K oddílu VI.3 – determinanty

Definice, význam a některé vlastnosti determinantu:

- Determinant je předpis, který každé čtvercové matici přiřadí jisté číslo (nazývané determinant matice).

  Definuje se induktivně:

  Čtvercová matice řádu 1 obsahuje jen jeden prvek, její determinant se rovná tomuto prvku.

  Pro čtvercové matice řádu $n > 1$ determinant definujeme vzorečkem, v němž se vyskytují determinanty matic řádu $n - 1$. (Matice $\mathbb{A}_{ij}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, je řádu o 1 menší než $\mathbb{A}$.)

- Determinant matice řádu 2. Mějme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

  Pak

$$\mathbb{A}_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22}) \text{ a } \mathbb{A}_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = (a_{12}),$$

  tedy

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{2+1} a_{21} \cdot a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Determinant matice řádu 3. Máme

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Pomůckou pro výpočet determinantu matice řádu 3 je Sarusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \hline - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ - & & & & + \end{array}$$

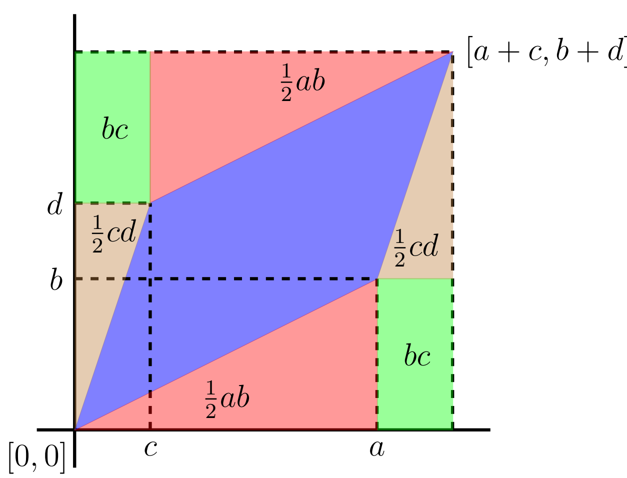
K matici si připíšeme ještě dva řádky – zopakujeme první a druhý řádek. Sečteme součiny po červených diagonálách a odečteme součiny po modrých diagonálách. Determinant je roven

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21},$$

což je přesně výše odvozený vzorec.

- Pro výpočet determinantu matic řádu 4 či vyššího již obvykle nepoužíváme definici, protože výsledný vzorec je příliš složitý. Uvedeme si jiné metody.

- Geometrický význam determinantu řádu 2: Absolutní hodnota determinantu matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je rovna obsahu rovnoběžníku, jehož dvě strany jsou úsečka spojující $[0,0]$ a $[a,b]$ a úsečka spojující $[0,0]$ a $[c,d]$. Ilustruje to následující obrázek:

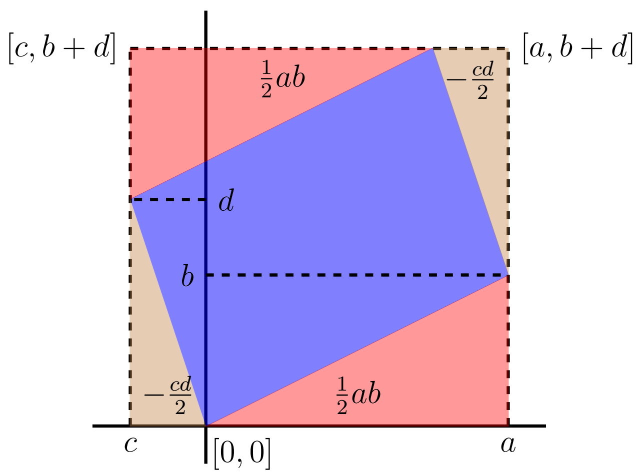


Zmíněný rovnoběžník je vyznačen modře. Jeho obsah získáme tak, že od obsahu velkého obdélníku, který je roven $(a+c)(b+d)$ odečteme obsahy dvou menších obdélníků a čtyř pravoúhlých trojúhelníků (příslušné obsahy jsou vyznačeny v obrázku). Obsah rovnoběžníku je tedy roven

$$(a+c)(b+d) - 2bc - ab - cd = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Obsah je roven absolutní hodnotě determinantu – kdybychom uvažovali matici $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$, obrázek by vypadal stejně, obsah by vyšel stejně, ale determinant by byl číslo opačné.

