I. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int x^5 e^{x^3}\,dx$ **2.** $\int \arcsin^2 x\,dx$ **3.** $\int x \operatorname{arctg}^2 x\,dx$ **4.** $\int \frac{x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **5.** $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
6. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$ **7.** $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ **8.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **10.** $\int x \sin\sqrt{x}\,dx$ **11.** $\int \frac{dx}{x^3+1}$
12. $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$ **13.** $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+3}\,dx$ **14.** $\int \frac{dx}{x\log x \log\log x}$ **15.** $\int e^x \sin 2x\,dx$ **16.** $\int \frac{x^2-3}{x^2-4}\,dx$
17. $\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx$ **18.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

Výsledky a návody. **1.** $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ na $\mathbf{R}$ (substituce $y = x^3$ a pak per partes). **2.** $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$ na $(-1,1)$ (dvakrát per partes). **3.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ na $\mathbf{R}$ (nejprve per partes, druhý integrál vhodně rozdělit na dva). **4.** $\sqrt{1+x^2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) - x$ na $\mathbf{R}$ (per partes). **5.** Substituce $x = \sin t$ nebo $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **6.** Substituce $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ nebo $x = \frac{2}{\cos t}$. **7.** Substituce $x = \operatorname{tg} t$ nebo Eulerova substituce $y = \sqrt{x^2+1} - x$. **8.** Substituce $x = \operatorname{tg} t$ nebo Eulerova substituce $y = \sqrt{x^2+1} - x$. **9.** Substituce $x = \frac{1}{\cos t}$ nebo $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. **10.** Substituce $x = y^2$ a per partes. **11.** Rozložit na parciální zlomky. **12.** Rozložit na parciální zlomky. **13.** Substituce $y = e^x$. **14.** Substituce $y = \log\log x$. **15.** Per partes (dvakrát). **16.** Rozložit na parciální zlomky. **17.** Substituce $y = \log x$. **18.** Substituce $y = \cos x$.

II. Rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y' = y$ procházející bodem $(0,1)$.
2. Pro diferenciální rovnici $yy' + xy^2 = x$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1,0)$.
3. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, \frac{1}{2})$,
(c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(0,1)$.
5. Nalezněte řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2) = -\frac{3}{5}$ a $y(0) = 1$.
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$.
7. Řešte rovnici $y'(2-e^x) = -3e^x \tan y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A?$$

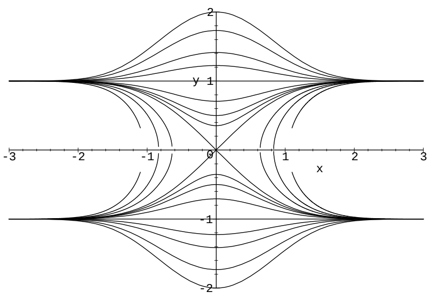
Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

8. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ **9.** $xy' + y = y^2$ **10.** $y' = 10^{x+y}$ **11.** $e^{-y}(1+y') = 1$
12. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, $x \in (-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **13.** $y'\sin x = y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
14. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$ **15.** $y - xy' = b(1+x^2y')$, $y(1) = 1$ $(b \in \mathbb{R})$

Výsledky a návody. **1.** $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na $\mathbb{R}$, $y_0^2 = -1$ na $\mathbb{R}$; $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$, $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$; $y_c^1(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^2(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^3(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1$; $y_c^1(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ a $y_c^2(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ pro $c < 0$ a $c \in (0,1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1 = 0$ na $(0,+\infty)$, $y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = 1,2,3$ definována na intervalech: pro $c > 0$ y_c^1 na $(-\infty, 0)$, y_c^2 na $(0, \frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c}, +\infty)$; pro $c < 0$ y_c^1 na $(-\infty, \frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c}, 0)$, y_c^3 na $(0, +\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c > 0$, y_c^3 pro $c < 0$. **4.** (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$, $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na $\mathbb{R}$; $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$; $y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$;

