I. Komplexní čísla, komplexní rovina

1. Najděte reálnou a imaginární část komplexních čísel

a) $\frac{1}{i}$, b) $\frac{1-i}{1+i}$, c) $\frac{2}{1-5i}$, d) $(1+i\sqrt{2})^3$, e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; f) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

2. Zapište následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru: a) $3i$, b) -5, c) $1+i$, d) $-3-3i$, e) $1+i^{99}$, f) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $2+5i$, h) $2-5i$, i) $-2+5i$, j) $-2-5i$, k) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

3. Najděte „všechny hodnoty komplexních odmocnin“ (tj. všechna komplexní řešení rovnice $z^n = a$, je-li v zadání uvedeno $\sqrt[n]{a}$)

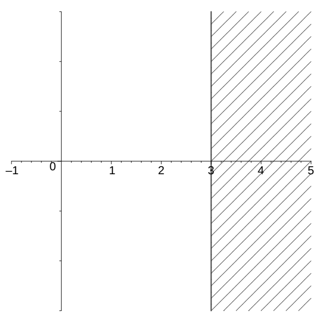
a) $\sqrt[3]{1}$, b) $\sqrt[3]{i}$, c) $\sqrt[4]{-1}$, d) $\sqrt{1-i}$.

4. Načrtněte množinu všech bodů v komplexní rovině splňujících vztah(y):

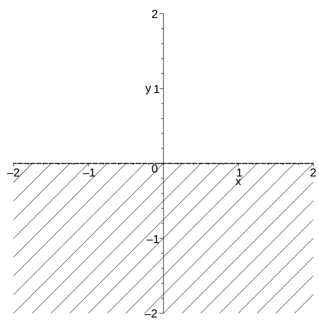
a) $\operatorname{Re} z \geq 3$, b) $\operatorname{Im} z < 0$, c) $|\operatorname{Re} z| < 2$, d) $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, e) $|z-1| \leq 1$, f) $1 < |z| < 2$, g) $|z-1-i| = |z+1|$, h) $|z-2|+|z+2| = 5$, i) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

Výsledky a návody. **1.** Výsledky ve tvaru $\operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z$: a) 0; -1, b) 0; -1, c) $\frac{1}{13}$; $\frac{5}{13}$, d) -5; $\sqrt{2}$, e) 0; 1, f) 2; 0. **2.** a) $3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$, b) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$, c) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, d) $3\sqrt{2}(\cos(-\frac{3}{4}\pi)+i\sin(-\frac{3}{4}\pi))$, e) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, f) $1(\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi))$, g) $\sqrt{29}(\cos\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+i\sin\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}})$, h) $\sqrt{29}(\cos\arcsin\frac{-5}{\sqrt{29}}+i\sin\arcsin\frac{-5}{\sqrt{29}})$, i) $\sqrt{29}(\cos\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}}+i\sin\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}})$, j) $\sqrt{29}(\cos(-\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}})+i\sin(-\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}}))$, k) $1(\cos(\frac{6}{7}\pi)+i\sin(\frac{6}{7}\pi))$. **3.** a) 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) i, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{8})+i\sin(-\frac{\pi}{8}))$, $\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{7}{8}\pi)+i\sin(\frac{7}{8}\pi))$; po úpravě $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

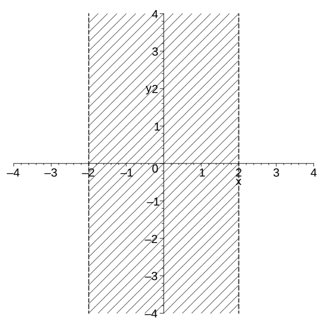
4. a)



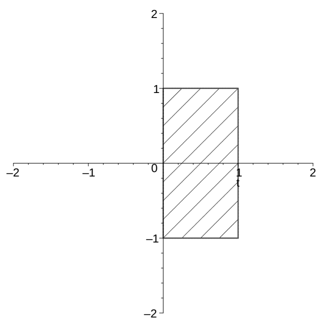
b)



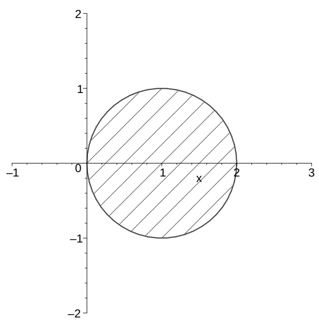
c)