Uvedený obrázek není důkaz, že to vždy platí, je to ilustrace pro jeden případ. V závislosti na podobě matice může obrázek vypadat jinak. Jiný případ ilustruje následující obrázek:



Obsah rovnoběžníka je

$$(a-c)(b+d) - ab + cd = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Uvedené dva případy nejsou jediné možné, stále jde pouze o ilustraci.

- Geometrický význam determinantu řádu 3: Absolutní hodnota determinatu matice řádu 3 je rovna objemu jistého rovnoběžnostěnu: Znázorníme řádky matice jako tři body v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$. Každý z těchto bodů spojíme úsečkou s počátkem a doplníme na rovnoběžnostěn (tři úsečky budou tři z jeho hran). Objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě determinantu.

- Geometrický význam determinantu řádu n: Absolutní hodnota determinantu je rovna n-rozměrnému objemu n-rozměrného rovnoběžnostěnu vzniklého analogickým způsobem.

- Aplikace pro degenerovaný případ: Determinant matice řádu 2 je nulový, právě když příslušný rovnoběžník je degenerovaný, tedy je částí přímky. To je právě v případě, že jeden z řádků je násobkem druhého, tedy právě v případě, že řádky jsou lineárně závislé, tj. hodnost matice je menší než 2.

  Analogické tvrzení platí pro matice obecného řádu. To je geometrická interpretace Věty VI.11.

- Pokud má čtvercová matice $\mathbb{A}$ některý řádek či sloupec nulový, pak její determinant je roven nule.

  Toto tvrzení dokážeme indukcí podle řádu matice $\mathbb{A}$. S ohledem na to, že definice determinantu je induktivní, budeme takto dokazovat většinu tvrzení o determinantech. Tento první případ je možné chápat jako vzorový.

  Tvrzení jsou to dvě – pro nulový řádek a pro nulový sloupec. Dokažme nejprve tvrzení pro nulový řádek.

  Krok 1, $n = 1$: Má-li matice řádu 1 nulový řádek, je její jediný prvek nulový. Tedy determinant je podle definice roven nule.

  Krok 2, $n \to n + 1$: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro matice řádu n. Mějme matici $\mathbb{A}$ řádu $n+1$, která má některý řádek nulový. Označme j pořadí tohoto řádku, tj., nechť j-tý řádek je nulový. Pak dle definice platí

  $$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}.$$

  Rozmysleme si, že každý ze sčítanců je nulový.

  Pokud $i \neq j$, pak $\mathbb{A}_{i1}$ je matice řádu n, která má nulový řádek. (Vynechali jsme i-tý řádek a první sloupec; ten j-tý nulový řádek jsme nevynechali.) Tedy dle indukčního předpokladu je $\det \mathbb{A}_{i1} = 0$.

Pokud $i = j$, pak $a_{i1} = a_{j1} = 0$.

V každém případě je tedy $a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} = 0$, tedy i $\det \mathbb{A} = 0$.

Dále dokažme tvrzení pro nulový sloupec.

Krok 1, $n = 1$: Má-li matice řádu 1 nulový sloupec, je její jediný prvek nulový. Tedy determinant je podle definice roven nule.