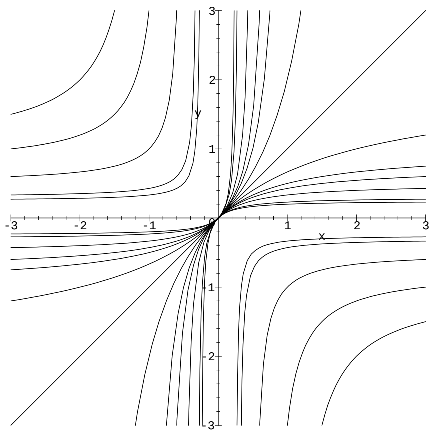
$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases}$ pro $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$. **6.** $y_c = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 1$; $y_c^k = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in (-1, 1]$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1)$ nebo $\sin x = -1\}$. **7.** $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x-2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x-2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. **8.** $y_c = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$. **9.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **10.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$. **11.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$, $x \in (-1, 1)$; $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$, $x \in (-1, 1)$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$, pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$, $x \in (-1, 1)$. **13.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **14.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **15.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b < -1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

2.



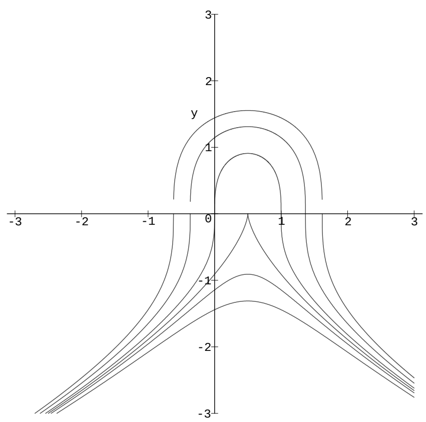
2
y 1
-3 -2 -1 0 1 2 3
x
-1
-2

3.



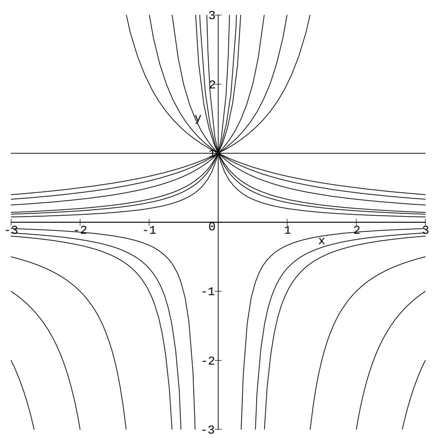
3
2
y
1
-3 -2 -1 0 1 2 3
x
-1
-2
-3

8.



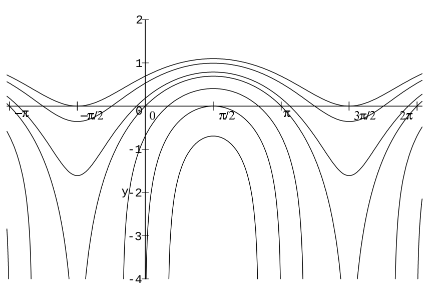
3
2
y
1
-3 -2 -1 0 1 2 3
-1
-2
-3

9.



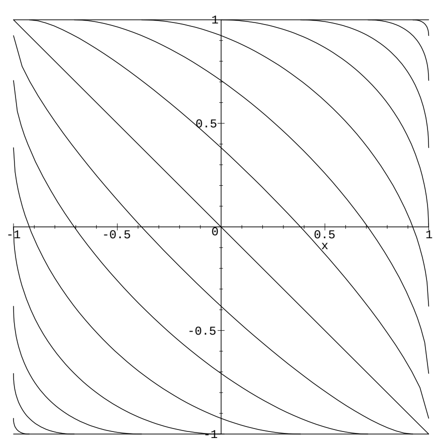
3
2
y
1
-3 -2 -1 0 1 2 3
x
-1
-2
-3

6.



2
1
−π −π/2 0 0 π/2 π 3π/2 2π
-1
y -2
-3
-4

12.



