

A.1 Topologické prostory a základní topologické pojmy

Definice. **Topologickým prostorem** rozumíme dvojici (X, \mathcal{T}) , kde X je množina a \mathcal{T} je nějaký systém podmnožin množiny X , který má následující vlastnosti:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.
- (b) Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ libovolná podmnožina, pak $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.
- (c) Pro každé dvě množiny $U, V \in \mathcal{T}$ platí $U \cap V \in \mathcal{T}$.

System \mathcal{T} s těmito vlastnostmi nazýváme **topologií** na X . Místo (X, \mathcal{T}) často píšeme jen X (víme-li, jakou topologii uvažujeme).

Definice. Nechť (X, \mathcal{T}) je topologický prostor.

- Množina $A \subset X$ se nazývá **otevřená v** (X, \mathcal{T}) (nebo též **\mathcal{T} -otevřená**, případně krátce **otevřená**), pokud $A \in \mathcal{T}$.
- Nechť $A \subset X$ a $x \in A$. Bod x se nazývá **vnitřním bodem** množiny A , pokud existuje otevřená množina B , pro kterou platí $x \in B \subset A$.
- **Vnitřkem** množiny $A \subset X$ nazýváme množinu všech jejích vnitřních bodů. Vnitřek A značíme $\text{Int } A$, případně podrobněji $\text{Int}_{\mathcal{T}} A$.
- Množina $A \subset X$ se nazývá **okolím bodu** $x \in X$, pokud je x vnitřním bodem množiny A .
- Nechť $A \subset X$ a $x \in X$. Bod x se nazývá **hraničním bodem** množiny A , pokud pro každé okolí U bodu x platí $U \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- **Hranicí** množiny $A \subset X$ nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů. Hranici A značíme ∂A , případně podrobněji $\partial_{\mathcal{T}} A$. (Někdy se hranice značí $H(A)$ nebo též $\text{bd } A$.)
- Množina $A \subset X$ se nazývá **uzavřená**, pokud obsahuje všechny své hraniční body, tj. pokud $\partial A \subset A$.
- **Uzávěrem** množiny $A \subset X$ rozumíme množinu $A \cup \partial A$. Uzávěr množiny A značíme \bar{A} , případně $\bar{A}^{\mathcal{T}}$. (Někdy se uzávěr množiny A značí také $\text{cl } A$, případně $\text{cl}_{\mathcal{T}} A$ nebo $\mathcal{T}\text{-cl } A$.)

Tvrzení 1. Nechť (X, \mathcal{T}) je topologický prostor a $A \subset X$.

- (i) Vnitřek množiny A je největší otevřená množina obsažená v A .
- (ii) Množina A je uzavřená, právě když $X \setminus A$ je otevřená.
- (iii) Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující A .
- (iv) Nechť $x \in X$. Pak $x \in \bar{A}$, právě když pro každé okolí U bodu x platí $U \cap A \neq \emptyset$.

Tvrzení 2 (vlastnosti uzavřených množin). Nechť (X, \mathcal{T}) je topologický prostor.

- (a) \emptyset a X jsou uzavřené množiny.
- (b) Je-li \mathcal{A} libovolný systém uzavřených podmnožin X , pak je $\bigcap \mathcal{A}$ uzavřená množina.
- (c) Pro každé dvě množiny uzavřené množiny $C, D \subset X$ je $C \cup D$ uzavřená množina.

Definice. Nechť (X, \mathcal{T}) je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

- \mathcal{B} se nazývá **bází topologie** \mathcal{T} , pokud pro každou $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existuje $G \in \mathcal{B}$ splňující $x \in G \subset U$.
- \mathcal{B} se nazývá **subbází topologie** \mathcal{T} , pokud pro každou $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existují $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{B}$ splňující $x \in G_1 \cap \dots \cap G_k \subset U$.

Poznámka. Nechť (X, \mathcal{T}) je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

- \mathcal{B} je báze \mathcal{T} , právě když pro každé $U \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ splňující $\bigcup \mathcal{A} = U$.

