ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2017/2018

PŘÍKLADY KE KAPITOLÁM I A II

Derivace podle komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky

Příklad 1. Ukažte, že funkce $f(z) = \overline{z}$ nemá derivaci podle komplexní proměnné v žádném bodě; a to jednak pomocí Cauchy-Riemannových podmínek a jednak přímo z definice derivace.

Příklad 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená souvislá množina) a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkce splňující $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$. Ukažte, že f je konstantní na Ω.

`Návod:` *Pomocí věty o střední hodnotě ukažte, že f je konstantní na každé úsečce obsažené v Ω. Dále zvolme $z_0 \in \Omega$. Ukažte, že množina $\{z \in \Omega; f(z) = f(z_0)\}$ je relativně uzavřená i relativně otevřená v Ω.*

Příklad 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $n \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkce splňující $f^{(n)}(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$ ($f^{(n)}$ je n-tá derivace f podle komplexní proměnné). Ukažte, že f je polynom stupně nejvýše $n - 1$.

`Návod:` *Použijte Příklad 2 a matematickou indukci.*

Příklad 4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je funkce holomorfní na Ω. Ukažte, že f je konstantní, pokud je splněna jedna z následujících podmínek:

(1) f nabývá na Ω jen reálných hodnot.
(2) Funkce $\overline{f}$ je rovněž holomorfní na Ω.
(3) Existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω.
(4) Existují čísla $a, b \in \mathbb{C}$, ne obě nulová, pro která je funkce $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ konstantní na Ω.

`Návod:` *(1) Použijte Cauchy-Riemannovy podmínky a Příklad 2. (2) Buď lze použít Cauchy-Riemannovy podmínky na obě funkce f a $\overline{f}$ a následně Příklad 2; nebo lze aplikovat bod (1) na funkce $f + \overline{f}$ a $i(f - \overline{f})$. (3) Nalezněte $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, pro která funkce $\alpha f + \beta$ splňuje předpoklady bodu (1). Jiná možnost je použít Cauchy Riemannovy podmínky, s použitím řešení vhodné soustavy lineárních rovnic dokázat, že $f' = 0$ na Ω, a následně použít Příklad 2. (4) Ukažte, že lze bod (3) aplikovat buď na dvojici $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$ nebo na dvojici $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b$.*

Příklad 5. Nechť $z, w \in \mathbb{C}$.

(1) Ukažte, že $\sin z = \sin w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = (2k+1)\pi$.
(2) Ukažte, že $\cos z = \cos w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi$ nebo $w + z = 2k\pi$.
(3) Ukažte, že $\sinh z = \sinh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = (2k+1)\pi i$.
(4) Ukažte, že $\cosh z = \cosh w$, právě když existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující buď $w - z = 2k\pi i$ nebo $w + z = 2k\pi i$.

`Návod:` *(1,2) Použijte definici funkcí* sin *a* cos*, řešení kvadratické rovnice a skutečnost, že* $\exp z = \exp w$*, právě když* $w - z$ *je celočíselný násobek* $2\pi i$*. (3,4) Použijte (1,2) a skutečnost, že* $\sinh z = -i \sin iz$ *a* $\cosh z = \cos iz$ *pro* $z \in \mathbb{C}$*.*

Příklad 6. Nechť $w \in \mathbb{C}$.

(1) Ukažte, že rovnice $\sin z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
(2) Ukažte, že rovnice $\cos z = w$ má nekonečně mnoho řešení v $\mathbb{C}$, a najděte všechna řešení.
(3) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice řešení v $\mathbb{R}$? Jsou pak všechna řešení reálná?
(4) Pro které hodnoty $w \in \mathbb{C}$ mají uvedené rovnice ryze imaginární řešení?

`Návod:` *(1,2) Použijte definici funkcí* sin *a* cos *a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkcí* $\mathrm{m}_{1/2}$ *a* log*. (3) Použijte znalosti o chování goniometrických funkcí na* $\mathbb{R}$ *a Příklad 5. (4) Použijte body (1,2).*

Příklad 7. Definujme funkci tg předpisem $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\cos z \neq 0$.