Krok 2, $n \to n + 1$: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro matice řádu n. Mějme matici $\mathbb{A}$ řádu $n + 1$, která má některý sloupec nulový. Označme j pořadí tohoto sloupce, tj., nechť j-tý sloupec je nulový. Pak dle definice platí

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}.$$

Pokud $j = 1$ (tj. první sloupec je nulový), pak $a_{i1} = 0$ pro každé i, tedy $\det \mathbb{A} = 0$.

Pokud $j > 1$, pak každá z matic $\mathbb{A}_{i1}$ je matice řádu n, která má nulový sloupec (a to $(j-1)$-tý). Tedy $\det \mathbb{A}_{i1} = 0$ podle indukčního předpokladu. Proto i v tomto případě $\det \mathbb{A} = 0$.

- Determinat matice řádu n lze uvažovat jako funkci n^2 proměnných. Při této interpretaci jde o spojitou funkci n^2 proměnných. To se dokáže opět indukcí podle řádu matice s využitím definice.

Horní a dolní trojúhelníková matice: Definice byla uvedena již na začátku oddílu VI.1.

K Větě VI.8:

- Důkaz se provede indukcí podle řádu matice.
- Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé.
- Důkaz indukčního kroku $n \to n + 1$ pro horní trojúhelníkovou matici: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro horní trojúhelníkové

matice řádu n. Nechť $\mathbb{A}$ je horní trojúhelníková matice řádu $n+1$. Podle definice determinantu je

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} = a_{11} \det \mathbb{A}_{11},$$

protože $a_{i1} = 0$ pro $i > 1$ (v prvním sloupci jsou všechny prvky kromě prvního nulové).

Přitom $\mathbb{A}_{11}$ je horní trojúhelníková matice řádu n, která má na diagonále prvky $a_{22}, \ldots, a_{n+1,n+1}$. Podle indukčního předpokladu tedy máme

$$\det \mathbb{A}_{11} = a_2 2 \cdot \dots \cdot a_{n+1,n+1}.$$

Proto

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \det \mathbb{A}_{11} = a_{11} a_{22} \cdot \dots \cdot a_{n+1,n+1},$$

což dokončuje důkaz.

- Důkaz indukčního kroku $n \to n+1$ pro dolní trojúhelníkovou matici: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro dolní trojúhelníkové matice řádu n. Nechť $\mathbb{A}$ je dolní trojúhelníková matice řádu $n+1$. Podle definice determinantu je

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}.$$

Pro $i > 1$ má matice $\mathbb{A}_{i1}$ první řádek nulový, a tedy $\det \mathbb{A}_{i1} = 0$. Proto

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \det \mathbb{A}_{11}.$$

Přitom $\mathbb{A}_{11}$ je dolní trojúhelníková matice řádu n, která má na diagonále prvky $a_{22}, \ldots, a_{n+1,n+1}$. Podle indukčního předpokladu tedy máme

$$\det \mathbb{A}_{11} = a_2 2 \cdot \dots \cdot a_{n+1,n+1}.$$

Proto

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \det \mathbb{A}_{11} = a_{11} a_{22} \cdot \dots \cdot a_{n+1,n+1},$$

což dokončuje důkaz.

K Lemmatu VI.9:

- Důkaz: Postupujeme indukcí podle n.

  Krok 1, $n = 1$: Toto je zřejmé z definice.

  Krok 2, $n \to n+1$: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro matice řádu n. Mějme matice $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ řádu $n+1$ a $i \in \{1, \dots, n+1\}$ a předpokládejme, že matice $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ se shodují všude kromě i-tého řádku a i-tý řádek matice $\mathbb{C}$ je roven součtu i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a i-tého řádku matice $\mathbb{B}$.

  Podle definice platí

$$\det \mathbb{C} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} c_{j1} \det \mathbb{C}_{j1}. \qquad \circ$$

  Podívejme se na chování jednotlivých sčítanců na pravé straně.

