Doplňující cvičení k determinantům a lineárním zobrazením

Tato cvičení mohou pomoci k lepšímu pochopení látky a některých souvislostí. Nejsou zcela nezbytná pro úspěšné studium matematiky na IES, ale jejich jednodušší či konkrétní verze se mohou objevit při zkoušce.

Cvičení 1: Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $n \times n$ a $\mathbb{B}$ je matice typu $m \times m$. Uvažme matici $\mathbb{C}$ typu $(m+n) \times (m+n)$, která má tvar

$$\mathbb{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{B} \end{array}\right),$$

tj., matici $\mathbb{A}$ umístíme do „levého horního rohu“, matici $\mathbb{B}$ do „pravého dolního rohu“ a doplníme nulami.

Ukažte, že $\det \mathbb{C} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$.

Návod: Použijte indukci podle n a definici determinantu. Speciálně si rozmyslete, jak vypadají matice $\mathbb{C}_{i1}$.

Cvičení 2: Za situace z Cvičení 1 uvažme matice

$$\mathbb{C}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & \text{něco} \\ \hline 0 & \mathbb{B} \end{array}\right) \text{ a } \mathbb{C}'' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A} & 0 \\ \hline \text{něco} & \mathbb{B} \end{array}\right),$$

kde „něco“znamená, že na příslušných místech matice mohou být libovolná čísla.

Ukažte, že $\det \mathbb{C}' = \det \mathbb{C}'' = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$.

Návod: Pro $\mathbb{C}'$ postupujte zcela stejně jako ve Cvičení 1. Pro $\mathbb{C}''$ použijte například vztah determinantu matice a matice transponované.

Cvičení 3: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a uvažme determinant jako funkci n^2 proměnných, tj.

$$f(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Ukažte, že f je třídy C^∞.
2. Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$.

Návod: 1. Použijte definici determinantu a matematickou indukci. (Podobně se dokazovala spojitost). 2. Použijte rozvoj determinantu podle j-tého sloupce (nebo podle i-tého řádku).

Cvičení 4: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ jsou řádkové vektory délky n.

1. Uvažme zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované vzorcem

$$f(\boldsymbol{x}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

   Tj., vektor $\boldsymbol{x}$ napíšeme do řádku, pomocí řádků $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ doplníme na matici typu $n \times n$ a spočteme její determinant.

   Ukažte, že f je lineární zobrazení.

2. Nechť $j \in \{1, \ldots, n\}$. Uvažme zobrazení $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované vzorcem

$$f_j(\boldsymbol{x}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

   Tj., vektor $\boldsymbol{x}$ napíšeme do řádku, pomocí řádků $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ doplníme na matici typu $n \times n$ takovým způsobem, že $\boldsymbol{x}$ je v j-tém řádku, a spočteme její determinant.

   Ukažte, že f_j je lineární zobrazení.

Návod: Použijte Lemma VI.9 a Větu VI.10(ii).

Cvičení 5: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ jsou sloupcové vektory délky n.

1. Uvažme zobrazení $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované vzorcem

$$g(\boldsymbol{x}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

   Tj., vektor $\boldsymbol{x}$ napíšeme do sloupce, pomocí sloupců $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ doplníme na matici typu $n \times n$ a spočteme její determinant.

   Ukažte, že g je lineární zobrazení.

2. Nechť $j \in \{1, \ldots, n\}$. Uvažme zobrazení $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované vzorcem

$$g_j(\boldsymbol{x}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

   Tj., vektor $\boldsymbol{x}$ napíšeme do sloupce, pomocí sloupců $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ doplníme na matici typu $n \times n$ takovým způsobem, že $\boldsymbol{x}$ je v j-tém sloupci, a spočteme její determinant.

   Ukažte, že g_j je lineární zobrazení.

Návod: Použijte sloupcové varianty Lemmatu VI.9 a Věty VI.10(ii).

Cvičení 6: Najděte reprezentující matice lineárních zobrazení z Cvičení 4 a 5.

Návod: Použijte rozvoj determinantu podle j-tého řádku (pro Cvičení 4) nebo podle j-tého sloupce (pro cvičení 5).

Cvičení 7: Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení.

1. Ukažte, že f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^n$.
2. Nechť $\mathbb{A}$ je reprezentující matice zobrazení f. Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Návod: Použijte vzoreček, který říká, co znamená, že $\mathbb{A}$ reprezentuje f.