(1) Určete definiční obor funkce tg a ukažte, že funkce tg je na svém definičním oboru holomorfní.
(2) Ukažte, že funkce tg nenabývá hodnot i a $-i$.
(3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{tg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
(4) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce tg. Ukažte, že $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π.

`Návod:` *(2,3) Použijte definici funkcí* sin *a* cos *a řešení kvadratické rovnice. Řešení vyjádřete pomocí funkce* log*. (4) Odvoďte z výsledku (3).*

Příklad 8. Definujme funkci cotg předpisem $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro která $\sin z \neq 0$.

(1) Určete definiční obor funkce cotg a ukažte, že funkce cotg je na svém definičním oboru holomorfní.
(2) Ukažte, že funkce cotg nenabývá hodnot i a $-i$.
(3) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ má rovnice $\operatorname{cotg} z = w$ nekonečně mnoho řešení a najděte je.
(4) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ patří do definičního oboru funkce cotg. Ukažte, že $\operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} w$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek π.

`Návod:` *Použijte Příklad 7 a vztah funkcí* tg *a* cotg*.*

Příklad 9. Uvažme funkci $f(z) = \exp \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ má rovnice $f(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
(2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f(P(0, \delta)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f všech komplexních nenulových hodnot nekonečněkrát.

Příklad 10. Uvažme funkce $f_1(z) = \sin \frac{1}{z}$ a $f_2(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nechť $j \in \{1, 2\}$.

(1) Ukažte, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ má rovnice $f_j(z) = w$ nekonečně mnoho řešení a že tato řešení tvoří posloupnost s limitou 0.
(2) Ukažte, že pro každé $\delta > 0$ je $f_j(P(0, \delta)) = \mathbb{C}$.
(3) Ukažte, že v každém prstencovém okolí nuly nabývá f_j všech komplexních hodnot nekonečněkrát.

Příklad 11. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$. Nechť $M_a(z)$ je množina hodnot a-té mocniny komplexního čísla z (viz oddíl II.3).

(1) Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje právě jeden bod.
(2) Nechť $a \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ obsahuje konečně mnoho bodů.
(3) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že každý prvek $w \in M_a(z)$ splňuje $|w| = |z|^a$.
(4) Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je hustá podmnožina kružnice $\{w \in \mathbb{C}; |w| = |z|^a\}$.
(5) Nechť $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ukažte, že množina $M_a(z)$ je nekonečná a lze ji vyjádřit ve tvaru $M_a(z) = \{w_k; k \in \mathbb{Z}\}$, kde $w_k \to 0$ pro $k \to -\infty$ a $|w_k| \to +\infty$ pro $k \to +\infty$.

`Návod:` *Použijte definice, vlastnosti funkce* exp *a množiny* $\operatorname{Log}(z)$. *V bodě (4) navíc použijte známý fakt, že pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina $\{\exp(i\pi na); n \in \mathbb{Z}\}$ hustá v jednotkové kružnici.*

Příklad 12. Nechť A je libovolná polopřímka s počátečním bodem 0. Ukažte, že existuje holomorfní funkce f na $\mathbb{C} \setminus A$, pro kterou platí $\exp(f(z)) = z$ pro $z \in A$.

`Návod:` *Existuje $t \in (-\pi, \pi]$, pro které $A = \{re^{it}; r \in [0, +\infty)\}$.*

Příklad 13. Nechť $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Vyjádřete $\log(wz)$ pomocí $\log w$ a $\log z$. Kdy platí $\log(wz) = \log w + \log z$?
(2) Jaký je vztah mezi množinami $\operatorname{Log}(wz)$ a $\operatorname{Log} w + \operatorname{Log} z = \{a + b; a \in \operatorname{Log} w, b \in \operatorname{Log} z\}$?

Příklad 14. Nechť $w, z, a, b \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$.