- \mathcal{B} je subbázi \mathcal{T} , právě když systém všech množin, které lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha prvků \mathcal{B} , tvoří bázi \mathcal{T} .

Tvrzení 3. Necht' X je množina a \mathcal{B} nějaký systém podmnožin X .

- (i) Systém \mathcal{B} je bázi nějaké topologie na X , právě když jsou splněny následující dvě podmínky:
- $\bigcup \mathcal{B} = X$;
 - Pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a každé $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$ splňující $x \in W \subset U \cap V$.
- (ii) Systém \mathcal{B} je subbázi nějaké topologie na X , právě když $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) je topologický prostor, $a \in X$ a \mathcal{U} nějaký systém podmnožin X . Systém \mathcal{U} je **bázi okolí bodu** a , pokud platí:

- Každé $U \in \mathcal{U}$ je okolím bodu a .
- Pro každé okolí V bodu a existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset V$.

Tvrzení 4. Necht' X je množina a pro každé $x \in X$ necht' \mathcal{U}_x je nějaký systém podmnožin X . Pak existuje topologie \mathcal{T} na X taková, že pro každé $x \in X$ je \mathcal{U}_x bázi okolí bodu x , právě když jsou splněny následující podmínky:

- (a) Pro každé $x \in X$ a každé $U \in \mathcal{U}_x$ platí $x \in U$.
- (b) Je-li $x \in X$ a $U, V \in \mathcal{U}_x$, pak existuje $W \in \mathcal{U}_x$ splňující $W \subset U \cap V$.
- (c) Pro každé $x \in X$ a každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \subset X$ splňující $x \in V \subset U$ a navíc

$$\forall y \in V \exists W \in \mathcal{U}_y : W \subset V.$$

Topologie \mathcal{T} je pak jednoznačně určena a platí

$$\mathcal{T} = \{U \subset X; \forall x \in U \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subset U\}.$$

Příklad. Necht' (X, ρ) je metrický prostor.

- Pro $x \in X$ a $r > 0$ označme $U(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$. Pak

$$\mathcal{T} = \{U \subset X; \forall x \in U \exists r > 0 : U(x, r) \subset U\}$$

je topologie na X . Je to **topologie generovaná metrikou** ρ .

- Necht' $x \in X$. Každý z následujících systémů množin tvoří bázi okolí bodu x :

$$\{U(x, r); r > 0\}; \quad \{U(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}; \quad \overline{\{U(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}}.$$

A.2 Spojitá zobrazení

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) a (Y, \mathcal{U}) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení.

- (1) Zobrazení f je **spojité v bodě** $x \in X$, pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ v (Y, \mathcal{U}) existuje U okolí bodu x v (X, \mathcal{T}) splňující $f(U) \subset V$.
- (2) Zobrazení f je **spojité na** X , je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

Tvrzení 5 (charakterizace spojitosti). Necht' (X, \mathcal{T}) a (Y, \mathcal{U}) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) f je spojitá na X .
- (ii) Pro každou $U \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(U)$ otevřená v X .
- (iii) Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $\overline{f^{-1}(F)}$ uzavřená v X .
- (iv) Pro každou $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

A.3 Oddělovací axiomy

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) je topologický prostor. Prostor X se nazývá

- T_0 , pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existuje $U \in \mathcal{T}$, která obsahuje právě jeden z bodů a, b ;
- T_1 , pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existuje $U \in \mathcal{T}$ taková, že $a \in U$ a $b \notin U$;
- T_2 (neboli **Hausdorffův**), pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- **regulární**, pokud pro každé $a \in X$ a každou $B \subset X$ uzavřenou splňující $a \notin B$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $a \in U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- T_3 , je-li T_1 a regulární;
- **úplně regulární**, pokud pro každé $a \in X$ a každou $B \subset X$ uzavřenou splňující $a \notin B$ existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $f(a) = 1$ a $f|_B = 0$;
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (neboli **Tichonovův**), je-li T_1 a úplně regulární;
- **normální**, pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny $A, B \subset X$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- T_4 , je-li T_1 a normální.

Poznámka.

- Triviálně platí $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.
- Platí i $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$, není to však triviální, plyne to z Urysohnova lemmatu.
- Každý metrický prostor je T_4 .

