1}{6}(14\sqrt{14}-1)$ **8.** $18\sqrt{65}(2\sqrt{2}-1)$ **9.** $(0,\frac{2}{\pi}a)$ **10.** hmotnost $2\pi k\sqrt{10}$, těžiště $(0,0,\pi)$ **11.** hmotnost $\frac{k}{3}a^4$, těžiště $(\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}a)$ **12.** a) $\frac{3}{5}k$, b) $\frac{4}{5}k$ **13.** a) 0, b) 0, c) 2π (při k obězích $2k\pi$), d) $\frac{\pi}{\sqrt{8}}$ (při k obězích $k\frac{\pi}{\sqrt{8}}$)

IX. GREENOVA VĚTA, PLOŠNÝ INTEGRÁL

1. Spočtěte $\int_\gamma \varphi$, kde γ je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$ a $\varphi(x,y) = ((x+y)^2, -x^y - y^2)$ a) přímo z definice křivkového integrálu; b) pomocí Greenovy věty.

Následující integrály $\int_\gamma \varphi$ spočtěte pomocí Greenovy věty

2. $\varphi(x,y) = (-x^2y, xy^2)$, γ je kružnice $x^2+y^2=a^2$. **3.** $\varphi(x,y) = (x+y, y-x)$, γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **4.** $\varphi(x,y) = (e^x(1-\cos y), -e^x(y-\sin y))$, γ je hranice oblasti $\{(x,y) \mid 0<x<\pi, 0<y<\sin x\}$. **5.** $\varphi(x,y) = (e^{y^2-x^2}\cos 2xy, e^{y^2-x^2}\sin 2xy)$, γ je kružnice $x^2+y^2=R^2$
6. Jak se liší $\int_{\gamma_1}\varphi$ a $\int_{\gamma_2}\varphi$, kde $\varphi(x,y) = ((x+y)^2, -(x-y)^2)$ a γ_1 je úsečka z $(1,1)$ do $(2,6)$, a γ_2 je úsek paraboly (jejíž osa je rovnoběžná s osou y) ohraničený týmiž dvěma body?

Pomocí Greenovy věty spočtěte obsahy obrazce ohraničeného křivkami

7. Elipsou $(a\cos t, b\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ **8.** $\gamma(t) = (a\cos^3 t, b\sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$ (astroida).
9. Parabolou $(x+y)^2 = ax$ a osou y $(a>0)$. **10.** $(\frac{x}{a})^n + \frac{y}{b})^n = 1$ $(a,b,n>0)$ v prvním kvadrantu a osami souřadnic

Spočtěte plošné integrály $\iint\limits_S f\,\mathrm{d}S$, pokud

11. $f(x,y,z) = x+y+z$, S je polosféra $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$. **12.** $f(x,y,z) = x^2+y^2$, S je hranice tělesa $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ **13.** $f(x,y,z) = |xyz|$, S je část plochy $z=x^2+y^2$ odříznutá rovinou $z=1$. **14.** $f(x,y,z) = z$, S ke plocha $(u\cos v, u\sin v, v)$, $u\in[0,a]$, $v\in[0,2\pi]$
15. $f(x,y,z) = z^2$, S je plocha $(r\cos\varphi\sin\alpha, r\sin\varphi\sin\alpha, r\cos\alpha)$, $r\in[0,a]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ je parametr. **16.** Spočtěte hmotnost tenkého plechu ve tvaru plochy $z=x^2+y^2$, $z\leq 1$, jehož hustota v bodě (x,y,z) je z. **17.** Spočtěte polohu těžiště polosféry.

X. PLOŠNÝ INTEGRÁL, STOKESOVA A GAUSSOVA VĚTA

Spočtěte plošný integrál $\iint_S \varphi$, pokud

1. $\varphi(x,y,z) = (x,y,z)$, S je a) vnější strana povrchu krychle $[0,1]^3$; b) vnější strana sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$. **2.** S je vnější strana elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, a) $\varphi(x,y,z) = (0,0,z)$; b) $\varphi(x,y,z) = (0,0,z^2)$; c) $\varphi(x,y,z) = (\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$. **3.** $\varphi(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, S je vnější strana kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq h$. **4.** $\varphi(x,y,z) = (y^2z, xz, x^2y)$, S je vnější strana plochy v prvním oktantu, která se skládá z ploch $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$ a úseků souřadných rovin.