(1) Jaký je vztah mezi čísly $m_{a+b}(z)$ a $m_a(z) \cdot m_b(z)$? Kdy se rovnají?
(2) Jaký je vztah mezi množinami $M_{a+b}(z)$ a $M_a(z) \cdot M_b(z) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_b(z)\}$.
(3) Jaký je vztah mezi čísly $m_{ab}(z)$ a $m_a(m_b(z))$? Kdy se rovnají?
(4) Jaký je vztah mezi množinami $M_{ab}(z)$, $M_a(m_b(z))$, $m_a(M_b(z)) = \{m_a(u); u \in M_b(z)\}$ a $M_a(M_b(z)) = \bigcup_{u \in M_b(z)} M_a(u)$?
(5) Jaký je vztah mezi čísly $m_a(zw)$ a $m_a(z) \cdot m_a(w)$? Kdy se rovnají?
(6) Jaký je vztah mezi množinami $M_a(zw)$ a $M_a(z) \cdot M_a(w) = \{u \cdot v; u \in M_a(z), v \in M_a(w)\}$?

ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2017/2018

PŘÍKLADY KE KAPITOLE III

Souvislost, komponenty, primitivní funkce

Příklad 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Připomeňme, že **komponentou** množiny M rozumíme maximální souvislou podmnožinu M.

(1) Nechť $x \in M$. Ukažte, že sjednoceni všech souvislých podmnožin množiny M, které obsahují bod x, je komponenta množiny M.
(2) Ukažte, že každá komponenta množiny M je relativně uzavřená podmnožina M.
(3) Nechť M je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že každá její komponenta je otevřená množina.
(4) Nechť M je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že M má jen spočetně mnoho komponent.
(5) Ukažte na příkladu, že komponenta neotevřené množiny nemusí být relativně otevřená v M.
(6) Ukažte na příkladu, že uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ může mít nespočetně mnoho komponent.
(7) Ukažte na příkladu, že uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ nemusí mít žádnou relativně otevřenou komponentu.

`Návod:` *(2) Ukažte, že množina, která obsahuje hustou souvislou podmnožinu, je rovněž souvislá. (3) Použijte souvislost otevřené koule a bod (1). (4) Použijte separabilitu $\mathbb{R}^n$. (5) Uvažte například konvergentní posloupnost doplněnou o limitu. (6,7) Uvažte například Cantorovo diskontinuum.*

Příklad 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá množina. Ukažte, že každé dva body z Ω lze spojit lomenou čárou v Ω.

`Návod:` *Projděte důkaz Věty III.4.*

Příklad 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá funkce. Ukažte, že f má na Ω primitivní funkci, právě když $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou cestu φ v Ω.

`Návod:` *Použijte Větu III.5 na každou komponentu množiny Ω.*

Příklad 4. Ukažte, že funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

`Návod:` *Spočtěte (z definice) integrál podél kladně orientované kružnice o středu* 0 *a použijte Větu III.5*

Příklad 5. Ukažte, že neexistuje holomorfní funkce L na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ splňující $e^{L(z)} = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

`Návod:` *Ukažte, že by muselo platit $L'(z) = \frac{1}{z}$ a použijte Příklad 4.*

Holomorfní funkce definované pomocí integrálů

Příklad 6. Položme
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která integrál konverguje (jakožto Lebesgueův).

(1) Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\operatorname{Re} s > 0$.
(2) Ukažte, že funkce Γ je holomorfní na množině $\Omega = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$ a spočtěte její derivaci.
(3) Ukažte, že pro pro $s \in \Omega$ platí $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
(4) Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.

`Návod:` *(2) Použijte Větu III.6 na množině* $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s \in (c, R)\}$*, kde* $0 < c < R < \infty$ *jsou libovolná. (3) Použijte integraci per partes. (4) Spočtěte* $\Gamma(1)$*, použijte (3) a matematickou indukci.*

Příklad 7. Ukažte, že funkce definovaná vzorcem
$$f(z) = \int_0^1 \frac{\cos tz}{z+t}\,\mathrm{d}t$$
je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ a spočtěte její derivaci.

Příklad 8. Ukažte, že funkce definovaná vzorcem
$$f(z) = \int_\varphi \frac{\cos w}{e^w - z}\,\mathrm{d}w,$$
kde φ je orientovaná úsečka $[0, \pi i]$ je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{e^{it}; t \in [0, \pi]\}$ a spočtěte její derivaci.

