V.4 Metrizovatelnost topologických vektorových prostorů

Věta 12 (charakterizace metrizovatelných TVS). *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je HTVS. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *X je metrizovatelný (tj., topologie $\mathcal{T}$ je generovaná nějakou metrikou na X).*
(ii) *Existuje translačně invariantní metrika na X, která generuje topologii $\mathcal{T}$.*
(iii) *Existuje spočetná báze okolí $\boldsymbol{o}$ v $(X,\mathcal{T})$.*

Tvrzení 13. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je HTVS, který má spočetnou bázi okolí $\boldsymbol{o}$. Pak existuje funkce $p : X \to [0,\infty)$ s vlastnostmi:*

(a) $p(\boldsymbol{o}) = 0$;
(b) $\forall x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\} : p(x) > 0$;
(c) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \leq 1 : p(\lambda x) \leq p(x)$;
(d) $\forall x, y \in X : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;
(e) $\forall x \in X : \lim\limits_{t\to 0+} p(tx) = 0$;
(f) $\Big\{\{x \in X; p(x) < r\}; r > 0\Big\}$ *tvoří bázi okolí $\boldsymbol{o}$ v X.*

Pak vzorec $\rho(x,y) = p(x-y)$, $x, y \in X$, definuje translačně invariantní metriku na X, která generuje topologii $\mathcal{T}$.

Poznámka. Je-li X vektorový prostor, pak funkce $p : X \to [0,\infty)$ s vlastnostmi (a)–(e) z předchozího tvrzení se nazývá **F-norma** na X. Pokud p splňuje vlastnosti (a),(c)–(e), nazývá se **F-pseudonorma**.

Důsledek 14. *HTVS, který má omezené okolí nuly, je metrizovatelný.*

V.5 Minkowského funkcionály, pseudonormy a generování lokálně konvexních topologií

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující množina. **Minkowského funkcionálem** množiny A rozumíme funkci definovanou vzorcem

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0; x \in \lambda A\}, \qquad x \in X.$$

Tvrzení 15 (základní vlastnosti Minkowského funkcionálu). *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující množina.*

- *Pro $x \in X$ a $t > 0$ platí $p_A(tx) = tp_A(x)$.*
- *Je-li A konvexní, je p_A sublineární funkcionál.*
- *Je-li A absolutně konvexní, je p_A pseudonorma.*

Lemma 16. *Nechť X je TVS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pokud $x \in \overline{A}$ a $y \in \operatorname{Int} A$, pak $\{tx + (1-t)y; t \in [0,1)\} \subset \operatorname{Int} A$.*

Tvrzení 17 (o Minkowského funkcionálu konvexního okolí nuly). *Nechť X je TVS a $A \subset X$ je konvexní okolí $\boldsymbol{o}$. Pak platí:*

- *p_A je spojitá na X.*
- *$\operatorname{Int} A = \{x \in X; p_A(x) < 1\}$.*
- *$\overline{A} = \{x \in X; p_A(x) \leq 1\}$.*
- *$p_A = p_{\overline{A}} = p_{\operatorname{Int} A}$.*

Důsledek 18. *Každý LCS je úplně regulární. Každý HLCS je Tichonovův.*

Poznámka: Lze ukázat, že dokonce každý TVS je úplně regulární, a tedy každý HTVS je Tichonovův. Důkaz tohoto obecnějšího případu je obtížnější, lze využít obecnější verzi Tvrzení 13 z oddílu V.4. Důkaz, že každý TVS je regulární, je snadný, plyne z Větičky 3(ii).

Věta 19 (o topologii generované systémem pseudonorem). *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ neprázdný systém pseudonorem na X. Pak existuje právě jedna topologie $\mathcal{T}$ na X, pro kterou $(X, \mathcal{T})$ je TVS a systém*

$$\Big\{\{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_k(x) < c_k\}; p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0\Big\}$$

je báze okolí $\boldsymbol{o}$ v $(X, \mathcal{T})$. Topologie $\mathcal{T}$ je navíc lokálně konvexní. Topologie $\mathcal{T}$ je Hausdorffova, právě když pro každé $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$, pro které $p(x) > 0$.

Definice. Topologie $\mathcal{T}$ z Věty 19 se nazývá **topologie generovaná systémem pseudonorem** $\mathcal{P}$.

Věta 20 (o generování lokálně konvexních topologií). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je LCS. Nechť $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je systém všech spojitých pseudonorem na prostoru $(X, \mathcal{T})$. Pak topologie generovaná systémem $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ je rovna $\mathcal{T}$.*

Tvrzení 21. *Nechť X je vektorový prostor.*

(1) *Je-li p pseudonorma na X, pak množina $A = \{x \in X; p(x) < 1\}$ je absolutně konvexní, pohlcující a platí $p = p_A$.*
(2) *Nechť p, q jsou dvě pseudonormy na X. Pak $p \le q$, právě když*
$$\{x \in X; p(x) < 1\} \supset \{x \in X; q(x) < 1\}.$$
(3) *Nechť $\mathcal{P}$ je neprázdný systém pseudonorem na X a $\mathcal{T}$ je topologie generovaná systémem $\mathcal{P}$. Nechť p je pseudonorma na X. Pak p je $\mathcal{T}$-spojitá, právě když existují $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ a $c > 0$, pro která platí $p \le c \cdot \max\{p_1, \dots, p_k\}$.*

Věta 22 (o metrizovalnosti LCS). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je HLCS. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *X je metrizovatelný (tj., topologie $\mathcal{T}$ je generovaná nějakou metrikou na X).*
(ii) *Existuje translačně invariantní metrika na X, která generuje topologii $\mathcal{T}$.*
(iii) *Existuje spočetná báze okolí $\boldsymbol{o}$ v $(X, \mathcal{T})$.*
(iv) *Topologie $\mathcal{T}$ je generovaná spočetným systémem pseudonorem.*

Věta 23 (charakterizace normovatelných TVS). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je HTVS. Pak X je normovatelný (tj. $\mathcal{T}$ je generovaná normou), právě když v X existuje omezené konvexní okolí $\boldsymbol{o}$.*

Tvrzení 24. *Nechť X je LCS.*

(a) *Množina $A \subset X$ je omezená, právě když každá spojitá pseudonorma p na X je omezená na A. (Podmínku stačí testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X.)*
(b) *Nechť Y je LCS a $L : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak L je spojité, právě když*
$$\forall q \text{ spojitou pseudonormu na } Y\ \exists p \text{ spojitá pseudonorma na } X\ \forall x \in X : q(L(x)) \le p(x).$$
Pokud $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru X a $\mathcal{Q}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru Y, pak je spojitost L ekvivalentní podmínce
$$\forall q \in \mathcal{Q}\ \exists p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}\ \exists c > 0\ \forall x \in X : q(L(x)) \le c \cdot \max\{p_1(x), \dots, p_k(x)\}.$$
(c) *Net (x_τ) konverguje k bodu $x \in X$, právě když pro každou spojitou pseudonormu p na X platí $p(x_\tau - x) \to 0$. (Podmínku stačí testovat pro nějaký systém pseudonorem generující topologii X.)*