Pomocí Stokesovy věty spočtěte křivkové integrály $\int_\gamma \varphi$, kde

5. $\varphi(x,y,z) = (y,z,x)$, γ je kružnice $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$ probíhaná proti směru hodinových ručiček, díváme-li se z kladné části osy x. **6.** $\varphi(x,y,z) = (x^2-yz, y^2-xz, z^2-xy)$, $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t)$, $t\in[0,2\pi]$. **7.** $\varphi(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$, $\gamma(t) = (a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t)$, $t\in[0,\pi]$. **8.** $\varphi(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)$, γ je křivka $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$, $z>0$ $(0<r<R)$ probíhaná tak, že menší z oblastí vytnutá na vnější straně sféry $x^2+y^2+z^2=2Rx$ je po levé straně. **9.** $\varphi(x,y,z) = (y^2z^2, x^2z^2, x^2y^2)$, $\gamma(t) = (a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t)$, $t\in[0,2\pi]$

Pomocí Gaussovy věty spočtěte $\iint_S \varphi$, kde

10. S a φ jsou jako v příkladech 1, 2. **11.** $\varphi(x,y,z) = (x-y+z, y-z+x, z-x+y)$, S je vnější strana plochy $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$. **12.** $\varphi(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$, S je vnější strana kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$, $0\leq z\leq h$.

1. Rozviňte funkci

$$f(x) = \left|x - \frac{\pi}{3}\right| + \sin^2 x$$

ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$ a určete její součet ve všech bodech, kde konverguje.

(20 bodů)

Řešení. Pišme $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kde $f_1(x) = |x - \frac{\pi}{3}|$ a $f_2(x) = \sin^2 x$. Zřejmě Fourierovy koeficienty funkce f jsou součtem Fourierových koeficientů funkcí f_1 a f_2, takže nejprve spočtěme Fourierovy koeficienty obou těchto funkcí zvlášť.

Nejprve si všímejme funkce f_2. Platí

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

což je trigonometrický polynom, a tedy je sám sobě Fourierovou řadou. Pro koeficienty funkce f_2 tedy platí:

$$a_0^2 = 1, \qquad a_2^2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_k^2 = 0 \text{ pro } k \neq 0, 2,$$
$$b_k^2 = 0, \text{ pro každé } k.$$

Pro výpočet koeficientů funkce f_1 položme $a = \frac{\pi}{3}$. To nám umožní spočítat koeficienty funkce $|x - a|$, což zahrne například i část řešení prvního příkladu druhé verze. Počítejme tedy:

$$\begin{aligned}
\pi a_k^1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |x - a| \cos kx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{a} (a - x) \cos kx \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\pi} (x - a) \cos kx \,\mathrm{d}x \\
&= a \cdot \left(\int_{-\pi}^{a} \cos kx \,\mathrm{d}x - \int_{a}^{\pi} \cos kx \,\mathrm{d}x \right) - \int_{-\pi}^{a} x \cos kx \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\pi} x \cos kx \,\mathrm{d}x \\
&= a \cdot \int_{-a}^{a} \cos kx \,\mathrm{d}x + 2 \cdot \int_{a}^{\pi} x \cos kx \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Nyní je třeba rozlišit případy $k = 0$ a $k > 0$.

$$\begin{aligned}
\pi a_0^1 &= a \cdot \int_{-a}^{a} 1 \,\mathrm{d}x + 2 \cdot \int_{a}^{\pi} x \,\mathrm{d}x = a \cdot 2a + 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{\pi} = 2a^2 + \pi^2 - a^2 = \pi^2 + a^2; \\
\pi a_k^1 &= a \cdot \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-a}^{a} + 2 \cdot \left[\frac{x \sin kx}{k}\right]_a^{\pi} - 2 \cdot \int_a^{\pi} \frac{\sin kx}{k} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2a}{k} \sin ka + 0 - \frac{2a}{k} \sin ka - 2 \cdot \left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_a^{\pi} = \frac{2}{k^2} \cdot \left((-1)^k - \cos ka\right), \text{ pro } k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Dále počítejme sinové koeficienty:

$$\begin{aligned}
\pi b_k^1 &= \int_{-\pi}^{\pi} |x-a| \sin kx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{a} (a-x)\sin kx \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\pi} (x-a)\sin kx \,\mathrm{d}x \\
&= a \cdot \left(\int_{-\pi}^{a} \sin kx \,\mathrm{d}x - \int_{a}^{\pi} \sin kx \,\mathrm{d}x \right) - \int_{-\pi}^{a} x \sin kx \,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\pi} x \sin kx \,\mathrm{d}x \\
&= -2a \cdot \int_{a}^{\pi} \sin kx \,\mathrm{d}x - \int_{-a}^{a} x \sin kx \,\mathrm{d}x = -2a \cdot \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_a^{\pi} - \left[-\frac{x\cos kx}{k} \right]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{\cos kx}{k} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2a}{k} \cdot \left((-1)^k - \cos ka \right) + \frac{2a}{k} \cos ka - \left[\frac{\sin kx}{k_2} \right]_{-a}^{a} = \frac{2a}{k} \cdot (-1)^k - \frac{2}{k^2} \sin ka, \text{ pro } k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