Aplikace lokální Cauchyovy věty a Cauchyova vzorce

Příklad 9. Pro $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ a $\theta \in (0, 2\pi]$ označme
$$P(a, r, R; \alpha, \theta) = \{a + \rho e^{it}; \rho \in (r, R) \;\&\; t \in (\alpha, \alpha + \theta)\}.$$

(1) Načrtněte tvar množiny $P(a, r, R; \alpha, \theta)$.
(2) Ukažte, že pro každou volbu r, R existuje $c \in (0, 2\pi)$, že kdykoli a, α, θ jsou jako výše a navíc $\theta < c$, pak množina $P(a, r, R; \alpha, \theta)$ je hvězdovitá.
(3) Nechť a, r, R, α jsou jako výše. Ukažte, že každá holomorfní funkce na $P(a, r, R; \alpha, 2\pi)$ má na této množině primitivní funkci.

`Návod:` *(3) Použijte (2), Větu III.13 a za ní následující poznámku o nalepování.*

Příklad 10. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina. Nechť f je funkce holomorfní na Ω, která na Ω nenabývá hodnoty 0.

(1) Ukažte, že existuje funkce L holomorfní na Ω, která splňuje $e^{L(z)} = f(z)$ pro $z \in \Omega$.
(2) Ukažte, že existuje funkce g holomorfní na Ω, pro kterou platí $g^2 = f$.
(3) Ukažte, že existují právě dvě funkce g_1, g_2 holomorfní na Ω splňující $g_1^2 = g_2^2 = f$.

Návod: *(1) Spočtěte, čemu se musí rovnat derivace funkce L, a na výslednou funkci aplikujte Větu III.13. (2) Vyjádřete g pomocí funkce L z bodu (1). (3) Nechť g je funkce, jejíž existence je zaručena bodem (2). Pak funkce g a $-g$ jsou různé a splňují $g^2 = (-g)^2 = f$. Zbývá ukázat, že neexistuje jiná taková funkce. Nechť h je holomorfní na Ω a splňuje $h^2 = f$. Zvolme $a \in \Omega$ libovolně. Pak nutně $h(a) = g(a)$ nebo $h(a) = -g(a)$ (např. díky Větičce II.6(2)). Dejme tomu, že $h(a) = g(a)$. Zvolme $0 < r < |g(a)|$. Díky spojitosti funkcí g a h existuje $\delta > 0$, že $g(U(a,\delta)) \subset U(g(a),r)$ a $h(U(a,\delta)) \subset U(g(a),r)$. Pro každé $z \in U(a,\delta)$ je $h(z)^2 = g(z)^2 = f(z)$, a tedy $h(z) = g(z)$ nebo $h(z) = -g(z)$. Protože však $h(z) \in U(g(a),r)$, $-g(z) \in U(-g(a),r)$ a $U(g(a),r) \cap U(-g(a),r) = \emptyset$, nutně $h(z) = g(z)$, a tedy $h = g$ na $U(a,\delta)$. Na závěr použijte větu o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 11. Ukažte, že neexistuje holomorfní funkce g na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ splňující $g(z)^2 = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Návod: *Uvažte tři kruhy: $U_1 = U(-1,1)$, $U_2 = U(e^{i\frac{\pi}{3}},1)$ a $U_3 = U(e^{-i\frac{\pi}{3}},1)$. Na každém z nich explicitně vyjádřete funkce g_1 a g_2 z Příkladu 10(3) (využijte k tomu funkci $m_{1/2}$). Rozborem případů dokažte, že neexistuje hledaná funkce g ani na $U_1 \cup U_2 \cup U_3$.*

Příklad 12. Nechť f je celá funkce, pro kterou $f(\mathbb{C})$ není hustá podmnožina $\mathbb{C}$. Ukažte, že f je konstantní.