  Pro $j = i$ platí

$$c_{i1} = a_{i1} + b_{i1} \quad \text{a} \quad \mathbb{C}_{i1} = \mathbb{A}_{i1} = \mathbb{B}_{i1},$$

  tedy

$$\begin{aligned} c_{i1} \det \mathbb{C}_{i1} &= (a_{i1} + b_{i1}) \det \mathbb{C}_{i1} = a_{i1} \det \mathbb{C}_{i1} + b_{i1} \det \mathbb{C}_{i1} \\ &= a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} + b_{i1} \det \mathbb{B}_{i1} \end{aligned} \qquad (*)$$

  Pro $j \neq i$ platí $c_{j1} = a_{j1} = b_{j1}$. Navíc matice $\mathbb{A}_{j1}$, $\mathbb{B}_{j1}$ a $\mathbb{C}_{j1}$ se shodují všude kromě jednoho řádku (i-tého, pokud $j > i$, $(i-1)$-tého, pokud $j < i$) a zbývající řádek matice $\mathbb{C}_{j1}$ je součtem příslušných řádků matic $\mathbb{A}_{j1}$ a $\mathbb{B}_{j1}$. Podle indukčního předpokladu je tedy

$$\det \mathbb{C}_{j1} = \det \mathbb{A}_{j1} + \det \mathbb{B}_{j1}.$$

  Máme tedy

$$\begin{aligned} c_{j1} \det \mathbb{C}_{j1} &= c_{j1} (\det \mathbb{A}_{j1} + \det \mathbb{B}_{j1}) \\ &= c_{j1} \det \mathbb{A}_{j1} + c_{j1} \det \mathbb{B}_{j1} \\ &= a_{j1} \det \mathbb{A}_{j1} + b_{j1} \det \mathbb{B}_{j1} \end{aligned} \qquad (**).$$

Dosadíme-li nyní z $(*)$ a $(**)$ do $(\circ)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\det \mathbb{C} &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} c_{j1} \det \mathbb{C}_{j1} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} (a_{j1} \det \mathbb{A}_{j1} + b_{j1} \det \mathbb{B}_{j1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{j1} \det \mathbb{A}_{j1} + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} b_{j1} \det \mathbb{B}_{j1} = \det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

- Význam tohoto lemmatu: My toto lemma použijeme v důkazu následující věty. Ale to není jediný význam. Je součástí jedné ze základních vlastností determinantu, tzv. multinearity. O něco podrobněji se o tom zmíníme v oddílu VI.5.

Důkaz Věty VI.10:

(ii) Nejsnazší je důkaz bodu (ii). Provedeme ho indukcí podle n.

Krok 1, $n = 1$: Tvrzení pro matice řádu 1 plyne triviálně z definice.

Krok 2, $n \to n + 1$: Předpokládejme, že $n \geq 1$ a tvrzení platí pro matice řádu n. Mějme matici $\mathbb{A}$ řádu $n + 1$, $j \in \{1, \ldots, n + 1\}$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Matice $\mathbb{A}'$ nechť vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením j-tého řádku číslem λ.

Podle definice máme

$$\det \mathbb{A}' = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1}.$$

Podívejme se na chování jednotlivých sčítanců na pravé straně.

Pro $i = j$ máme

$$a'_{j1} = \lambda a_{j1} \quad \text{a} \quad \mathbb{A}'_{j1} = \mathbb{A}_{j1},$$

tedy

$$a'_{j1} \det \mathbb{A}'_{j1} = \lambda a_{j1} \det \mathbb{A}_{j1}.$$

Pro $i \neq j$ platí $a'_{i1} = a_{i1}$ a matice $\mathbb{A}'_{i1}$ vznikne z $\mathbb{A}_{i1}$ vynásobením jednoho řádku číslem λ (pro $i > j$ je to j-tý řádek, pro $i < j$ je to

$(j-1)$-tý řádek). Protože tyto matice mají řád n, z indukčního předpokladu dostaneme $\det \mathbb{A}'_{i1} = \lambda \mathbb{A}_{i1}$. Tedy

$$a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1} = \lambda a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}.$$

Celkově dostáváme

$$\begin{aligned} \det \mathbb{A}' &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \lambda a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} = \lambda \det \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

(i) Pokračujeme s důkazem bodu (i). I ten provedeme indukcí.