Tvrzení 6 (Urysohnovo lemma). Necht' X je normální topologický prostor a $A, B \subset X$ dvě disjunktní uzavřené množiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow [0, 1]$ splňující $f|_A = 0$ a $f|_B = 1$.

A.4 Podprostory, součiny a kvocienty

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) je topologický prostor a $Y \subset X$. Pak $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y; U \in \mathcal{T}\}$ je topologie na Y a prostor (Y, \mathcal{T}_Y) je pak **topologický podprostor** prostoru (X, \mathcal{T}) .

Poznámka. Podprostor prostoru, který je $T_0, T_1, T_2, \text{ regulární, } T_3, \text{ úplně regulární nebo } T_{3\frac{1}{2}}$, má opět tutéž vlastnost. (To je zřejmé.) Podprostor T_4 prostoru nemusí být T_4 . (To není zřejmé.)

Definice. Necht' $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ jsou neprázdné topologické prostory. Jejich **kartézským součinem** rozumíme množinu $X_1 \times \dots \times X_k$ opatřenou topologií, jejíž báze je

$$\{U_1 \times \dots \times U_k; U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}_k\}.$$

Definice. Necht' $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, je libovolný neprázdný systém neprázdných topologických prostorů. Jejich **kartézským součinem** rozumíme množinu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ opatřenou topologií, jejíž báze je

$$\left\{ \left\{ f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha; f(\alpha_1) \in U_1, \dots, f(\alpha_k) \in U_k \right\}; \right. \\ \left. U_1 \in \mathcal{T}_{\alpha_1}, \dots, U_k \in \mathcal{T}_{\alpha_k}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Tvrzení 7. Necht' $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, je libovolný neprázdný systém neprázdných topologických prostorů a $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ jejich kartézský součin. Necht' (Y, \mathcal{U}) je topologický prostor a $f : Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ zobrazení. Zobrazení f je spojitě na Y , právě když pro každé $\alpha \in A$ je zobrazení $y \mapsto f(y)(\alpha)$ spojitě zobrazení Y do X_α .

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) je topologický prostor, Y množina a $f : X \rightarrow Y$ zobrazení X na Y . **Kvocietová topologie** na Y indukovaná zobrazením f je topologie

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset Y; f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) a (Y, \mathcal{U}) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ zobrazení X na Y . Říkáme, že f je **kvocietové zobrazení**, pokud \mathcal{U} je kvocietová topologie indukovaná zobrazením f .

Tvrzení 8. Necht' (X, \mathcal{T}) a (Y, \mathcal{U}) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení X na Y . Je-li f otevřené (tj. obraz každé otevřené množiny v X je otevřená množina v Y) nebo uzavřené (tj. obraz každé uzavřené množiny v X je uzavřená množina v Y), je kvocietové.

Tvrzení 9. Necht' (X, \mathcal{T}) a (Y, \mathcal{U}) jsou topologické prostory a $f : X \rightarrow Y$ kvocietové zobrazení X na Y . Necht' (Z, \mathcal{W}) je topologický prostor a $g : Y \rightarrow Z$ je zobrazení. Pak g je spojitě, právě když $g \circ f$ je spojitě.

A.5 Kompaktní prostory

Definice. Topologický prostor (X, \mathcal{T}) se nazývá **kompaktní**, pokud pro každý systém \mathcal{U} otevřených množin, který pokrývá X (tj. který splňuje $\bigcup \mathcal{U} = X$) existuje konečný podsystém $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, který také pokrývá X (tj. $\bigcup \mathcal{W} = X$).

Tvrzení 10. Necht' X je kompaktní topologický prostor a $Y \subset X$ jeho topologický podprostor.

- Je-li Y uzavřený, je Y kompaktní.
- Je-li X Hausdorffův a Y kompaktní, je Y uzavřený.

Tvrzení 11. Necht' X je kompaktní topologický prostor, Y topologický prostor a $f : X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení X na Y . Pak platí:

- (i) Y je kompaktní.
- (ii) Je-li Y Hausdorffův, je f uzavřené zobrazení (a tedy kvocietové).
- (iii) Je-li Y Hausdorffův a f je prosté, je f homeomorfismus (tj. i f^{-1} je spojitě).

