Extrémy – elementární metody, příklady 9(b,c) ze supersemináře

Množina, na které hledáme extrémy (nebo přesněji supremum a infimum), není vždy kompaktní. Pokud není uzavřená, hodí se znát následující tvrzení.

Lemma. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a f je spojitá funkce na $\overline{M}$. Pak platí:*

(a) f je shora omezená na M, právě když je shora omezená na $\overline{M}$.

(b) Je-li f shora omezená na M, pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$

Analogické tvrzení platí pro omezenost zdola a infimum.

Důkaz: Dokážeme nejprve následující pomocné tvrzení:

(*) Nechť $c \in \mathbb{R}$. Pokud existuje $x \in \overline{M}$, pro které $f(x) > c$, pak existuje také bod $y \in M$, pro který $f(y) > c$.

Mějme tedy $x \in \overline{M}$ splňující $f(x) > c$. Zvolme $\varepsilon > 0$, aby

$$f(x) - \varepsilon > c.$$

Protože f je spojitá na $\overline{M}$, je spojitá v bodě x vzhledem k M. Tedy (podle definice spojitosti v bodě vzhledem k množině) existuje $\delta > 0$, že

$$\text{pro každé } y \in B(x,\delta) \cap \overline{M} \text{ platí } f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

Protože $x \in \overline{M}$, platí $B(x,\delta) \cap M \neq \emptyset$ (viz příklad 2 ze supersemináře). Zvolme tedy $y \in B(x,\delta) \cap M$. Pak $f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$, tedy

$$f(y) > f(x) - \varepsilon > c.$$

Tím je dokázáno tvrzení (*).

Nyní můžeme dokázat tvrzení (a). Implikace $\Leftarrow$ je zřejmá, protože $M \subset \overline{M}$. Dokažme implikaci $\Rightarrow$: Předpokládejme, že f je shora omezená na M. Nechť c je nějaká horní závora množiny $f(M)$. Pak z trvzení (*) plyne, že c je také horní závora M (stačí použít obměnu implikace z (*)).

Ze stejné úvahy dostaneme i důkaz tvrzení (b): Předpokládejme, že f je shora omezená na M. Nechť $s = \sup f(M)$. Pak s je horní závora $f(M)$, tedy i horní závora $f(\overline{M})$ (dle (*) jako v předchozím odstavci). Navíc, je-li $s' < s$, není to horní závora $f(M)$ (protože s je supremum, tedy nejmenší horní závora), a tedy to není ani horní závora $f(\overline{M})$ (protože to je větší množina). Tedy s je nejmenší horní závora $f(\overline{M})$, neboli $s = \sup f(\overline{M})$.

Máme tedy uvedné lemma dokázané. Důkaz není třeba se učit, ale je užitečné si ho projít kvůli pochopení, co to vlastně říká a proč.

Aplikace uvedeného lemmatu při počítání:

Máme najít supremum a infimum funkce f na množině M, která je omezená, ale ne uzavřená.

Pokud f je spojitá nejen na M, ale i na $\overline{M}$ (například, je-li spojitá na celém prostoru), pak f nabývá na $\overline{M}$ svého maxima i minima (podle Věty V.10, protože $\overline{M}$ je kompaktní).

V tom případě najdeme body, v nichž f nabývá minima a maxima na $\overline{M}$ běžnými metodami (pomocí různých nutných podmínek najdeme všechny „podezřelé body“ a mezi nimi najdeme body, v nichž je funkční hodnota nejmenší a největší).

Takto nalezené minimum a maximum budou $\inf f(M)$ a $\sup f(M)$ (dle lemmatu). Pokud některý z bodů maxima patří do M (nejen do $\overline{M}$), pak se suprema na M nabývá v tomto bodě. Pokud žádný z bodů maxima do M nepatří, pak se supremum na M nenabývá.

Analogicky pro body minima a infimum.

Příklad 9b) $f(x,y) = x^2 + xy$, $M = \{[x,y]; x^2 + y^2 < 4\}$

1. krok: f je spojitá na $\mathbb{R}^2$. M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru 2. Je to tedy množina omezená, není však uzavřená, její uzávěr je

$$\overline{M} = \{[x,y]; x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

To je uzavřený kruh o středu 0 a poloměru 2, je to tedy kompaktní množina. Proto f nabývá na $\overline{M}$ svého minima a maxima. Tyto extrémy nyní najdeme.

K tomu si $\overline{M}$ rozdělíme na vnitřek a hranici.