1
0.5
-1 -0.5 0 0.5 1
x
-0.5
-1

III. Některé typy diferenciálních rovnic, které lze převést na rovnice se separovanými proměnnými

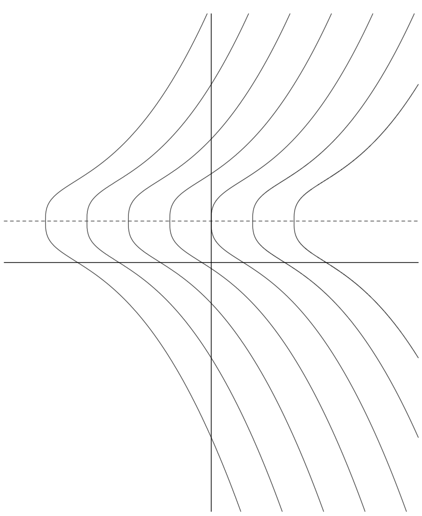
1. $y' = \cos(x-y)$ **2.** $y' = \sin(x+y)$ **3.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **4.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **5.** $xy' = y \log \frac{y}{x}$
6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **7.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$ **8.** $xy' - y = \sqrt{y^2 + x^2}$ **9.** $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ **10.** $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$
11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ **12.** $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$

Výsledky a návody. **1.** Substituce $y = x - z$; řešení $y(x) = x - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$); $y(x) = x - 2\operatorname{arccotg}(-x-c) - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$). **2.** Substituce $y = z - x$; řešení $y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $y(x) = \begin{cases} -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2k\pi & x \in (-\infty, c) \\ -x - \pi + 2k\pi & x = -c \\ -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) - \pi + 2k\pi & x \in (-c, \infty) \end{cases}$ ($c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). V příkladech **3.-8.** použijte substituci $y = xz$. **3.** $y(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = x\frac{2+kx^3}{1-kx^3}$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \infty)$ pro $k > 0$ a na intervalech $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $k < 0$. **4.** $y(x) = 2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞); $y(x) = -2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞). **5.** $y(x) = ex$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y(x) = xe^{1+kx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **6.** $y(x) = -x\log(-\log|x| - c)$, $x \in (-e^{-c}, 0)$ nebo $x \in (0, e^{-c})$ ($c \in \mathbf{R}$). **7.** $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = kx^2$, $x \in (-\infty, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **8.** $y(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2k}$, $x \in (0, \infty)$ ($k > 0$); $y(x) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ ($k > 0$). **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

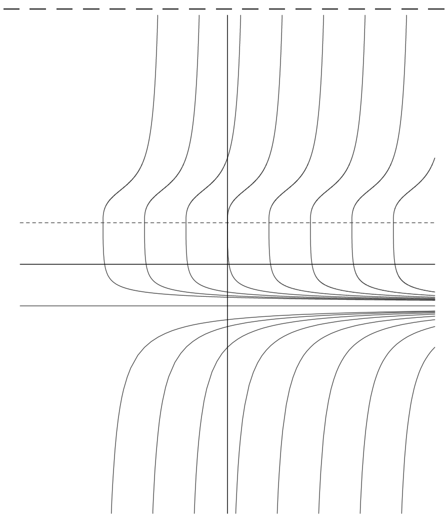
IV. Načrtněte graf řešení, aniž explicitně vyřešíte rovnici

1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ **2.** $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ **3.** $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ **4.** $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
5. $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$ **6.** $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ **7.** $y' = \sqrt{|\cos y|}$ **8.** $y' = \sin^2 y$
9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$

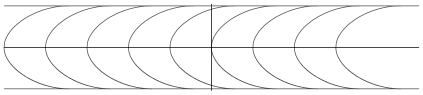
1.



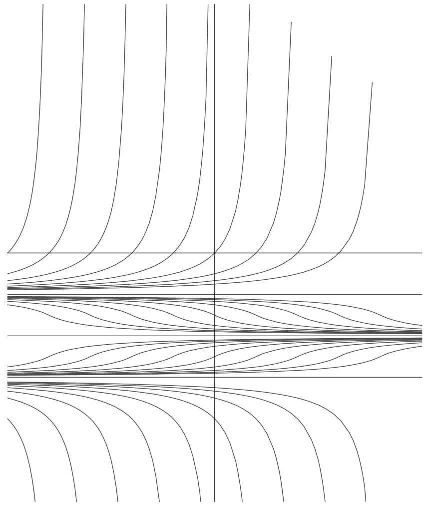
2.