Návod: *Pokud $f(\mathbb{C})$ není hustá, pak existuje $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, že f nenabývá žádné hodnoty z kruhu $U(a,r)$. Aplikujte Liouvilleovu větu (Věta III.18) na funkci $\frac{1}{f-a}$.*

Příklad 13. Nechť f je celá funkce, která nenabývá žádné hodnoty z nějaké polopřímky. Ukažte, že f je konstantní.

Návod: *Existuje $a \in \mathbb{C}$ a komplexní jednotka α, že funkce $g = \alpha(f - a)$ nenabývá žádné hodnoty z polopřímky $(-\infty, 0]$. Aplikujte Příklad 12 na funkci $\log g$.*

Příklad 14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $M \subset \Omega$ je množina izolovaná v Ω.

(1) Ukažte, že množina $\Omega \setminus M$ je otevřená.
(2) Nechť f je komplexní funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus M$. Ukažte, že f je holomorfní na Ω.

Příklad 15. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f funkce holomorfní na Ω, která není konstantní. Nechť funkce $|f|$ nabývá v bodě $a \in \Omega$ lokálního minima. Ukažte, že $f(a) = 0$.

Návod: *Postupujte sporem. Aplikujte princip maximu modulu (Věta III.22) na funkci $\frac{1}{f}$ na nějakém kruhu o středu a a následně použijte větu o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 16. Ukažte, že funkce Γ z Příkladu 6 lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. (Toto rozšíření se rovněž značí Γ.)

Návod: *Vzorec z bodu (3) Příkladu 6 lze přepsat ve tvaru $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. Tento vzorec lze použít jako definici holomorfní funkce na $\{s; \operatorname{Re} s > -1\} \setminus \{0\}$, která se na $\{s; \operatorname{Re} s > 0\}$ shoduje s Γ. Podobně lze pokračovat dále indukcí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ rozšířit funkci Γ na funkci holomorfní na $\{s; \operatorname{Re} s > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$. Jednoznačnost rozšíření plyne z věty o jednoznačnosti (Věta III.21).*

Příklad 17. Položme

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která řada konverguje.

(1) Ukažte, že řada konverguje absolutně, právě když $\operatorname{Re} s > 1$.
(2) Ukažte, že funkce ζ je holomorfní na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 1\}$.

`Návod:` *(2) Ukažte, že řada na oné polorovině konverguje lokálně stejnoměrně a použijte Weierstrassovu větu (Věta III.23).*

Příklad 18. Položme

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

pro ta $s \in \mathbb{C}$, pro která řada konverguje. Symbolem ζ značme funkci z Příkladu 17.

(1) Ukažte, že řada konverguje, právě když $\operatorname{Re} s > 0$.
(2) Ukažte, že funkce g je holomorfní na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$.
(3) Ukažte, že $g(s) + \zeta(s) = \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s)$, pokud $\operatorname{Re} s > 1$.
(4) Ukažte, že funkci ζ lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$.

`Návod:` *(1) Je-li $\operatorname{Re} s \leq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence. Dále označme n-tý člena řady symbolem $a_n(s)$. Ukažte, že pro $\operatorname{Re} s > 0$ je $a_n(s) \to 0$ pro $n \to \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}(s) + a_{2n}(s))$ konverguje absolutně. Z toho odvoďte konvergenci původní řady. (2) Pro $c > 0$ ukažte, že $a_n(s) \rightrightarrows 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}(s) + a_{2n}(s))$ konverguje stejnoměrně na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > c\}$. Z toho odvoďte, že původní řada konverguje lokálně stejnoměrně na polorovině $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$ a použijte Weierstrassovu větu (Věta III.23). (3) Proveďte přímý výpočet. (4) Ze vzorce v bodě (3) vyjádřete $\zeta(s)$ a výsledný vzorec použijte jako definici funkce holomorfní na $\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$.*

ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2017/2018

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

Příklad 1. Nechť funkce f a g jsou holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$, $f(a) = g(a) = 0$ a g není konstantní na okolí bodu a. Ukažte, že

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

`Návod:` *g má v bodě a kořen nějaké násobnosti, f je buď konstantní nula na okolí bodu a nebo má v bodě a kořen nějaké násobnosti. Spočtěte obě limity (proveďte rozbor možností) a ukažte, že ve všech případech limity existují a rovnají se.*

Příklad 2. Nechť funkce f a g jsou holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a v bodě a mají obě pól. Ukažte, že

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

`Návod:` *Spočtěte obě limity (proveďte rozbor možností v závislosti na násobnostech pólů) a ukažte, že ve všech případech limity existují a rovnají se.*

Příklad 3. Ukažte, že každá funkce holomorfní na $\overline{\mathbb{C}}$ je konstantní.