Krok 1, $n = 1$: Pro matice řádu 1 je trvrzené triviální, protože mají jenom jeden řádek a úpravu nelze provést.

Krok 2, $n = 2$: Matice řádu 2 mají dva řádky, proto jediná možnost je prohodit první a druhý řádek. Pak tvrzení plyne z výpočtu:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \text{a} \qquad \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad.$$

Krok 3, $n \to n+1$: Předpokládejme, že $n \geq 2$ a tvrzení platí pro matice řádu n. Mějme matici $\mathbb{A}$ řádu $n+1$ a $k, l \in \{1, \dots, n+1\}$, $k < l$. Matice $\mathbb{A}'$ nechť vznikne z $\mathbb{A}$ prohozením k-tého a l-tého řádku.

Podle definice máme

$$\det \mathbb{A}' = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1}.$$

Podívejme se na chování jednotlivých sčítanců na pravé straně.

Pokud $i \neq k, l$, pak $a'_{i1} = a_{i1}$ a matice $\mathbb{A}'_{i1}$ vznikne z $\mathbb{A}_{i1}$ prohozením dvou řádků (pokud $i > l$, jde o k-tý a l-tý řádek; pokud $k < i < l$, jde o k-tý a $(l-1)$-tý řádek; pokud $i < k$, jde o $(k-1)$-tý a $(l-1)$-tý řádek). Protože tyto matice mají řád n, z indukčního předpokladu dostaneme $\det \mathbb{A}'_{i1} = -\mathbb{A}_{i1}$. Tedy

$$a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1} = -a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}. \tag{$\square$}$$

Pokud $i = k$, pak $a'_{k1} = a_{l1}$. Navíc matice $\mathbb{A}'_{k1}$ má stejné řádky jako matice $\mathbb{A}_{l1}$, ale v jiném pořadí. Přitom matice $\mathbb{A}'_{k1}$ vznikne z matice $\mathbb{A}_{l1}$ tak, že k-tý řádek vynecháme a pak ho vložíme na $(l-1)$-té místo (speciálně, pokud $l = k+1$, pak $\mathbb{A}'_{k1} = \mathbb{A}_{l1}$). Této transformace můžeme docílit aplikací několika úprav prvního druhu:

Nejprve prohodíme k-tý řádek s $(k+1)$-tým.

Pak $(k+1)$-tý s $(k+2)$-tým.

A tak dále, až $(l-2)$-tý řádek prohodíme s $(l-1)$-tým.

Tedy provedeme dohromady $l-1-k$ úprav prvního druhu. Protože jde o matice řádu n, podle indukčního předpokladu se při každé z nich změní znaménko determinantu. Dohromady tedy máme $\det \mathbb{A}'_{k1} = (-1)^{l-1-k} \det \mathbb{A}_{l1}$ (pokud $l = k+1$, děláme $l-1-k = 0$ úprav, pak $\det \mathbb{A}'_{k1} = \det \mathbb{A}_{l1}$) tedy

$$a'_{k1} \det \mathbb{A}'_{k1} = (-1)^{l-k-1} a_{l1} \det \mathbb{A}_{l1}. \tag{$\triangle$}$$

Pokud $i = l$, pak $a'_{l1} = a_{k1}$. Navíc matice $\mathbb{A}'_{l1}$ má stejné řádky jako matice $\mathbb{A}_{k1}$, ale v jiném pořadí. Přitom matice $\mathbb{A}'_{l1}$ vznikne z matice $\mathbb{A}_{k1}$ tak, že $(l-1)$-tý řádek vynecháme a pak ho vložíme na k-té místo (speciálně, pokud $l = k+1$, pak $\mathbb{A}'_{l1} = \mathbb{A}_{k1}$). Této transformace můžeme docílit aplikací několika úprav prvního druhu:

Nejprve prohodíme $(l-1)$-tý řádek s $(l-2)$-tým.