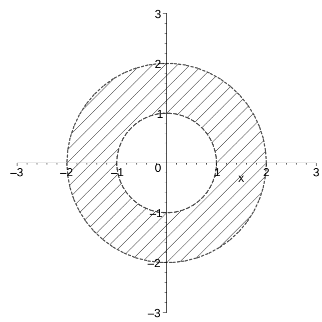
d)



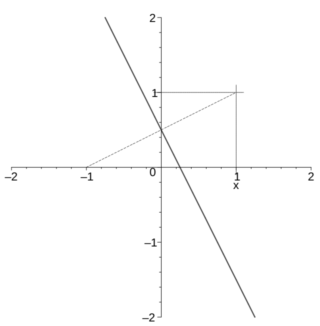
e)



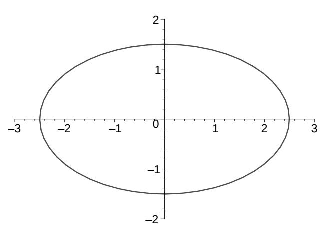
f)



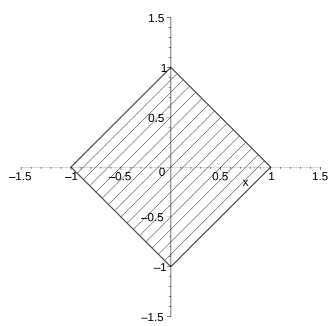
g)



h)



i)



II. Funkce komplexní proměnné

1. Které z následujících funkcí lze spojitě dodefinovat v bodě 0?
a) $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, b) $\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z}$, c) $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z}$, d) $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z^2}$, e) $\frac{z}{|z|}$, f) $\frac{|z| \operatorname{Im} z}{z}$, g) $\frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{z}$

2. V kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?
a) $\bar{z}$, b) $|z|$, c) $|z|^2$, d) $|(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2| + 2i|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|$, e) $|z|^2 + i\operatorname{Re}(z^2)$, f) $|z|^2 + i\operatorname{Im}(z^2)$

3. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí:
a) $\sin(2+i)$, b) $\cos(2i)$, c) $\operatorname{tg}(2-i)$, d) $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - i\ln 3)$, e) $\operatorname{tgh}(2+i)$, f) $\operatorname{cotgh}(\ln 3 + i\frac{\pi}{4})$

4. Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$:
a) $\sin z + \cos z = 10$, b) $\sin z - \cos z = i$, c) $\cosh z - \sinh z = 1$, d) $\cosh z - \sinh z = 2i$

5. Dokažte, že funkce $z \mapsto \exp(1/z)$ zobrazuje každé prstencové okolí bodu 0 na množinu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. Nechť f je holomorfní na oblasti Ω. Dokažte (pomocí Cauchy-Riemannových podmínek), že f je konstantní na Ω, jestliže platí: a) f je reálná na Ω; b) $\overline{f}$ je také holomorfní na Ω; c) existují $a, b \in \mathbb{R}$, aspoň jedno z nich nenulové, že funkce $a\operatorname{Re} f + b\operatorname{Im} f$ je konstantní na Ω; d) Co když v úloze c) připustíme $a, b \in \mathbb{C}$?

– –

Výsledky a návody. **1.** a),d),e) NE; b),c),f),g) ANO, a to hodnotou 0. **2.** a),b) v žádném bodě; c) v bodě 0; d) v bodě 0 a dále v bodech z, pro které platí $0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 0$, $0 < -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ nebo $\operatorname{Im} z < -\operatorname{Re} z < 0$; e) v bodech přímky $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$; f) v bodech reálné osy. **3.** Výsledky ve tvaru $\operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z$: a) $\sin 2 \cdot \cosh 1$; $\cos 2 \cdot \sinh 1$, b) $\cosh 2$; 0, c) $\frac{\sin 2 \cdot \cos 2}{\cos^2 2 + \sinh^2 1}$; $\frac{-\sinh 1 \cdot \cosh 1}{\cos^2 2 + \sinh^2 1}$, d) $\frac{9}{41}$; $\frac{40}{41}$, e) $\frac{\sinh 2 \cdot \cosh 2}{\sinh^2 2 + \cos^2 1}$; $\frac{\sin 1 \cdot \cos 1}{\sinh^2 2 + \cos^2 1}$, f) $\frac{40}{41}$; $\frac{-9}{41}$. **4.** a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi + i\ln(5\sqrt{2}+7)$, $\frac{\pi}{4} + 2k\pi + i\ln(5\sqrt{2}-7)$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) - i\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, $(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi) - i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $-\ln 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** Dokažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tvoří všechna řešení rovnice $\exp(1/z) = w$ posloupnost s limitou 0. **6.** a) Dokažte, že $f' = 0$ na Ω. b) Využijte a) nebo přímo dokažte, že $f' = 0$ na Ω. c) Pomocí řešení soustavy lineárních rovnic dokažte, že $f' = 0$ na Ω. d) Výsledek bude stejný, lze rozdělit na reálnou a imaginární část.