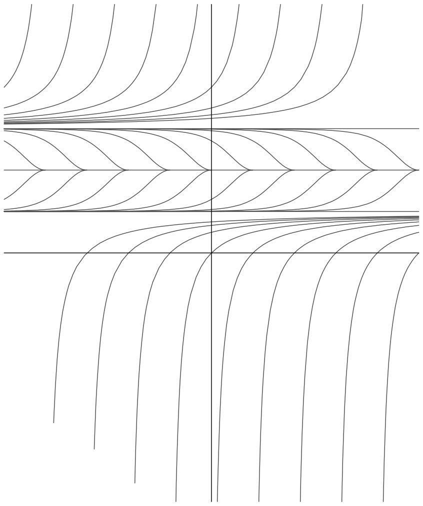
3.



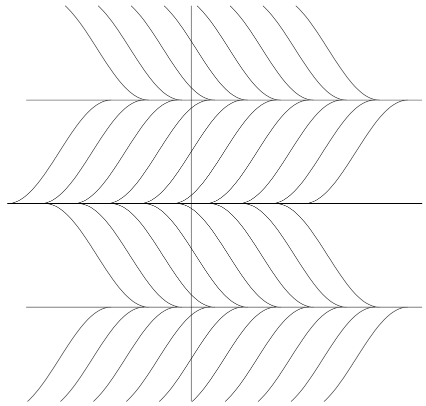
4.



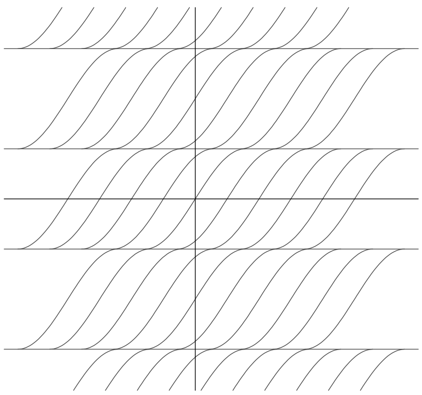
5.



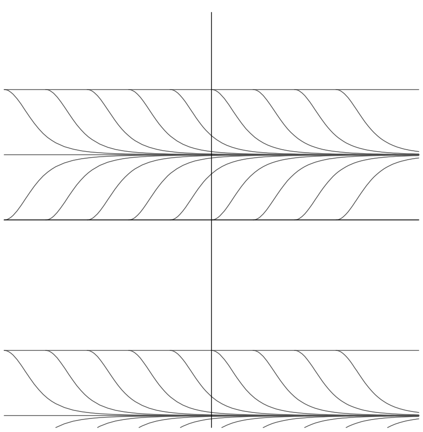
6.



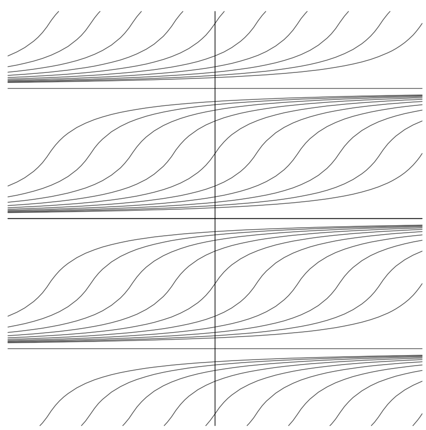
7.



8.



9.



V. Lineární rovnice prvního řádu

1. $y'=\frac{2y}{x}$ **2.** $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$ **3.** $y'=\frac{y}{x}-1$ **4.** $y'x=y+x^2$ **5.** $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$ **7.** $xy'+y=\log x+1$ **8.** $(a^2+x^2)y'+xy=1$ $(a\in\mathbf{R})$
9. $(2x+1)y'+y=x$ **10.** $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}x$ **11.** $y'+y\cos x=\sin 2x$ **12.** $y'+\frac{x+1}{x}y=3xe^{-x}$