`Návod:` *Použijte kompaktnost $\overline{\mathbb{C}}$ (použijte ztotožnění s $\mathbb{S}_2$ dle Věty IV.1) a Liouvilleovu větu (Věta III.18).*

Příklad 4. Nechť f je celá funkce, která má v ∞ pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Ukažte, že f je polynom stupně p.

`Návod:` *Využijte poznámku za Liouvilleovou větou pro $n = p + 1$.*

Příklad 5. Ukažte, že každá množina izolovaná v $\overline{\mathbb{C}}$ je konečná.

`Návod:` *Použijte kompaktnost $\overline{\mathbb{C}}$.*

Příklad 6. Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je konečná, $f : \overline{\mathbb{C}} \setminus M \to \mathbb{C}$ je funkce holomorfní na $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$, která má v každém bodě množiny M pól (tj., f je meromorfní na $\overline{\mathbb{C}}$). Ukažte, že f je racionální funkce (tj. podíl dvou polynomů).

`Návod:` *Najděte polynom Q takový, že funkce $f \cdot Q$ má ve všech bodech množiny $M \cap \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitu, tedy po dodefinování limitou jde o celou funkci. Na tuto funkci aplikujte Příklad 4.*

Příklad 7. Označme $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ a $g(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$.

(1) Ukažte, že funkce f a g jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
(2) Ukažte, že v každém bodě $k \in \mathbb{Z}$ mají funkce f a g pól násobnosti jedna.
(3) Ukažte, že pro $k \in \mathbb{Z}$ platí $\operatorname{res}_k f = (-1)^k$ a $\operatorname{res}_k g = 1$.

Příklad 8. Ukažte, že funkce Γ (viz Příklady 6 a 16 ke Kapitole III) má v každém z bodů $0, -1, -2, \dots$ pól násobnosti jedna a spočtěte rezidua funkce Γ v těchto bodech.

`Návod:` *Použijte znalost hodnoty* $\Gamma(1) = 1$ *a platnost vzorce* $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ *pro* $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ *(a vzorec z Věty IV.4(2)).*

Příklad 9. Ukažte, že funkce ζ (viz Příklady 17 a 18 ke Kapitole III) má v bodě 1 pól násobnosti 1 a spočtěte reziduum v tomto bodě.

`Návod:` *Použijte vzorec* $\zeta(s) = \frac{2^{s-1}g(s)}{2^{s-1}-1}$ *odvozený v Příkladu 18 ke Kapitole III, vzorec z Věty IV.4(2) a znalost hodnoty* $g(1) = \ln 2$*.*

Příklad 10. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a, r)$. Rozhodněte, jaký typ izolované singularity má v bodě a funkce fg za předpokladu, že

(1) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a pól násobnosti q;
(2) f má v bodě a pól a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(3) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a kořen násobnosti q;
(4) f má v bodě a odstranitelnou singularitu a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(5) f i g mají v bodě a podstatnou singularitu.

`Návod:` *(4) Rozlište případ, kdy f je konstantní nulová funkce, od ostatních případů. (5) Pomocí konkrétních příkladů ukažte, že mohou nastat všechny možnosti.*

Příklad 11. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a, r)$. Rozhodněte, jaký typ izolované singularity může mít v bodě a funkce $f + g$ za předpokladu, že

(1) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a pól násobnosti q;
(2) f má v bodě a pól a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(3) f má v bodě a odstranitelnou singularitu;
(4) f i g mají v bodě a podstatnou singularitu.