Pak $(l-2)$-tý s $(l-3)$-tým.

A tak dále, až $(k+1)$-tý řádek prohodíme s k-tým.

Tedy provedeme dohromady $l-1-k$ úprav prvního druhu. Protože jde o matice řádu n, podle indukčního předpokladu se při každé z nich změní znaménko determinantu. Dohromady tedy máme $\det \mathbb{A}'_{l1} = (-1)^{l-1-k} \det \mathbb{A}_{k1}$ (pokud $l = k+1$, děláme $l-1-k = 0$ úprav, pak $\det \mathbb{A}'_{l1} = \det \mathbb{A}_{k1}$) tedy

$$a'_{l1} \det \mathbb{A}'_{k1} = (-1)^{l-k-1} a_{k1} \det \mathbb{A}_{k1}. \tag{∇}$$

Nyní dosadíme z ($\Box$), ($\triangle$) a (∇) do vzorce pro $\det \mathbb{A}'$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\det \mathbb{A}' = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1} &= (-1)^{k+1} a'_{k1} \det \mathbb{A}'_{k1} + (-1)^{l+1} a'_{l1} \det \mathbb{A}'_{l1} \\
&\qquad + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k,l}}^{n+1} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det \mathbb{A}'_{i1} \\
&= (-1)^{k+1}(-1)^{l-1-k} a_{l1} \det \mathbb{A}_{l1} + (-1)^{l+1}(-1)^{l-1-k} a_{k1} \det \mathbb{A}_{k1} \\
&\qquad + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k,l}}^{n+1} (-1)^{i+1} (-a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}) \\
&= (-1)^{l} a_{l1} \det \mathbb{A}_{l1} + (-1)^{l} a_{k1} \det \mathbb{A}_{k1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k,l}}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} \\
&= - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1} = - \det \mathbb{A}.
\end{aligned}
$$

Tím je důkaz proveden.

(iii) Bod (iii) dokážeme pomocí bodů (i) a (ii) a Lemmatu VI.9. Pro $n = 1$ je trvrzení triviální, protože na matici řádu 1 úpravu třetího druhu nelze provést.

Předpokládejme tedy, že $n \geq 2$, $\mathbb{A}$ je matice řádu n, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq l$. Matice $\mathbb{A}'$ nechť vznikne z matic $\mathbb{A}$ přičtením λ-násobku l-tého řádku ke k-tému řádku.

Definujme si dvě pomocné matice – matice $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ nechť se s maticí $\mathbb{A}$ shodují všude kromě k-tého řádku; přitom matice k-tý řádek $\mathbb{B}$ je roven l-tému řádku matice $\mathbb{A}$ a k-tý řádek $\mathbb{C}$ je roven λ-násobku l-tého řádku matice $\mathbb{A}$.

Matice $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}'$ splňují předpoklady Lemmatu VI.9 (pro $i = k$), tedy z tohoto lemmatu dostaneme

$$\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A} + \det \mathbb{C}.$$

Protože $\mathbb{C}$ vznikne z $\mathbb{B}$ vynásobením k-tého řádku číslem λ, již dokázaný bod (ii) dává

$$\det \mathbb{C} = \lambda \det \mathbb{B}.$$

Dále, v matici $\mathbb{B}$ se shodují k-tý a l-tý řádek. Tedy, pokud prohodíme k-tý a l-tý řádek, matice se nezmění. Tedy, podle již dokázaného bodu (i) máme

$$\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{B},$$

neboli $\det \mathbb{B} = 0$.

