

## V.2 Spojitá a omezená lineární zobrazení

**Tvrzení 6.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  a  $(Y, \mathcal{U})$  jsou TVS nad  $\mathbb{F}$  a  $L : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i)  $L$  je spojité.
- (ii)  $L$  je spojité v bodě  $\mathbf{o}$ .
- (iii)  $L$  je **stejněměrně spojité**, tj.

$$\forall U \in \mathcal{U}(\mathbf{o}) \exists V \in \mathcal{T}(\mathbf{o}) \forall x, y \in X : x - y \in V \Rightarrow L(x) - L(y) \in U.$$

**Tvrzení 7.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  je TVS nad  $\mathbb{F}$  a  $L : X \rightarrow \mathbb{F}$  je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i)  $L$  je spojité.
- (ii)  $\ker L$  je uzavřený podprostor  $X$ .
- (iii) Existuje  $U \in \mathcal{T}(\mathbf{o})$  takové, že  $L(U)$  je omezená množina v  $\mathbb{F}$ .

Je-li  $L$  nespojité, je  $\ker L$  hustý podprostor  $X$ .

**Definice.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  je TVS a  $A \subset X$ . Množina  $A$  je **omezená** v  $(X, \mathcal{T})$ , pokud pro každé  $U \in \mathcal{T}(\mathbf{o})$  existuje  $\lambda > 0$ , pro které  $A \subset \lambda U$ .

**Tvrzení 8.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  a  $(Y, \mathcal{U})$  jsou TVS nad  $\mathbb{F}$  a  $L : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Uvažme následující podmínky:

- (i)  $L$  je spojité.
- (ii) Pro každou  $A \subset X$  omezenou je  $L(A)$  omezená v  $Y$  (tj.  $L$  je **omezené**).

Pak platí (i) $\Rightarrow$ (ii). Je-li topologie  $\mathcal{T}$  generována nějakou translačně invariantní metrikou na  $X$ , pak (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

**Poznámka.** Z Věty 12 v oddílu V.4 plyne, že je-li TVS  $(X, \mathcal{T})$  metrizable, tj. topologie  $\mathcal{T}$  je generována nějakou metrikou, pak tuto metriku lze zvolit translačně invariantní.

**Definice.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  a  $(Y, \mathcal{U})$  jsou TVS nad  $\mathbb{F}$  a  $L : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Říkáme, že  $L$  je

- **izomorfismus  $X$  do  $Y$** , je-li  $L$  spojité, prosté a  $L^{-1}$  je spojité na  $L(X)$ ;
- **izomorfismus  $X$  na  $Y$** , je-li  $L$  spojité, prosté a na  $Y$  a  $L^{-1}$  je spojité na  $Y$ .

Prostory  $X$  a  $Y$  jsou **izomorfní**, existuje-li izomorfismus  $X$  na  $Y$ .

## V.3 Prostory konečné a nekonečné dimenze

**Tvrzení 9.** Necht'  $X$  je HTVS konečné dimenze.

- (a) Je-li  $Y$  libovolný TVS a  $L : X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení, pak  $L$  je spojité.
- (b) Prostor  $X$  je izomorfní  $\mathbb{F}^n$ , kde  $n = \dim X$ .

**Důsledek 10.** Necht'  $X$  je HTVS. Pak každý jeho podprostor konečné dimenze je uzavřený.

**Definice.** Necht'  $(X, \mathcal{T})$  je TVS a  $A \subset X$ . Množina  $A$  se nazývá **totálně omezená** (nebo též **prekompaktní**), jestliže pro každé  $U \in \mathcal{T}(\mathbf{o})$  existuje  $F \subset X$  konečná, pro kterou  $A \subset F + U$ .

**Poznámka:** Každá kompaktní množina v TVS je totálně omezená. Každá totálně omezená množina je omezená.

**Věta 11.** Necht'  $X$  je HTVS. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i)  $\dim X < \infty$ .
- (ii) Existuje kompaktní okolí nuly v  $X$ .
- (iii) Existuje totálně omezené okolí nuly v  $X$ .