2. krok: Vnitřkem $\overline{M}$ je množina M (otevřený kruh). Je-li nějaký bod extrému ve vnitřku, podle Věty V.6 v něm musí být nulové parciální derivace. Ty se rovnají

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Obě jsou nulové pouze v bodě $[0,0]$. Máme tedy první podezřelý bod

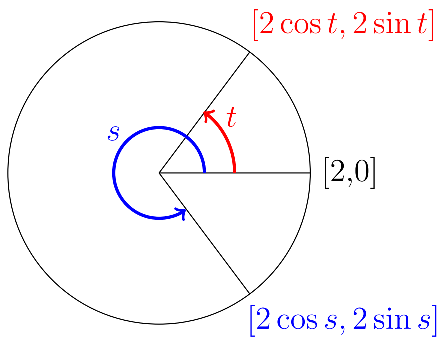
$$[0,0], \quad f(0,0) = 0.$$

3. krok: Hranici tvoří kružnice daná rovnicí $x^2 + y^2 = 4$. Tu můžeme vyšetřit dvěma způsoby – pomocí parametrizace nebo pomocí věty o multiplikátorech. Ukážeme si obě možnosti.

3.1: Parametrizace: Kružnici o středu 0 a poloměru 2 můžeme parametrizovat

$$[x, y] = [2\cos(t), 2\sin(t)], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Geometrický význam této parametrizace je ilustrován na následujícím obrázku – parametr t značí příslušný úhel.



Tedy, interpretujeme-li t jako čas, pak v čase 0 začínáme v bodě $[2, 0]$, jak běží čas, pohybujeme se rovnoměrně po kružnici proti směru hodinových ručiček. Tedy, má-li f v bodě $[2\cos t_0, 2\sin t_0]$ extrém na $\overline{M}$, pak tam má příslušný extrém i na hraniční kružnici. A tedy funkce $f(2\cos t, 2\sin t)$ má extrém v bodě t_0. Platí

$$f(2\cos t, 2\sin t) = 4\cos^2 t + 4\cos t \sin t = 2(1 + \cos 2t + \sin 2t). \qquad (**)$$

Derivace této funkce je

$$4(-\sin 2t + \cos 2t)$$

To je rovno nule, právě když $\sin 2t = \cos 2t$, neboli $\operatorname{tg} 2t = 1$ (kdyby $\cos 2t = 0$, pak by podmínka dala $\sin 2t = 0$ a tyto dvě věci zároveň platit nemohou). To platí, právě když $2t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, neboli $t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce $(**)$ je π-periodická, v bodech $\frac{\pi}{8} + k\pi$ má hodnotu

$$2(1 + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = 2(1 + \sqrt{2})$$

a v bodech $\frac{5}{8}\pi + k\pi$ má hodnotu

$$2(1 + \cos\frac{5}{4}\pi + \sin\frac{5}{4}\pi) = 2(1 - \sqrt{2}).$$

Nyní si rozmysleme, co jsme to spočítali. Měli jsme hledat extrémy funkce $(**)$ na $[0, 2\pi]$. Ta funkce je ovšem π-periodická, takže stačí hledat lokální extrémy na $\mathbb{R}$ (maximum na $[0, 2\pi]$ je stejné jako maximum na $\mathbb{R}$, stejně tak minimum).

3.2 Použití věty o multiplikátorech (Věty V.18):

f je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$. Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ je rovněž třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$. Je

$$\nabla f(x, y) = [2x + y, x], \qquad \nabla g(x, y) = [2x, 2y].$$

Gradient funkce g je nulový pouze v bodě $[0, 0]$, který v $H(M)$ neleží. Je-li tedy v bodě $[x, y]$ lokální extrém f vzhledem k $H(M)$, existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že platí

$$\begin{aligned} 2x + y + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ x + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 4, \end{aligned} \tag{$\circ$}$$

kde třetí rovnice znamená, že $[x, y] \in H(M)$. Z prvních dvou rovnic se pokusíme vyloučit λ: x-násobek druhé odečteme od y-násobku první a dostaneme

$$2xy + y^2 - x^2 = 0.$$

Po dosazení $y^2 = 4 - x^2$ (z $(\circ)$) dostaneme

$$2xy + 4 - 2x^2 = 0.$$

Pokud $x = 0$, rovnost neplatí, proto můžeme vyjádřit

$$y = x - \frac{2}{x}. \tag{$\square$}$$

Toto dosadíme do $(\circ)$ a vyjde

$$x^2 + (x - \frac{2}{x})^2 = 4, \text{ neboli } 2x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} = 4,$$

což upravíme na

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0.$$

To je bikvadratická rovnice, dostáváme

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Oba kořeny jsou kladné, tedy pro x dostáváme čtyři možnosti

$$\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Příslušné hodnoty y spočteme z ($\square$):

