V.7 Oddělování v lokálně konvexních prostorech

Definice. Nechť X je TVS nad $\mathbb{F}$. Symbolem X^* budeme značit vektorový prostor všech spojitých lineárních funkcionálů $f : X \to \mathbb{F}$. Prostor X^* nazýváme **duálním prostorem** (či **duálem**) prostoru X.

Poznámka: X^* definujeme pouze jako vektorový prostor, prozatím na něm nedefinujeme žádnou topologii. Později si ukážeme některé přirozené topologie na X^*.

Věta 32 (Hahn-Banachova rozšiřovací věta). *Nechť X je LCS nad $\mathbb{F}$, $Y \subset\subset X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $g \in X^*$ splňující $g|_Y = f$.*

Poznámka: Předpoklad, že X je lokálně konvexní, je podstatný, v TVS věta neplatí.

Důsledek 33 (oddělování od podprostoru). *Nechť X je LCS, Y uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in X^*$ splňující $f|_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*

Důsledek 34 (důkaz hustoty pomocí Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je LCS a $Z \subset\subset Y \subset\subset X$. Pak Z je hustý v Y, právě když*

$$\forall f \in X^* : f|_Z = 0 \Rightarrow f|_Y = 0.$$

Věta 35 (oddělovací Hahn-Banachova věta). *Nechť X je LCS, $A, B \subset X$ neprázdné disjunktní konvexní množiny.*

(a) *Pokud A má neprázdný vnitřek, pak existuje $f \in X^* \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$, že platí*

$$\forall a \in A \,\forall b \in B : \operatorname{Re} f(a) \le c \le \operatorname{Re} f(b).$$

(b) *Pokud A je kompaktní a B uzavřená, pak existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, že platí*

$$\forall a \in A \,\forall b \in B : \operatorname{Re} f(a) \le c < d \le \operatorname{Re} f(b).$$

Důsledek 36. *Nechť X je LCS, $A \subset X$ neprázdná množina a $x \in X$. Pak platí:*

(a) *$x \in X \setminus \overline{\operatorname{co}} A$, právě když existuje $f \in X^*$ splňující*

$$\operatorname{Re} f(x) > \sup\{\operatorname{Re} f(a); a \in A\}.$$

(b) *$x \in X \setminus \overline{\operatorname{aco}} A$, právě když existuje $f \in X^*$ splňující*

$$|f(x)| > \sup\{|f(a)|\,; a \in A\}.$$