V našem případě ($a = \frac{\pi}{3}$), máme tedy:

$$a_0^1 = \frac{10}{9}\pi, \qquad a_k^1 = \frac{2}{k^2\pi} \cdot \left((-1)^k - \cos k\frac{\pi}{3} \right), \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$
$$b_k^1 = \frac{2}{3k} \cdot (-1)^k - \frac{2}{k^2\pi} \sin k\frac{\pi}{3}, \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$

Fourierova řada funkce f je tedy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\pi - \frac{3}{\pi}\cos x - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) \sin x + \left(\frac{3}{4\pi} - \frac{1}{2} \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) \sin 2x \\
+ \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2\pi} \cdot \left((-1)^k - \cos k\frac{\pi}{3} \right) \cos kx + \left(\frac{2}{3k} \cdot (-1)^k - \frac{2}{k^2\pi} \sin k\frac{\pi}{3} \right) \sin kx \right).
\end{aligned}$$

Protože funkce f je po částech hladká, její Fourierova řada konverguje ve všech bodech. Součet je pak roven $f(x)$ ve všech bodech intervalu $(-\pi, \pi)$ (protože f je tam navíc spojitá), v bodech $\pm\pi$ je roven π. Dále je pochopitelně 2π-periodický.

2. Určete souřadnice těžiště homogenního drátu, který má tvar obvodu trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(0,8)$ a $(6,0)$. (15 bodů)

Řešení. Souřadnice homogenního drátu ve tvaru rovinné křivky γ jsou $\left(\frac{\int_\gamma x \,\mathrm{d}s}{\int_\gamma 1 \,\mathrm{d}s}, \frac{\int_\gamma y \,\mathrm{d}s}{\int_\gamma 1 \,\mathrm{d}s} \right)$. Spočtěme obecnější úlohu: uvažujme homogenní drát ve tvaru obvodu trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(0,a)$, $(b,0)$, kde $a, b > 0$.

Označme obvod našeho trojúhelníka symbolem γ. $\int_\gamma 1 \,\mathrm{d}s$ je délka křivky γ, v našem případě tedy obvod trojúhelníka, tedy $a + b + \sqrt{a^2+b^2}$.

Zbylé dva integrály je třeba spočítat přímo. Obvod našeho trojúhelníka se skládá ze tří úseček, které můžeme parametrizovat třeba následovně:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (0, t), \quad t \in [0, a], \qquad (\text{úsečka } (0,0) \to (0,a)), \\
\gamma_2(t) &= (bt, a - at), \quad t \in [0, 1], \qquad (\text{úsečka } (0,a) \to (b,0)), \\
\gamma_3(t) &= (b - t, 0), \quad t \in [0, b], \qquad (\text{úsečka } (b,0) \to (0,0)).
\end{aligned}$$

Můžeme tedy počítat:

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\,\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_3} x\,\mathrm{d}s = \int_0^a 0\cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 bt\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^b (b-t)\cdot 1\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}b\sqrt{a^2+b^2} + \frac{1}{2}b^2;\\ \int_\gamma y\,\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_3} y\,\mathrm{d}s = \int_0^a t\cdot 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 a - at\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^b 0\cdot 1\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště jsou tedy

$$\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{2}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}})\right);$$

v našem případě je $a=8$, $b=6$, $\sqrt{a^2+b^2}=10$, a tedy souřadnice jsou $(2,3)$.

3. Spočtěte $\int_\gamma \varphi$, kde $\varphi(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a γ je hranice množiny

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

probíhaná tak, že tato množina bude po levé ruce. (Počítejte buď přímo nebo z Greenovy věty.)