Výsledky a návody. **1.** $y=cx^2$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. **2.** $y=x^4+cx^2$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. **3.** $y=-x\log|x|+cx$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. **4.** $y=x^2+cx$, $x\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$. **5.** $y=-\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}+\frac{c}{2x^2}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. **6.** $y=-\frac{\cos 2x}{2\cos x}+\frac{c}{\cos x}$, $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$, $c\in\mathbf{R}$. Pro $c=-1/2$ lze lepit, tím dostaneme řešení $y(x)=-\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. **7.** $y=\log x+\frac{c}{x}$, $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. **8.** Pro $a=0$: $y=\frac{\log|x|}{x}+\frac{c}{x}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$; pro $a\neq 0$: $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{1}{|a|}\log\frac{1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}+c\right)$, $x\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$. **9.** $y=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ nebo $x\in(-\frac{1}{2},\infty)$, $c\in\mathbf{R}$. Pro $c=0$ lze lepit, dostaneme řešení $y(x)=\frac{1}{3}(x-1)$, $x\in\mathbf{R}$. **10.** $y=1+\frac{1}{2\cos x}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{c}{\cos x}$, $x\in(k\frac{\pi}{2},(k+1)\frac{\pi}{2})$, $k\in\mathbf{Z}$, $c\in\mathbf{R}$. **11.** $y=2(\sin x-1)+ce^{-\sin x}$, $x\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$. **12.** $y=x^2e^{-x}+\frac{c}{x}e^{-x}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,\infty)$, $c\in\mathbf{R}$.

Exaktní rovnice a Bernoulliovy rovnice – metody řešení

Uvažujme rovnici tvaru

$$(*)\qquad y'f(x,y)+g(x,y)=0.$$

Jestliže existuje funkce F třídy C^1 taková, že $\frac{\partial F}{\partial y}=f$ a $\frac{\partial F}{\partial x}=g$, pak řešení rovnice (*) splňují $F(x,y(x))=c$ pro nějakou konstantu $c\in\mathbf{R}$. (Takovým rovnicím říkáme **exaktní**.)

Větička. Nechť f a g jsou dvě funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřeném obdélníku $(a,b)\times(c,d)$. Pak existuje funkce F na $(a,b)\times(c,d)$, pro kterou $f=\frac{\partial F}{\partial y}$ a $g=\frac{\partial F}{\partial x}$, právě když $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}$ na $(a,b)\times(c,d)$.

Není-li rovnice (*) exaktní, lze ji převést na exaktní vynásobením jistou funkcí (tzv. **integračním faktorem**). V některých speciálních případech můžeme tento integrační faktor jednoduše nalézt:

- Pokud $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$ nezávisí na y, pak pro rovnici (*) existuje integrační faktor, který je funkcí x.
- Pokud $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{g(x,y)}$ nezávisí na x, pak existuje integrační faktor, který je funkcí y.

Bernoulliovy rovnice jsou rovnice tvaru

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

kde p,q jsou funkce spojité na zadaném intervalu a $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

Metody řešení:

(1) Hledáme řešení ve tvaru $y(x)=z(x)^{1/(1-\alpha)}$, kde $z(x)$ je nová neznámá funkce. Tím dostaneme lineární rovnici prvního řádu.

(2) Rovnici vydělíme y^{α} a pak vynásobíme integračním faktorem $e^{(1-\alpha)P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p.

VI. Exaktní rovnice, Bernoulliho rovnice

1. $2xyy'+y^2=0$ **2.** $(x+2y)y'+y+3x^2=0$ **3.** $3xy^2y'+2x+y^3=0$
4. $4x^3e^{x+y}+x^4e^{x+y}+2x+(x^4e^{x+y}+2y)y'=0$, $y(0)=1$.
5. $2x\sin y+y^3e^x+(x^2\cos y+3y^2e^x)y'=0$ **6.** $\frac{1}{2}y^2+2ye^x+(y+e^x)y'=0$
7. $1+(1+xy)e^{xy}+(1+x^2e^{xy})y'=0$ **8.** $2x\cos y+3x^2y+(x^3-x^2\sin y-y)y'=0$, $y(0)=2$
9. $3x^2+4xy+(2y+2x^2)y'=0$, $y(0)=1$ **10.** $3xy+y^2+(x^2+xy)y'=0$, $y(2)=1$
11. $ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x+(xe^{xy}\cos 2x-3)y'=0$, $y(0)=0$
12. $xy'+y=y^2\log x$ **13.** $y'+2xy=2x^3y^3$ **14.** $y'+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=0$, $y(1)=\frac{1}{2}$. **15.** $3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$
16. $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ **17.** $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$

