V.6 F-prostory a Fréchetovy prostory

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS.

- Prostor X se nazývá F-**prostor**, pokud $\mathcal{T}$ je generována nějakou úplnou translačně invariantní metrikou.
- Lokálně konvexní F-prostor se nazývá **Fréchetův prostor**.

Příklady 25.

(1) *Každý Banachův prostor je i Fréchetův prostor.*
(2) *Prostor $L^p(\mu)$ pro $p \in (0,1)$ je F-prostor.*
(3) *Prostory $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$, $H(\Omega)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathscr{D}_K(\Omega)$ zmíněné v Příkladech 1 jsou Fréchetovy prostory.*

Tvrzení 26. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je F-prostor. Pak každá translačně invariantní metrika, která generuje topologii $\mathcal{T}$, je úplná.*

Tvrzení 27. *Nechť X je F-prostor. Pak množina $A \subset X$ je kompaktní, právě když je totálně omezená a uzavřená.*

Tvrzení 28. *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je totálně omezená. Pak* $\operatorname{aco} A$ *je též totálně omezená.*

Důsledek 29. *Nechť X je Fréchetův prostor a $A \subset X$ kompaktní podmnožina. Pak $\overline{\operatorname{aco} A}$ je rovněž kompaktní.*

Věta 30 (Banach-Steinhausova věta). *Nechť X je Fréchetův prostor a Y je LCS. Nechť (T_n) je posloupnost spojitých lineárních zobrazení $T_n : X \to Y$. Nechť pro každé $x \in X$ existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ v Y. Pak zobrazení $T : X \to Y$ definované předpisem $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ pro $x \in X$ je spojité.*

Poznámka: Věta 30 platí i za slabších předpokladů – pokud X je F-prostor a Y je TVS. Důkaz je podobný, používá však složitější pojem stejné spojitosti.

Věta 31 (o otevřeném zobrazení). *Nechť X a Y jsou F-prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení X na Y. Pak T je otevřené zobrazení. Speciálně, je-li T navíc prosté, je T^{-1} spojité, tj. T je izomorfismus X na Y.*