Dáme-li dohromady uvedené vztahy, dostaneme

$$\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A} + \det \mathbb{C} = \det \mathbb{A} + \lambda \det \mathbb{B} = \det \mathbb{A} + \lambda \cdot 0 = \det \mathbb{A}.$$

Tím je důkaz hotov.

K Větě VI.10 - význam a důsledky:

- Větu VI.10 lze použít k výpočtu determinantu. Máme-li zadanou čtvercovou matici řádu n, lze ji pomocí řádkových úprav převést na schodovitou (Věta VI.5(i)). U každé z úprav víme, díky Větě VI.10, jak změní hodnotu determinantu. Je-li čtvercová matice schodovitá, je to horní trojúhelníková matice. Pro ni spočteme determinant dle Věty VI.8. Ilustrace této metody uvidíme na řešených příkladech.

- Důkaz prvního bodu důsledku:

  Mějme transformaci T matic o n řádcích.

  Ta je konečnou posloupností řádkových úprav, dejme tomu $U_1, U_2, \ldots, U_k$.

  Podle Věty VI.10 pro každé j existuje nenulové číslo α_j, že kdykoli $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací úpravy U_j, máme $\det \mathbb{A}' = \alpha_j \det \mathbb{A}$. Tato čísla jsou

$$\alpha_j = \begin{cases} -1 & U_j \text{ je úprava prvního druhu,} \\ \lambda & U_j \text{ je vynásobení nějakého řádku nenulovým číslem } \lambda, \\ 1 & U_j \text{ je úprava třetího druhu.} \end{cases}$$

  Nyní je zřejmé, že pokud $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací transformace T (tedy postupnou aplikací úprav $U_1, U_2, \ldots, U_k$), pak

$$\det \mathbb{A}' = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \det \mathbb{A},$$

  tedy můžeme vzít $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$.

- Druhý bod důsledku plyne snadno z prvního bodu – při provedení transformace se determinant vynásobí nenulovým číslem. Pokud byl původně nulový, zůstane nulový; pokud byl původně nenulový, nenulovým zůstane.

K Větě VI.11

- Věta VI.7 říká, že $\mathbb{A}$ řádu n je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$. Věta VI.11 k tomu dodává další ekvivalentní podmínku, nenulovost determinantu. Máme tedy ekvivalence

$$\mathbb{A} \text{ je regulární } \Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = n \Leftrightarrow \det \mathbb{A} = 0.$$

- Důkaz věty: Nechť $\mathbb{A}$ je matice řádu n. Podle Věty VI.5(i) lze nějakou transformací převést na schodovitou matici $\mathbb{S}$.

  Pokud $\mathbb{A}$ není regulární, pak $h(\mathbb{A}) < n$ (Věta VI.7), tedy $h(\mathbb{S}) < n$ (Věta VI.5(iii)), a proto poslední řádek matice $\mathbb{S}$ je nulový ($\mathbb{S}$ je schodovitá). Tudíž $\det \mathbb{S} = 0$, a tedy i $\det \mathbb{A} = 0$ (dle druhého bodu důsledku).

  Pokud $\mathbb{A}$ je regulární, pak $h(\mathbb{A}) = n$ (Věta VI.7), tedy $h(\mathbb{S}) = n$ (Věta VI.5(iii)), a proto všechny řádky matice $\mathbb{S}$ jsou nenulové. $\mathbb{S}$ je čtvercová schodovitá matice, je to tedy horní trojúhelníková matice. Její determinant je roven součinu prvků na diagonále (Věta VI.8). Protože všechny řádky jsou nenulové, jsou všechny prvky na diagonále nenulové, a proto $\det \mathbb{S} \neq 0$. Tedy i $\det \mathbb{A} \neq 0$ (dle druhého bodu důsledku).