VÝSLEDKY A NÁVODY. (Výsledky jsou uvedeny bez definičních oborů – v některých případech je tvar definičního oboru zřejmý, jindy nelze jednoduše explicitně vyjádřit.) **1.** $xy^2 = c$ **2.** $xy + y^2 + x^3 = c$ **3.** $xy^3 + x^2 = c$ **4.** $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$ **5.** $x^2 \sin y + y^3 e^x = c$ **6.** $\frac{1}{2} y^2 e^x + y e^{2x} = c$ (integrační faktor e^x) **7.** $x + y + e^{xy} = c$ **8.** $x^3 y + x^2 \cos y - \frac{1}{2} y^2 = 2$ **9.** $x^3 + y^2 + 2x^2 y^2 = 1$ **10.** $x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 = 10$ (integrační faktor x) **11.** $e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = 1$ **12.** $y(x) = \frac{1}{1+\log x + cx}$ **13.** $y^2 = -\frac{1}{x^2 - \frac{1}{2} + 2ce^{-x^2}}$ **14.** $y(x) = \frac{1}{-1+3e^{1-\frac{1}{x}}}$, $x \in (\frac{1}{1+\log 3}, +\infty)$ **15.** $y^3 = x^3 + cx^2$ **16.** $y^4 = \sqrt{x+1} + c\sqrt{|x|}$ **17.** $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x} + 2e^{2x} \int \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$

==

VII. LINEÁRNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ **2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ **3.** $y'' - 6y' + 13y = 0$ **4.** $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$ **5.** $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ **6.** $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ **7.** $y''' + y'' = x$ **8.** $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$ **9.** $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ **10.** $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$ **11.** $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **12.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + x + 1}$ **13.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$ **14.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$ **15.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

- -

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** $y = ce^{-2x} + dxe^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **2.** $y = ce^x + de^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **3.** $y = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. **4.** $y = a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x + cx\cos\sqrt{3}x + dx\sin\sqrt{3}x$, $x \in \mathbf{R}$. **5.** $y = \frac{1}{5}e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$. **6.** $y = \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + e^x(c\cos x + d\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$. **7.** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **8.** $y = (\frac{x}{6} - \frac{5}{36})e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **9.** $y = -\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** $y = \frac{3}{5}e^x - x\sin\frac{x}{2} + a + b\cos\frac{x}{2} + c\sin\frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. **11.** $y = e^x(1 + e^{2x})\operatorname{arctg} e^x + ce^x + de^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **12.** $y = e^x \cdot \left(c + dx - \frac{1}{2}\log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbf{R}$. **13.** $y = -\cos x \log\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c\cos x + d\sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. **14.** $y = e^x \cdot (c + dx + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2})$, $x \in (-2, 2)$. **15.** $y = -e^x \arcsin e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\log\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + ce^x + de^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

==

EULEROVY ROVNICE – METODY ŘEŠENÍ

Eulerovy rovnice jsou rovnice tvaru $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = f(x)$, kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ jsou konstanty a f je funkce spojitá na zadaném intervalu (α, β). Je-li funkce f nulová, mluvíme o homogenní rovnici.

Postup řešení:

(1) Řešíme zvlášť na intervalu $(\alpha, \beta) \cap (0, +\infty)$ a na $(\alpha, \beta) \cap (-\infty, 0)$. Nakonec si rozmyslíme, kdy lze řešení nalepit v 0.

(2) Jde o lineární rovnici. Je tedy možné řešit nejprve homogenní rovnici a pak hledat partikulární řešení. Množina řešení homogenní rovnice (na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$) je vektorový prostor dimenze n.

(3) Pro řešení homogenní rovnice (tj. pro hledání fundamentálního systému) na intervalu $(0, +\infty)$ jsou dva možné postupy:

  (a) Provedeme substituci „$x = e^t$“, tj. zavedeme novou neznámou funkci $z(t) = y(e^t)$ (hledáme řešení ve tvaru $y(x) = z(\log x)$). Tím dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty pro neznámou funkci z, kterou umíme řešit.