(15 bodů)

Řešení. Označme M množinu ze zadání. Podle Greenovy věty platí

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi &= \iint_M \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \iint_M (2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} (2x-2y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^1 \left[2xy - y^2\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (2x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^1 = -\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Při přímém výpočtu křivkového integrálu by bylo třeba rozdělit křivku na čtyři části:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t,0), \quad t\in[-1,1], \qquad (\text{úsečka } (-1,0)\to(1,0)),\\ \gamma_2(t) &= (1,t), \quad t\in[0,1], \qquad (\text{úsečka } (1,0)\to(1,1)),\\ \gamma_3(t) &= (-t,t^2), \quad t\in[-1,1], \qquad (\text{část paraboly}),\\ \gamma_4(t) &= (-1,1-t), \quad t\in[0,1], \qquad (\text{úsečka } (-1,1)\to(-1,0)).\end{aligned}$$

Test číslo 2 – druhá verze

1. Rozviňte funkci
$$f(x) = \left|x + \frac{\pi}{3}\right| + \cos^2 x$$
ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$ a určete její součet ve všech bodech, kde konverguje.

(20 bodů)

Řešení. Pišme $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kde $f_1(x) = |x + \frac{\pi}{3}|$ a $f_2(x) = \cos^2 x$. Zřejmě Fourierovy koeficienty funkce f jsou součtem Fourierových koeficientů funkcí f_1 a f_2, takže nejprve spočtěme Fourierovy koeficienty obou těchto funkcí zvlášť.

Nejprve si všímejme funkce f_2. Platí
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$
což je trigonometrický polynom, a tedy je sám sobě Fourierovou řadou. Pro koeficienty funkce f_2 tedy platí:
$$a_0^2 = 1, \qquad a_2^2 = \frac{1}{2}, \qquad a_k^2 = 0 \text{ pro } k \neq 0, 2,$$
$$b_k^2 = 0, \text{ pro každé } k.$$

Pro výpočet koeficientů funkce f_1 položme $a = -\frac{\pi}{3}$ a využijme výpočtu z první verze (ten výpočet platí pro každé $a \in [-\pi, \pi]$, kde pouužíváme konvenci, že $\int_d^c g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^d g(x)\,\mathrm{d}x$, pokud $c < d$). Po dosazení tedy dostaneme:
$$a_0^1 = \frac{10}{9}\pi, \qquad a_k^1 = \frac{2}{k^2\pi} \cdot \left((-1)^k - \cos k\frac{\pi}{3}\right), \text{ pro } k = 1, 2, \ldots$$
$$b_k^1 = \frac{2}{3k} \cdot (-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2\pi}\sin k\frac{\pi}{3}, \text{ pro } k = 1, 2, \ldots$$

Fourierova řada funkce f je tedy
$$\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\pi - \frac{3}{\pi}\cos x + \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\sin x + \left(\frac{3}{4\pi} + \frac{1}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{3}\right)\sin 2x$$
$$+ \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2\pi} \cdot \left((-1)^k - \cos k\frac{\pi}{3}\right)\cos kx + \left(\frac{2}{3k} \cdot (-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2\pi}\sin k\frac{\pi}{3}\right)\sin kx\right).$$

Protože funkce f je po částech hladká, její Fourierova řada konverguje ve všech bodech. Součet je pak roven $f(x)$ ve všech bodech intervalu $(-\pi, \pi)$ (protože f je tam navíc spojitá), v bodech $\pm\pi$ je roven π. Dále je pochopitelně 2π-periodický.

2. Určete souřadnice těžiště homogenního drátu, který má tvar obvodu trojúhelníka s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 5)$ a $(12, 0)$. (15 bodů)

Řešení. Do vzorečku spočteného v první verzi dosadíme $a = 5$, $b = 12$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 13$, a těžiště vyjde $(5, \frac{3}{2})$.

3. Spočtěte $\int_\gamma \varphi$, kde $\varphi(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a γ je hranice množiny
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, x^2 < y < 2\}$$
probíhaná tak, že tato množina bude po levé ruce. (Počítejte buď přímo nebo z Greenovy věty.)

(15 bodů)

Řešení. Označme M množinu ze zadání. Podle Greenovy věty platí

$$\int_\gamma \varphi = \iint\limits_M \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \iint\limits_M (2x - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2} (2x-2y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[2xy - y^2\right]_{x^2}^{2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (4x - 4 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 4x - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = -\frac{38}{5}.$$

Při přímém výpočtu křivkového integrálu by bylo třeba rozdělit křivku na čtyři části:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, t^2), \quad t \in [-1, 1], && \text{(část paraboly)},\\
\gamma_2(t) &= (1, t), \quad t \in [1, 2], && \text{(úsečka } (1,1) \to (1,2)),\\
\gamma_3(t) &= (-t, 2), \quad t \in [-1, 1], && \text{(úsečka } (1,2) \to (-1,2)),\\
\gamma_4(t) &= (-1, 2-t), \quad t \in [0, 1], && \text{(úsečka } (-1,2) \to (-1,1)).
\end{aligned}$$