==

III. Křivky a křivkový integrál

1. Načrtněte obrazy následujících křivek a spočtěte jejich délku:
a) $\varphi(t) = t + it^2$, $t \in [0, 10]$; b) $\varphi(t) = i\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$; c) $\varphi(t) = 1 + i\cos^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$;
d) $\varphi(t) = 2\sin t - i\cos t$, $t \in [0, 4\pi]$; e) $\varphi(t) = t(\cos t + i\sin t)$, $t \in [0, 10\pi]$.

2. Spočtěte $\int_\varphi f$, kde:
a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, φ je orientovaná úsečka $[0, 1+i]$;
b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, φ je kladně orientovaná polokružnice $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$;
c) $f(z) = |z|$, φ je orientovaná úsečka $[0, 2-i]$;
d) $f(z) = |z|$, φ je kladně orientovaná polokružnice $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$;
e) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, φ je kladně orientovaný obvod horního polomezikruží mezi kružnicemi $|z| = 1$ a $|z| = 2$;
f) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, φ je jako v e).

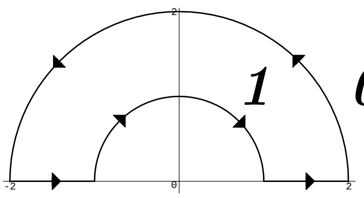
3. Určete na jaké největší množině jsou holomorfní funkce dané vzorcem
a) $f(z) = \int_0^1 \frac{\cos tz}{z+t}\, \mathrm{d}t$, b) $f(z) = \int_\varphi \frac{\cos w}{e^w - z}\, \mathrm{d}w$, kde $\varphi = [0, \pi i]$.

4. Najděte přírůstek logaritmu f podél φ, jestliže
a) $f(z) = z$, φ je orientovaná úsečka $[u, v]$, kde $u, v \in \mathbb{C}$; b) $f(z) = z$, $\varphi(t) = \exp 2\pi i t$, $t \in [0, 2]$;
c) $f(z) = z - 2$, φ jako v b); d) $f(z) = \frac{1}{z}$, φ jako v b).

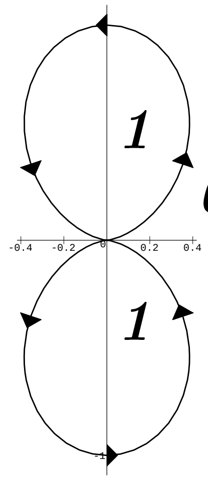
5. Načrtněte obraz křivky φ a určete hodnoty indexu vzhledem k φ v komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, pokud:
(a) φ je křivka z příkladu 2e); (b) $\varphi(t) = \sin^2 t \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
(c) $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$, kde $\varphi_1(t) = \sin^2 t \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a $\varphi_2(t) = \sin^2 t \cdot e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$;
(d) $\varphi = \psi \dotplus [6\pi, -6\pi] \dotplus [-6\pi, -6\pi + 6\pi i] \dotplus [-6\pi + 6\pi i, 6\pi i] \dotplus [6\pi i, \frac{\pi}{2} i]$, kde $\psi(t) = te^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, 6\pi]$.