  (b) Hledáme řešení tvaru $y(x) = x^\alpha$. Dosadíme-li toto do rovnice, dostaneme rovnici $P(\alpha) = 0$, kde P je polynom stupně n. Najdeme kořeny. Fundamentální systém bude tvořen funkcemi $h_i(\log x)$, kde h_i jsou prvky fundamentálního systému lineární rovnice s konstantními koeficienty s charakteristickým polynomem P.

(4) Pro řešení homogenní rovnice na $(-\infty, 0)$ využijeme toho, že funkce y je řešením homogenní rovnice na $(0, +\infty)$, právě když funkce $\tilde{y}(x) = y(-x)$ je řešením homogenní rovnice na $(-\infty, 0)$.

(5) Pro hledání partikulárního řešení lze použít:

  (a) Metodu variace konstant – stejně jako u lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

  (b) Analogii metody speciální pravé strany – analogii Věty XVI.5.

  (c) Používáme-li výše substituci $x = e^t$, lze ji použít na celou, tedy nehomogenní rovnici, a pak hledáme partikulární řešení pro příslušnou lineární rovnici s konstantními koeficienty.

VIII. Eulerovy rovnice

1. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ **2.** $x^2y'' + xy' + y = x$ **3.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$ **5.** $x^3y''' + xy' - y = 0$ **6.** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 6xy' + 12y = x^2$

Výsledky a návody. **1.** $y(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^7, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ a_2x^3 + b_2x^7, & x > 0, \end{cases}$ $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$. **2.** $y(x) = \frac{1}{2}x + a\cos\log|x| + b\sin\log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $[a, b] \in \mathbf{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$; $y(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in \mathbf{R}$. **3.** $y(x) = x\log^2|x| + ax + bx\log|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbf{R}$. **4.** $y(x) = x^3 + x + x\log|x| + ax + bx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbf{R}$. **5.** $y(x) = ax + bx\log|x| + cx\log^2|x|$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbf{R}$; $y(x) = ax$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. **6.** $y(x) = \frac{1}{4}x^2\log|x| + ax^2 + \frac{b}{x^2} + c|x|^{\sqrt{3}} + \frac{d}{|x|^{\sqrt{3}}}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty – metody řešení

Uvažujme soustavu $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$, kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ je spojitá vektorová funkce a $\boldsymbol{y}$ je neznámá vektorová funkce.

(1) Jde o lineární rovnici. Můžeme řešit zvlášť homogenní rovnici (tj. $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$) a pak hledat partikulární řešení. Řešení homogenní rovnice jsou definována na $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový prostor dimenze n.

(2) Řešení homogenní rovnice:

(i) Napíšeme si matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a tu řádkovými úpravami převedeme na horní trojúhelníkovou matici. Řádkové úpravy jsou:

(a) prohození dvou řádků;
(b) vynásobení řádku nenulovou konstantou;
(c) přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

(ii) Vzniklou matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic následovně: Má-li matice tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

pak nová soustava bude mít tvar

$$\begin{array}{lllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + \quad \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0 \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + \quad \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0 \\ & & \quad \vdots & & \\ & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0, \end{array}$$

kde symbolem $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y$ rozumíme funkci $a_ky^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y$, pokud $P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

(iii) Novou soustavu vyřešíme odzadu (tedy od n-té rovnice po první). Přitom používáme metodu řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty – hledání fundamentálního systému a řešení rovnic se speciální pravou stranou.

(3) Pro hledání partikulárního řešení máme následující možnosti:

- Variace konstant: Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice, tj. její sloupce jsou prvky fundamentálního systému řešení homogenní rovnice. Pak partikulární řešení najdeme ve tvaru $\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t)$ pro vhodnou vektorovou funkci $\boldsymbol{c}$.
- Je-li vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ dostatečně hladká (např. třídy C^∞), lze použít eliminaci pro nehomogenní rovnici: K matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}|\boldsymbol{b}(t))$ typu $n \times (n+1)$. Řádkovými úpravami dojdeme k matici tvaru
$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(x,\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(x,\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(x,\lambda) \end{pmatrix}.$$
Tuto matici přepíšeme opět jako soustavu diferenciálních rovnic. Levé strany budou mít stejný tvar jako v případě homogenní soustavy. Funkce $f_j(x,\lambda)$ v posledním sloupci upravené matice mají tvar
$$f_j(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i g_{ji}(x),$$
kde funkce g_{ji} jsou nějaké funkce třídy C^∞. Nová soustava pak bude mít tvar
$$\begin{array}{rrrrl} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n = \tilde{f}_1(x) \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n = \tilde{f}_2(x) \\ & & & \vdots & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n = \tilde{f}_n(x), \end{array}$$
kde $\tilde{f}_j(x) = \sum_{i=1}^{k} g_{ji}{}^{(i)}(x)$.