Tvrzení 12. Každý Hausdorffův kompaktní topologický prostor je T_4 , a tedy i $T_{3\frac{1}{2}}$.

Věta 13 (Tichonovova věta). Kartézský součin libovolného systému Hausdorffových kompaktních topologických prostorů je kompaktní. Speciálně, prostory $[-1, 1]^\Gamma$, $[0, 1]^\Gamma$, $\{0, 1\}^\Gamma$ a $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}^\Gamma$ jsou kompaktní pro každou množinu Γ .

A.6 Konvergence posloupností a netů

Definice. Necht' X je topologický prostor, (x_n) posloupnost prvků X a $x \in X$. Říkáme, že posloupnost (x_n) **konverguje k x v prostoru X** , jestliže pro každé okolí U bodu x existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $x_n \in U$. Bod x se pak nazývá **limitou posloupnosti** (x_n) , značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ nebo $x_n \rightarrow x$.

Poznámka: Je-li X Hausdorffův, pak každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 14. Necht' X je metrický prostor. Pak platí:

(1) Necht' $A \subset X$. Pak

$$\overline{A} = \{x \in X; \exists (x_n) \text{ posloupnost v } A : x_n \rightarrow x\}$$

(2) Necht' $A \subset X$. Pak A je uzavřená, právě když každé $x \in X$, k němuž konverguje nějaká posloupnost prvků A , je prvkem A .

(3) Necht' Y je topologický prostor, $f : X \rightarrow Y$ zobrazení a $x \in X$. Zobrazení f je spojitě v bodě x , právě když platí

$$\forall (x_n) \text{ posloupnost v } X : x_n \rightarrow x \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Definice. Necht' (Γ, \preceq) je částečně uspořádaná množina. Říkáme, že je **usměrněná** (podrobněji nahoru usměrněná), pokud pro každou dvojici $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existuje $\gamma \in \Gamma$, splňující $\gamma_1 \preceq \gamma$ a $\gamma_2 \preceq \gamma$.

Příklady usměrněných množin:

- $\Gamma =$ množina všech konečných podmnožin \mathbb{N} , $A \preceq B \equiv^{\text{df}} A \subset B$.
- $\Gamma =$ množina všech okolí bodu x v topologickém prostoru X , $U \preceq V \equiv^{\text{df}} U \supset V$.

Definice. Necht' X je topologický prostor a (Γ, \preceq) je usměrněná množina.

- **Netem indexovaným množinou Γ** rozumíme každé zobrazení $\alpha : \Gamma \rightarrow X$.
- Říkáme, že net $\alpha : \Gamma \rightarrow X$ **konverguje k bodu $x \in X$** , pokud platí

$$\forall U \text{ okolí bodu } x \exists \gamma_0 \in \Gamma \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \succeq \gamma_0 : \alpha(\gamma) \in U.$$

Bod x se nazývá **limitou netu** α , píšeme $\lim_{\gamma \in \Gamma} \alpha(\gamma) = x$ nebo $\alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma \in \Gamma} x$.

Poznámka: Je-li X Hausdorffův, pak každý net v X má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 15. Necht' X je topologický prostor. Pak platí:

(1) Necht' $A \subset X$. Pak

$$\overline{A} = \{x \in X; \exists \text{ net } \alpha : \Gamma \rightarrow A : \alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma \in \Gamma} x\}$$

(2) Necht' $A \subset X$. Pak A je uzavřená, právě když každé $x \in X$, k němuž konverguje nějaký net v A , je prvkem A .

(3) Necht' Y je topologický prostor, $f : X \rightarrow Y$ zobrazení a $x \in X$. Zobrazení f je spojitě v bodě x , právě když platí

$$\forall \text{ net } \alpha : \Gamma \rightarrow X : \alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma \in \Gamma} x \Rightarrow f(\alpha(\gamma)) \xrightarrow{\gamma \in \Gamma} f(x).$$