Výsledky a návody. **1.** a) Část paraboly $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$, $\operatorname{Re} z \in [0, 10]$, délka je $\int_0^{10} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = 5\sqrt{401} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{401}-20)$ (substituce $t = \frac{1}{2}\sinh y$); b) úsečka spojující i a $-i$ (křivka ji projde tam a zpět), délka je 4; c) úsečka spojující $1+i$ a 1 (křivka ji projde dvakrát tam a zpět), délka je 4; d) elipsa o středu v 0 a poloosami 2 ve směru reálné osy a 1 ve směru imaginární osy (křivka ji proběhne dvakrát v kladném smyslu, počínaje v bodě $-i$), délka je $\int_0^{4\pi} \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$; e) délka je $\int_0^{10\pi} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 5\pi\sqrt{100\pi^2+1} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{100\pi^2+1} - 10\pi)$ (substituce $t = \sinh y$), jde o část spirály (Archimédovy). **2.** a) $\frac{1+i}{2}$, b) $-\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{\sqrt{5}}{2}(2-i)$, d) $2i$, e) $\frac{4}{3}$, f) 0. **3.** a) Na $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$, $f'(z) = -\int_0^1 \frac{t(z+t)\sin(tz)+\cos(tz)}{(z+t)^2}\,\mathrm{d}t$; b) na $\mathbb{C} \setminus \{e^{it} : t \in [0, \pi]\}$, $f'(z) = \int_\varphi \frac{\cos w}{(e^w - z)^2}\,\mathrm{d}w$. **4.** a) Pokud bod 0 leží na úsečce, pak nemá smysl; pokud úsečka má prázdný průnik s polopřímkou $(-\infty, 0]$, pak $\log(v) - \log(u)$; pokud jeden krajní bod leží na $(-\infty, 0)$ a druhý má nezápornou imaginární část, pak $\log(v) - \log(u)$. Pokud má úsečka společný bod s $(-\infty, 0)$, pak v případě, že $\operatorname{Im} v < 0$ je přírůstek $\log(v) - \log(u) + 2\pi i$ a v případě, že $\operatorname{Im} u < 0$, pak $\log(v) - \log(u) - 2\pi i$. b) $4\pi i$; c) 0; d) $-4\pi i$.

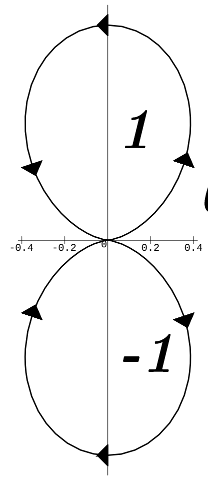
5. a)



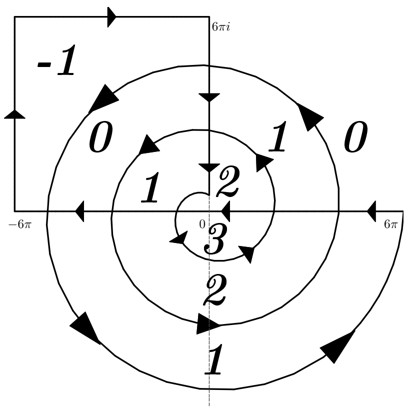
b)



c)



d)



IV. Rozvoj v mocninnou řadu, aplikace Cauchyovy věty

1. S využitím existence a jednoznačnosti rozvoje v mocninnou řadu najděte všechny funkce, které v nějakém okolí bodu 0 splňují:
(a) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 2$; (b) $(1 + z^2)f'(z) = 1$, $f(0) = 0$; (c) $f''(z) + r^2 f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = r$ $(r > 0)$;
(d) $f''(z) - 2f'(z) + f(z) = 0$; (e) $(1 + z^2)f''(z) - 2zf'(z) + 2f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$;
(f) $(1 - z^2)f''(z) - 4zf'(z) + 2f(z) = 0$.

2. Určete násobnost kořenů funkcí:
(a) $z^2 - z^5$, všechny kořeny, (b) $(1 - m_{1/2}(z))^3$, kořen 1, (c) $e^{z^2} - 1$, všechny kořeny,
(d) $1 - \cos z$, všechny kořeny, (e) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, kořen 0.

3. S využitím Cauchyovy věty, znalosti primitivních funkcí a definice spočtěte $\int_\varphi f$, pokud:
(a) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (a1) -1, (a2) 0, (a3) 1, (a4) 2;
(b) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (b1) -1, (b2) 0, (b3) 1, (b4) 2;
(c) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^3}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu (c1) -1, (c2) $\frac{1}{2}$, (c3) 2;
(d) $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru r a středu r $(r > 0)$.