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{2}{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ve druhém případě dostaneme analogicky

$$y = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{2}{\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \mp\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Dostáváme tedy čtyři podezřelé body, spočteme v nich hodnotu f:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}) &= 2+\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2(1+\sqrt{2}), \\ f(-\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\sqrt{2-\sqrt{2}}) &= 2(1+\sqrt{2}) \textit{ (stejně jako v prvním případě)}, \\ f(\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2+\sqrt{2}}) &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{2} = 2(1-\sqrt{2}), \\ f(-\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}) &= 2(1-\sqrt{2}) \textit{ (stejně jako v předchozím případě).} \end{aligned}$$

4. krok: Extrémy na $\overline{M}$: Víme, že na $\overline{M}$ extrémy existují. Různými metodami jsem našli pět podezřelých bodů, extrémy musí být v některých z nich (jinde být nebudou). Vidíme, že největší hodnota je $2(1+\sqrt{2})$ a nejmenší $2(1-\sqrt{2})$. Nabývají se v příslušných bodech hraniční kružnice nalezených ve 3. kroku.

5. krok: Závěr: $\sup f(M) = 2(1+\sqrt{2})$, $\inf f(M) = 2(1-\sqrt{2})$. Ani jedna z hodnot se na M nenabývá.

Příklad 9(c). $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2+1}$, $M=\mathbb{R}^2$.

1. krok: Obecné úvahy: Funkce f je spojitá, ba třídy C^1 (dokonce i C^∞) na $\mathbb{R}^2$. Množina $M=\mathbb{R}^2$ není kompaktní. Není ani omezená, takže předem nemáme zaručeno nic – ani existenci extrémů ani omezenost f. Nicméně, protože v čitateli jsou x i y v první mocnině a ve jmenovateli v druhé mocnině, lze očekávat, že pro „velká x,y“ bude čitatel výrazně větší než jmenovatel (v absolutní hodnotě), tedy funkce asi bude omezená. Zkusíme tedy nejprve najít podezřelé body a potom zpřesnit uvedené přibližné úvahy.

2. krok: Spočteme parciální derivace a podle Věty V.6 najdeme podezřelé body. Jest:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1\cdot(x^2+y^2+1)-(x-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{-x^2+2xy+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{-1\cdot(x^2+y^2+1)-(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{-x^2-2xy+y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Mají-li obě být nulové, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
-x^2+2xy+y^2+1&=0,\\
-x^2-2xy+y^2-1&=0.
\end{aligned}$$

Pokud tyto rovnice sečteme a odečteme, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
-x^2+y^2&=0,\\
2xy+1&=0.
\end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme $y=x$ nebo $y=-x$. Pokud $y=x$, z druhé rovnice plyne $2x^2+1=0$, což nemá řešení. Pokud $y=-x$, z druhé rovnice plyne $-2x^2+1=0$, tedy $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dostáváme dva podezřelé body:

$$\begin{aligned}
&[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}], \qquad f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2};\\
&[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}], \qquad f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

3. krok: Závěrečná úvaha: Pokud f má nějaké extrémy, pak to musí být mezi dvěma body nalezenými ve 2. kroku. Abychom dokázali, že to jsou opravdu extrémy, uvažme následující odhad:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x-y}{x^2+y^2+1}\right| = \frac{|x-y|}{x^2+y^2+1} \leq \frac{\sqrt{1+1}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}),$$

kde $\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}t}{t^2+1}$. (Uvedená nerovnost plyne z Cauchyovy nerovnosti, tj. z Věty I.1.)

Platí, že $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. Tedy, z definice limity plyne, že existuje takové $t_0 > 0$, že pro $t \geq t_0$ platí $\varphi(t) < \frac{\sqrt{2}}{4}$. (Tuto hodnotu volíme proto, že je menší, než hodnoty v podezřelých bodech.)

Nyní si uvědomme, že množina $\overline{B(\boldsymbol{o}, t_0)}$ je kompaktní (a neprázdná), tedy f na této množině nabývá extrémů. Pokud jsou ve vnitřku, musí být parciální derivace nulové, což jsme řešili ve 2. kroku. Tím dostaneme ony dva podezřelé body.

Hranicí uvedeného kruhu je příslušná kružnice. Je-li $[x, y]$ na této kružnici, je $\sqrt{x^2+y^2} = t_0$, a tedy

$$|f(x,y)| \leq \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(t_0) < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Z toho dostaneme, že maximum f na $\overline{B(\boldsymbol{o}, t_0)}$ je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (největší hodnota z podezřelých bodů ve vnitřku, na hranici je hodnota f menší) a minimu je $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (nejmenší hodnota z podezřelých bodů ve vnitřku, na hranici je hodnota f větší).

Závěrem si uvědomme, že pokud $[x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(\boldsymbol{o}, t_0)}$, je $\sqrt{x^2+y^2} > t_0$, a tedy

$$|f(x,y)| \leq \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Proto nalezené maximum a minimum na $\overline{B(\boldsymbol{o}, t_0)}$ jsou extrémy na celém $\mathbb{R}^2$.