K Větě VI.12: Pro důkaz rozlišíme dva případy:

- $\mathbb{A}$ je regulární:

  Víme, že existuje transformace T, která $\mathbb{A}$ převede na jednotkovou matici $\mathbb{I}$ (viz důkaz Věty VI.7). Podle Věty VI.5(ii) existuje transformace T', která $\mathbb{I}$ převede na $\mathbb{A}$.

  Podle prvního bodu důsledku Věty VI.10 existuje (nenulové) číslo α takové, že kdykoli matice $\mathbb{C}'$ vznikne z $\mathbb{C}$ aplikací transformace T', platí $\det \mathbb{C}' = \alpha \det \mathbb{C}$.

  Protože $\mathbb{A}$ vznikne z $\mathbb{I}$ aplikací T', platí

$$\det \mathbb{A} = \alpha \det \mathbb{I} = \alpha \cdot 1 = \alpha,$$

tedy $\alpha = \det \mathbb{A}$.

Dále, platí $\mathbb{IB} = \mathbb{B}$. Protože aplikací T' na $\mathbb{I}$ vznikne $\mathbb{A}$, podle Věty VI.6 aplikací T' na $\mathbb{B}$ vznikne $\mathbb{AB}$.

Tedy
$$\det(\mathbb{AB}) = \alpha \det \mathbb{B} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}.$$

- $\mathbb{A}$ není regulární:

  V tomto případě je $\det \mathbb{A} = 0$ (Věta VI.11) a $h(\mathbb{A}) < n$ (Věta VI.7). Existuje transformace T, která převede $\mathbb{A}$ na schodovitou matici $\mathbb{S}$ (Věta VI.5(i)). Pak $h(\mathbb{S}) < n$ (Věta VI.5(iii)), tedy $\mathbb{S}$ má poslední řádek nulový.

  Označme $\mathbb{C}$ matici, která vznikne z $\mathbb{AB}$ aplikací transformace T. Podle Věty VI.6 je
  $$\mathbb{SB} = \mathbb{C},$$
  tedy $\mathbb{C}$ má poslední řádek nulový. Proto $h(\mathbb{C}) < n$, a tedy $h(\mathbb{AB}) < n$. Tudíž $\det(\mathbb{AB}) = 0$ (Věta VI.11).

  Rovnost tedy platí, protože obě strany jsou nulové.

Poznámky ke sloupcovým úpravám:

- Varianta Lemmatu VI.9 platí i pro sloupce (tj. pro matice, co se shodují až na jeden sloupec). Důkaz je podobný jako pro řádkovou variantu (ba jednodušší).

- Věta VI.10 platí i pro sloupcové úpravy:

  - Důkaz pro úpravy druhého druhu je analogický (ba jednodušší).
  - Důkaz pro úpravy prvního druhu je složitější:

    Náznak důkazu: Pro $n = 1$ je to triviální, pro $n = 2$ snadné.

    Předpokládejme, že $n \geq 2$, platí to pro n a mějme matici řádu $n + 1$, přehodíme v ní k-tý a l-tý sloupec, $k < l$.

    Pokud $k > 1$, pak je indukční krok snadný.

    Pokud $k = 1$ a $l = 2$, pak musíme definici použít dvakrát za sebou (nejprve na matici $\mathbb{A}'$ a pak ještě jednou na matice $\mathbb{A}'_{i1}$).

    Pokud $k = 1$ a $l > 2$, pak použijeme jednou definici, a potom pomocí indukčního předpokladu převedeme na případ $l = 2$.

  - Důkaz pro úpravy třetího druhu je pak stejný jako pro řádkové úpravy.

K Větám VI.13 a VI.14:

- *Myšlenka důkazu Věty VI.13: Rovnost platí pro trojúhelníkové matice (Věta VI.8). Každou čtvercovou matici lze převést na schodovitou nějakou transformací. Při té transformaci se determinant* $\mathbb{A}$ *změní přesně stejným způsobem jako determinant* $\mathbb{A}^T$*.*

- Věta VI.14 je užitečná početní metoda, dokazovat ji nebudeme.