4. Pomocí Cauchyova vzorce spočtěte integrály $\int_\varphi f$, kde
a) $f(z) = \frac{\sin(z+i)}{z^2+1}$, φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2;
b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$, φ jako v a), c) $f(z) = \frac{e^z-e}{z^2-1}$, φ jako v a), d) $f(z) = \frac{ze^z}{(z+1)^3}$, φ jako v a), e) $f(z) = \frac{e^z}{e^z-1}$, φ jako v a),
f) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}$, φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru r, kde $|a| < r < |b|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Výsledky a návody. **1.** a) $2\exp(z)$ na $\mathbb{C}$, b) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} (= \operatorname{arctg} z)$ na $U(0,1)$, c) $\sin rz$ na $\mathbb{C}$, d) $(a+bz)\exp(z)$ na $\mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$ libovolné (NÁVOD: odvoďte rekurentní vztah pro koeficienty a_n, vyřešte jej pro počáteční podmínky $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_0 = a_1 = 1$; obecné řešení je lineární kombinací těchto dvou řešení), e) z na $\mathbb{C}$, f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, kde a_0 a $a_1 \in \mathbb{C}$ jsou libovolné a pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $a_{n+2} = \frac{n^2+3n-2}{(n+1)(n+2)} a_n$ na $U(0,1)$ (na $\mathbb{C}$, pokud $a_0 = a_1 = 1$). **2.** a) 0 násobnosti 2; 1, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ násobnosti 1; b) 3; c) 0 násobnosti 2, ostatní $\sqrt{k\pi}(\pm 1 \pm i)$ (všechny čtyři kombinace znamének), $k \in \mathbb{N}$, násobnosti 1; d) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, všechny násobnosti 2; e) 3. **3.** a): (a1) πi, (a2) $-2\pi i$, (a3) πi, (a4) 0 (pro (a4) použijte Cauchyovu větu přímo, pro ostatní případy rozložte na parciální zlomky, ty integrujte zvlášť, na některé lze použít Cauchyova věta, zbylé integrály lze spočítat snadno z definice); b): (b1) $-\pi i$, (b2) 0, (b3) πi, (b4) 0 (pro (b4) použijte Cauchyovu větu přímo, pro ostatní případy rozložte na parciální zlomky, případy (b1) a (b3) počítejte analogicky jako v a), pro případ (b2) navíc lze použít, že funkce $\frac{1}{z^2}$ má primitivní funkci); c): (c1) $2\pi i$, (c2) 0, (c3) $-2\pi i$ (rozložte na parciální zlomky, navíc použijte fakt (dokažte si ho z Cauchyovy věty), že pokud $|b - a| < r$, tj. $b \in U(a, r)$, pak integrál z $\frac{1}{z-b}$ podél kladně orientované kružnice o středu a a poloměru r je roven integrálu z $\frac{1}{z-b}$ přes kladně orientovanou kružnici o středu b, přičemž poslední integrál lze snadno spočítat z definice a nezávisí na poloměru kružnice); d) pro $r < \frac{1}{2}$ vyjde 0 (z Cauchyovy věty), pro $r = \frac{1}{2}$ nemá smysl, pro $r > \frac{1}{2}$ vyjde $\frac{1}{2}\pi i$ (použijte fakt zmíněný v c) k důkazu, že pro $r > \frac{1}{2}$ je výsledek stejný jako pro $r = 1$). **4.** a)$2\pi i \cdot \frac{\sin(2i)}{2i} = -i\pi \sinh 2$; b) $\pi i(e - \frac{1}{e})$; c) $\pi i(e - \frac{1}{e})$; d) $\frac{\pi i}{e}$; e) $2\pi i$; f) $-\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$.

V. Další aplikace Cauchyovy věty

1. Nechť f je celá funkce. Dokažte, že f je konstantní, jestliže: a) $\operatorname{Re} f \leq 0$ na $\mathbb{C}$,
b) existují $a, b, c \in \mathbb{R}$, přičemž aspoň jedno z čísel a, b není nula, že $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f \leq c$ na $\mathbb{C}$,
c) existuje $r > 0$, že $|f| \geq r$ na $\mathbb{C}$,
d) existuje $c > 0$, že f nenabývá žádné hodnoty z množiny $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < c\}$.

2. S využitím Cauchyovy věty spočtěte Newtonovy integrály
(a) $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ (NÁVOD: Integrujte funkci $\exp(iz^2)$ přes obvod kruhové výseče o středu 0, přičemž oblouk kružnice je ohraničen body R a $R\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; dokažte, že limita integrálu přes uvedený oblouk pro $R \to \infty$ je 0 a využijte znalost integrálu $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.)
(b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{\exp(iz)}{z}$ přes křivku $[r, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [-R, -r] \dotplus \psi_r$, kde $R > r > 0$, φ_R je kladně orientovaná horní polokružnice o středu 0 a poloměru R a ψ_r je záporně orientovaná horní polokružnice o středu 0 a poloměru r; dokažte, že limita integrálu přes φ_R pro $R \to \infty$ je 0; spočtěte limitu integrálu přes ψ_r pro $r \to 0+$ pomocí Lebesgueovy věty a uvažte imaginární část.)
(c) $\int_0^\infty x^{s-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^\infty x^{s-1} \cos x\,\mathrm{d}x$ pro $s \in (0, 1)$ (NÁVOD: Integrujte funkci $m_{s-1}(z)\exp(iz)$ přes křivku $[r, R] \dotplus \varphi_R \dotplus [iR, ir] \dotplus \psi_r$, kde $R > r > 0$, φ_R je oblouk kružnice o středu 0 a poloměru R od R do iR a ψ_r je oblouk kružnice o středu 0 a poloměru r od ir do r; spočtěte limity jako v (b); výsledek vyjádřete pomocí $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x)\,\mathrm{d}x$.)