`Návod:` *(1) Rozlište případy $p = q$ a $p \neq q$. Možnosti pro případ $p = q$ ilustrujte konkrétními příklady. (4) Pomocí konkrétních příkladů ukažte, že mohou nastat všechny možnosti.*

Příklad 12. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a funkce f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a, přičemž v bodě a má podstatnou singularitu.

(1) Na příkladu konkrétní funkce f ukažte, že funkce $\frac{1}{f}$ nemusí mít v bodě a izolovanou singularitu.
(2) Na příkladu konkrétní funkce f ukažte, že funkce $\frac{1}{f}$ může mít v bodě a izolovanou singularitu.
(3) Nechť funkce $\frac{1}{f}$ má v bodě a izolovanou singularitu. Ukažte, že to musí být podstatná singularita.
(4) Ukažte, že existuje $c \in \mathbb{C}$, že funkce $\frac{1}{f-c}$ nemá v bodě a izolovanou singularitu.
(5) Musí existovat $c \in \mathbb{C}$, že funkce $\frac{1}{f-c}$ má v bodě a izolovanou singularitu?
(6) Pro kolik různých hodnot $c \in \mathbb{C}$ může mít funkce $\frac{1}{f-c}$ v bodě a izolovanou singularitu?

`Návod:` *(1,2) Uvědomte si, že funkce $\frac{1}{f}$ má v bodě a izolovanou singularitu, právě když f je nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a. (3,4) Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2). (5) Využijte například Příklad 10 ke kapitolám I a II. (6) Použijte Velkou Picardovu větu (viz poznámka za Větou IV.2).*

Příklad 13. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $U(a,r)$, které nejsou konstantně rovny nule. Předpokládejme, že g má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ a pro $z \in U(a,r)$ platí $|f(z)| \leq |g(z)|$. Ukažtem že funkce f má v bodě a kořen násobnosti alespoň p.

`Návod:` *Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2) na funkci* $\frac{f}{g}$.

Příklad 14. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a,r)$, které nejsou konstantně rovny nule. Předpokládejme, že g má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$ a pro $z \in P(a,r)$ platí $|f(z)| \leq |g(z)|$. Ukažtem že funkce f má v bodě a buď odstranitelnou singularitu nebo pól násobnosti nejvýše p.

`Návod:` *Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2) na funkci* $\frac{f}{g}$.

Příklad 15. Nechť f a g jsou dvě celé funkce, pro které platí, že $|f(z)| \leq |g(z)|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ukažte, že funkce f je násobkem funkce g.

`Návod:` *Pokud f nebo g je konstatní nulová funkce, je to zřejmé. Pokud f a g nejsou konstatní nulové funkce, uvažme funkci $\frac{f}{g}$. Pomocí kombinace věty o jednoznačnosti (Věta III.21) a Casorati-Weierstrassovy věty (Věta IV.2) ukažte, že funkci $\frac{f}{g}$ lze (jednoznačně) rozšířit na celou funkci. Dokončete s použitím Liouvilleovy věty (Věta III.18).*

Příklad 16. Nechť f je racionální funkce. Ukažte, že f je součtem polynomu a lineární kombinace funkcí tvaru $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^k}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. (To dává důkaz věty o rozkladu na parciální zlomky.)

`Návod:` *f má v $\mathbb{C}$ konečně mnoho pólů – $a_1, \dots, a_n$. Pro $j = 1, \dots, n$ nechť g_j je hlavní část Laurentovy řady funkce f v prstencovém okolí bodu a_j. Pak $f - \sum_{j=1}^n g_j$ je racionální funkce, která je holomorfní na $\mathbb{C}$, tedy je to polynom.*

Příklad 17. Nechť f je racionální funkce a $z_1, \dots, z_n$ všechny její póly v $\mathbb{C}$. Ukažte, že

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{z_j} f = a_{-1},$$

kde a_{-1} je koeficient u z^{-1} v Laurentově rozvoji funkce f v prstencovém okolí ∞.

`Návod:` *Označte φ kladně orientovanou kružnici s dostatečně velkým poloměrem a spočtěte $\int_\varphi f$ dvěma způsoby – podle reziduové věty a pomocí Laurentova rozvoje v prstencovém okolí ∞.*