IX. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' = -z + y + e^x$, $y' = z - y + e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1,\ v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1,\ v(0) = 1,\ w(0) = 0)$

Řešte soustavy $y' = Ay + b(x)$, kde

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. **11.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. **12.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **15.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** $z = ae^x + be^{-3x}$, $y = -ae^x + 3be^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c-d)e^{-6x}\sin x + de^{-6x}\cos x$, $y = ce^{-6x}\cos x + (c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + 2ae^{-4x} + be^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + ae^{-4x} - be^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = ae^{-x} + be^{2x} + ce^{-2x}$, $v = ae^{-x} + be^{2x} - ce^{-2x}$, $w = -ae^{-x} + 2be^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = ae^{2x} + be^{-x}$, $v = ae^{2x} + ce^{-x}$, $w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$ **10.** $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx+c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx+b+2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx+a+c))$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = (e^{-x}(-1+6c+6bx), e^{-x}(15a+2bx+b+2c), e^{-x}(a+2bx+2c))$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a+9c)e^x, 3be^{-x} + (6a+3c)e^x)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. **13.** $y = (-\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500}\cos x + \frac{89}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (ax^2+bx+c), -\frac{43}{500}\cos x - \frac{49}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. **14.** $y = ((a+3b)e^x \sin x + (3a-b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x})$,$a,b,c \in \mathbb{R}$. **15.** $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. **16.** $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. **17.** $y = (cx+d, (3c-\frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. **18.** $y = (e^x(a\cos x + b\sin x) + c\cos x + d\sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + c\cos x + d\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x) + (c-d)\cos x + (c+d)\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x))$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

X. Lineární rovnice - snižování řádu, variace konstant

1. $y'' - \frac{xy'}{x^2+1} + \frac{y}{x^2+1} = 0$ **2.** $y'' - x^2y' + (x^2-1)y = 0$ **3.** $y'' - \frac{2y}{x^2} = 5$ **4.** $y'' - \frac{1+x^2}{x}y' + 2y = 0$ **5.** $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = x^3$ **6.** $y'' + \frac{1-x^2}{x}y' + \frac{y}{\log x} = 0$ **7.** $y'' + \frac{y}{x^2 \log x} = 0$

- -

Výsledky a návody. **1.** FS tvoří $y_1 = x$ (lze uhodnout) a $y_2 = x\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ (na $\mathbb{R}$). **2.** FS tvoří $y_1 = e^x$ (lze uhodnout) a $y_2 = e^x \int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)}\,\mathrm{d}t$ (na $\mathbb{R}$). **3.** FS tvoří $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x}$ (uhodnout lze kterékoliv z těchto dvou řešení), partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{5}{3}x^2 \log|x|$ (z variace konstant vyjde $\frac{5}{3}x^2 \log|x| - \frac{5}{9}x^2$, přitom $-\frac{5}{9}x^2$ je řešením homogenní rovnice). Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **4.** FS tvoří $y_1 = x^2$ (lze uhodnout) a $y_2 = x^2 \int_1^x \frac{1}{t^3}e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ (na $(0, +\infty)$; na $(-\infty, 0)$ ve vzorci pro y_2 bude $\int_{-1}^x$). **5.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = x^5$, partikulární řešení je např. $y_0 = \frac{1}{4}x^5 \log|x|$. Vše na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$. **6.** FS tvoří $y_1 \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \log x \int_2^x \frac{e^{t^2/2}}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$). **7.** FS tvoří $y_1 = \log x$ (lze uhodnout) a $y_2 = \int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1, +\infty)$; na $(0, 1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$).