Výsledky a návody. **1.** Použijte Liouvilleovu větu na vhodnou funkci, například: a) $\exp \circ f$ nebo $\frac{1}{f-1}$; b) použijte výsledek a) na $(a - bi)f - c$; c) $\frac{1}{f}$; d) použijte předchozí výsledky na $\log \circ (1 - f)$. **2.** a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (oba), b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$, $\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$.

VI. Izolované singularity, Laurentovy řady

1. Najděte a klasifikujte izolované singularity funkcí (včetně chování v ∞):
a) $\frac{z^2-1}{z-1}$, b) $\frac{\sin z}{z}$, c) $\frac{\log(1+z)}{z}$, d) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$, e) $\frac{z}{e^z+1}$, f) $\operatorname{tg} \pi z$, g) $\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$,
h) $z(e^{1/z}-1)$, i) $\cos e^{1/z}$, j) $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$, k) $\sin \frac{\pi}{z^2}$.

2. Najděte Laurentovy rozvoje funkcí v mezikružích o uvedených středech:
a) $\frac{1}{z-z^3}$, 0 a 1; b) $e^{1/z}$, 0; c) $\sin \frac{1}{z}$, 0; d) $e^{z-1/z}$, 0.

3. Najděte izolované singularity následujících funkcí a spočtěte příslušná rezidua:
a) $\operatorname{cotg} z$, b) $\sin \frac{1}{1-z}$, c) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, d) $\frac{1}{z^3-z^5}$, e) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$, f) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, g) $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$,
h) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, i) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$, j) $\operatorname{cotg}^2 z$, k) $\sin \frac{z}{z+1}$.

Výsledky a návody. **1.** a) Holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, v 1 odstranitelná singularita, v ∞ pól násobnosti 1; b) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 odstranitelná singularita, v ∞ podstatná singularita (uvažte chování na reálné a imaginární ose); c) holomorfní na $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup\{0\})$, v 0 odstranitelná singularita, jiné izolované singularity nemá; d) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, v bodě 0 odstranitelná singularita, v ostatních uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; e) holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, v uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; f) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k + \frac{1}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, v uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; g) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, v bodech $2k\pi$ odstranitelná singularita, v bodech $(2k+1)\pi$ pól násobnosti 2, v ∞ není izolovaná singularita; h) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita; i) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita; j) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, v 0 odstranitelná singularita, v ostatních uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; k) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita. **2.** a) v $P(0,1)$: $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$, v $P(0,1,+\infty)$: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}}$, v $P(1,1)$: $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+\frac{1}{2^{n+2}})(z-1)^n$, v $P(1,1,2)$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$, v $P(1,2,+\infty)$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1+2^{n-2})}{(z-1)^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}$ v $P(0,+\infty)$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot z^{2n+1}}$ v $P(0,+\infty)$; d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\max\{0,-m\}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \right) z^n$ v $P(0,+\infty)$. **3.** a) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – reziduum v každém z bodů je 1; b) 1, reziduum -1; c) $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, rezidua $\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}$; d) 0, reziduum 1, 1, reziduum $-\frac{1}{2}$, -1, reziduum $-\frac{1}{2}$; e) i, reziduum $-\frac{i}{4}$, $-i$, reziduum $\frac{i}{4}$; f) -1, reziduum $(-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1}$; g) 0, reziduum 0, 1, reziduum 1; h) -1, reziduum $2\sin 2$; i) 0, reziduum $\frac{1}{9}$, $3i$, reziduum $\frac{ie^{3i}}{54}$, $-3i$, reziduum $-\frac{ie^{-3i}}{54}$; j) $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, rezidua 0; k) -1, reziduum $-\cos 1$.

VII. Aplikace reziduové věty

1. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}$ $(a \in \mathbb{R},\ |a| > 1)$, b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}$ $(a > b > 0)$, c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin^2 x}$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq \pm 1,\ n \in \mathbb{N})$, e) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$,
f) $\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(x+a)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, g) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, h)* $\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x$, i)* $\int_0^{2\pi} \cos(x-\sin x)\,\mathrm{d}x$,
j)* $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(3x-\sin x)\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ pomocí exponenciály a podle definice křivkového integrálu převeďte na integrál přes kladně orientovanou jednotkovou kružnici. Ten spočtěte dle reziduové věty. Je-li integrační interval kratší, použijte vhodné symetrie integrované funkce. V příkladech s hvězdičkou je třeba spočíst reziduum v bodě podstatné singularity.

2. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$,
g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pak integrujte přes $[-R, R] \dotplus \varphi_R$, kde $\varphi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, použijte reziduovou větu a to, že integrál přes φ_R má limitu 0 pro $R \to \infty$.

3. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^3-x}$, e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2+x}$, f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-8}{4x^2-1}\cos \pi x\,\mathrm{d}x$.

NÁVOD: Nejprve převeďte na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pro případ e): Integrujte funkci $\frac{e^{i\pi z}}{z^2+z}$ podél křivky $[-R, -1-r] \dotplus \phi_r \dotplus [-1+r, -r] \dotplus \psi_r \dotplus [r, R] \dotplus \eta_R$, kde $R > 1$ a $r \in (0, \frac{1}{2})$, $\phi_r(t) = -1 + re^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$, $\psi_r(t) = re^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$, $\eta_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zkoumejte limitu pro $R \to \infty$ a $r \to 0+$. Ukažte, že integrál přes η_R má pro $R \to \infty$ limitu 0 (Jordanovo lemma) a spočtěte limitu integrálů přes ϕ_r a ψ_r pomocí reziduí v 0 a v -1. Na závěr uvažte imaginární část. V ostatních případech postupujte analogicky.

4. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(a \in (-1, 1))$, b) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $(a \in (-1, 3))$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(x+b)}$ $(a \in (0, 1),\ b > 0)$,
d) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+b)(x+2b)}$, $(|a| < 1,\ b > 0)$.

NÁVOD pro $a \notin \mathbb{Z}$: Proveďte substituci $x = e^y$, výslednou funkci integrujte přes obvod obdélníka o vrcholech $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$ a uvažte limitu pro $R \to \infty$.

5. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$, d) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^k x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(k \in \mathbb{N})$.

NÁVOD: Pro $0 < r < R$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ uvažme křivku $(\dot{-}\,\phi_{r,\alpha}) \dotplus [re^{i\alpha}, Re^{i\alpha}] \dotplus \phi_{R,\alpha} \dotplus [Re^{-i\alpha}, re^{-i\alpha}]$, kde $\phi_{r,\alpha} = re^{it}$, $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. Dále nechť $A(z) \in \operatorname{Arg}(z) \cap [0, 2\pi)$ a $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ pro $z \neq 0$. Pro příklad d) integrujte funkci $\frac{L^k(z)}{1+z^2}$ přes uvedenou křivku. Proveďte limitní přechod pro $\alpha \to 0+$ a pak pro $r \to 0+$ a $R \to \infty$ a odvoďte rekurentní vztah pro uvedený integrál v závislosti na k. Pro ostatní případy integrujte analogickou funkci, v níž bude $L^2(z)$.

Výsledky a návody. **1.** a) $\frac{2\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-1}}$, b) $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$, c) $\frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}}$, d) $\frac{\pi}{|a^2-1|}\cdot(\min\{|a|,\frac{1}{|a|}\})^n$, e) $\pi i \operatorname{sgn} a$, f) $-2\pi i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} a$, g) $2\pi(\sqrt{2}-\frac{5}{4})$, h) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}$, i) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n+1)(2n+2)-1}{2^{4n+3}(2n+1)!(2n+2)!}$, j) $\frac{\pi}{3}$. **2.** a) $\frac{\pi}{2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$, d) $\frac{\pi}{16a^3}$, e) $-\frac{\pi}{27}$, f) 0 pro n liché, $\frac{2\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ pro n sudé, g) $\frac{5}{12}\pi$. **3.** a) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$, b) $\frac{\pi e^{-a}}{4a^3}(a+1)$, c) $\frac{\pi}{2}(2^{-ab}-1)$, d) $-\pi$, e) 2π, f) 4π. **4.** a) $\frac{\pi}{2}$ pro $a=0$, $\pi\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\sin\pi a}$ pro $a\neq 0$, b) 2 pro $a=1$, $-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a-1}{\cos\frac{\pi a}{2}}$ pro $a\neq 1$, c) $\frac{\pi}{b^a\sin\pi a}$, d) $(2^a-1)\frac{\pi\sin\ln 2}{4\cosh\frac{\pi}{2}}$ pro $a\neq 0$, $-\frac{\ln 2}{b}$ pro $a=0$. **5.** a) $-\frac{1}{2}$, b) 0, c) $-\frac{1}{4}\pi$, d) $I_{2k+1}=0$, $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_{2k}=-\frac{1}{2k+1}((-1)^{k+1}\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}}(3^{2k+1}-1)+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{2k+1}{2j}(2\pi)^{2k-2j}I_{2j})$.

==

VIII. Další aplikace reziduové věty

1. Najděte součty řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+a^4}$, $a\in\mathbb{C}$; b) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; c) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; f) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$; g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, $a\in\mathbb{C}$, $ia\notin\mathbb{Z}$;

h) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{k-c}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; i) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k}{k-c}$, $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

NÁVOD: Pro případ c) uvažte funkci $f(z)=\frac{\pi\operatorname{cotg}\pi z}{(a+z)^2}$, aplikujte reziduovou větu na integrál z f podél kružnice o středu 0 a poloměru $n+\frac{1}{2}$ a uvažte limitu pro $n\to\infty$. Použijte fakt, že funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ je na těchto kružnicích stejně omezená. Pro případ b) postupujte analogicky, jen místo $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ použijte funkci $\frac{\pi}{\sin\pi z}$. V případě h) postupujte podobně jako v případě c), s tím, že ukážete, že integrál přes uvedené kružnice z funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z(\frac{1}{z-c}-\frac{1}{z})$ má limitu nula, přičemž je stejný jako integrál z $\pi\operatorname{cotg}\pi z\cdot\frac{1}{z-c}$, protože integrál z $\pi\operatorname{cotg}\pi z\cdot\frac{1}{z}$ je nulový (jde o $2\pi i$-násobek absolutního členu Laurentovy řady liché funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ v nějakém mezikruží o středu 0).

2. Spočtěte integrály:

a) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ podél křivky $[r,R]\dotplus\varphi_R\dotplus[-R,-r]\dotplus(\dot-\varphi_r)$, kde $\varphi_r(t)=re^{it}$, $t\in[0,\pi]$.)

b) $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Podél křivky z a) integrujte funkci $\frac{1-e^{iz}}{z^2}$.)

c) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x$ $(a,b>0)$. (NÁVOD: Integrujte funkci e^{-az^2} podél obvodu obdélníka s vrcholy $-R$, R, $R+i\frac{b}{2a}$, $-R+i\frac{b}{2a}$. Použijte znalost $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.)

d) $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ $(p>1)$. (NÁVOD: Je-li $p\in\mathbb{N}$, integrujte funkci $\frac{1}{1+z^p}$ podél křivky $[0,R]\dotplus\varphi_R\dotplus[R\exp(\frac{2\pi i}{p}),0]$, kde φ_R je příslušný oblouk kružnice o středu 0. V obecném případě je třeba integrovat funkci $\frac{1}{1+\exp(pL(z))}$, kde $L(z)\in\operatorname{Log}(z)$ je takové, že $\operatorname{Im}L(z)\in[-\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, kde $\varepsilon>0$ je dost malé ($\varepsilon<2\pi(1-\frac{1}{p})$), a kolem bodu 0 je třeba přidat oblouk kružnice jako v příkladu VII/5.)

e) $\int_0^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{z}{z^4+1}$ přes křivku jako v případě d) pro $p=4$.)

f) $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a,b\in\mathbb{R})$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{e^{2iaz}-e^{2ibz}}{z^2}$ přes křivku z a).)

g) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$. (NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{z^3}$ přes křivku z a).)

– –

Výsledky a návody. **1.** a) $\frac{\pi^2}{6}$ pro $a=0$, $\frac{\pi}{2a\sqrt{2}}\cdot\frac{\sinh\pi a\sqrt{2}-\sin\pi a\sqrt{2}}{\cosh\pi a\sqrt{2}-\cos\pi a\sqrt{2}}$ jinak; b) $\frac{\pi^2\cos\pi a}{\sin^2\pi a}$, c) $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$, d) $\frac{\pi^2}{6}$, e) $-\frac{\pi^2}{12}$, f) $\frac{2\pi}{3}\operatorname{tgh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{1}{2a^2}(1+\frac{\pi a}{\sin\pi a})$, h) $-\pi\operatorname{cotg}\pi c$, i) $-\frac{\pi}{\sin\pi c}$. **2.** a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{b^2}{4a})$, d) $\frac{\pi/p}{\sin(\pi/p)}$, e) π, f) $\pi(b-a)$, g) $\frac{\pi}{8}$.