FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY KE CVIČENÍ A K SAMOSTATNÉMU PŘEMÝŠLENÍ – ZS 2018/2019

VEKTOROVÁ INTEGRACE

I. Měřitelnost vektorových funkcí

Příklad 1. Nechť $\Omega = [0,1]$, μ je Lebesgueova míra na $[0,1]$ a Σ je σ-algebra všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin $[0,1]$. Uvažme funkci $f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ definovanou předpisem $f(t) = \boldsymbol{e}_t$, $t \in [0,1]$, kde $\boldsymbol{e}_t$ označuje příslušný kanonický jednotkový vektor.

(1) Ukažte, že f je slabě μ-měřitelná.
(2) Ukažte, že f není esenciálně separabilně hodnotová, tedy není silně μ-měřitelná.
(3) Ukažte, že f není ani borelovsky μ-měřitelná.
(4) Ukažte, že f má zcela stejné vlastnosti, uvažujeme-li místo $\ell^2([0,1])$ prostor $c_0([0,1])$ nebo $\ell^p([0,1])$ pro $p \in (1,\infty)$.
(5) Uvažujme místo $\ell^2([0,1])$ prostor $\ell^1([0,1])$. Ukažte, že pak f není slabě měřitelná.

`Návod:` *(1) Použijte reprezentaci duálu k* $\ell^2([0,1])$. *(2) Každá množina míry nula má nespočetný doplněk. (3) Existují neměřitelné podmnožiny intervalu* $[0,1]$. *(4) Použijte reprezentaci příslušných duálů. (5) Duál k* $\ell^1([0,1])$ *je* $\ell^\infty([0,1])$ *a existují neměřitelné podmnožiny intervalu* $[0,1]$.

Příklad 2. Nechť (Ω, Σ, μ) a f jsou jako v Příkladu 1. Nechť navíc $h : [0,1] \to [0,\infty)$ je libovolná funkce. Ukažte, že pak i funkce $f_h = h \cdot f$ je slabě μ-měřitelná, ale funkce $t \mapsto \|f_h(t)\|$ může být neměřitelná.

Příklad 3. Nechť $\Omega = [0,1]$, Σ je σ-algebra všech podmnožin $[0,1]$, μ je počítací míra a f je jako v Příkladu 1. Ukažte, že f je borelovsky μ-měřitelná, není esenciálně separabilně hodnotová, a tedy není silně μ-měřitelná.

Příklad 4. Nechť Γ je množina, nechť Σ je σ-algebra podmnožin $\Gamma \times \Gamma$ generovaná všemi obdélníky (tj. množinami tvaru $A \times B$, $A, B \subset \Gamma$) a nechť $\Delta = \{(\gamma,\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ je diagonála $\Gamma \times \Gamma$. Ukažte, že $\Delta \in \Sigma$ právě když mohutnost Γ je nejvýše rovna mohutnosti kontinua.

`Návod:` $\Leftarrow$*: Předpoklad, že mohutnost* Γ *je nejvýše rovna mohutnost kontinua znamená, že můžeme předpokládat, že* $\Gamma \subset \mathbb{R}$. *Dále, existují spočetné rozklady* $\mathcal{P}_n = \{A_{n,m}; m \in \mathbb{N}\}$ *množiny* $\mathbb{R}$ *takové, že* $\mathcal{P}_{n+1}$ *zjemňuje* $\mathcal{P}_n$*, a pokud* $A_{n,m_n} \in \mathcal{P}_n$ *pro každé* n*, pak průnik* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m_n}$ *obsahuje nejvýše jeden bod.* $\Rightarrow$*: Ukažte, že pro každou* $M \in \Sigma$ *existuje rozklad* $(A_j)_{j\in J}$ *množiny* Γ *takový, že mohutnost* J *je nejvýše rovna mohutnosti kontinua a pro každé* $j \in J$ *buď* $A_j \times A_j \subset M$ *nebo* $(A_j \times A_j) \cap M = \emptyset$*. (Ukažte, že tuto vlastnost mají obdélníky a že se zachovává na doplňky a spočetná sjednocení. Klíčové nástroje pro důkaz stability vůči spočetným sjednocením jsou dvě tvrzení: (i) Spočetné sjednocení množin mohutnosti nejvýše kontinuum je opět množina mohutnosti nejvýše kontinuum. (ii) Množina posloupností prvků množiny mohutnosti nejvýše kontinuum má opět mohutnost nejvýše kontinuum.)*

Příklad 5. Nechť X je Banachův prostor mohutnosti ostře větší než kontinuum, nechť $\Omega = X \times X$ a nechť Σ je σ-algebra podmnožin Ω generovaná borelovskými obdélníky (tj. množinami $A \times B$, kde $A, B \subset X$ jsou borelovské množiny). Definujme dvě funkce $f, g : \Omega \to X$ vzorcem

$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y \qquad \text{pro } (x,y) \in \Omega.$$

Ukažte, že f i g jsou borelovsky Σ-měřitelné, ale $f - g$ není borelovsky Σ-měřitelná.

Návod: *Využijte Příklad 4.*

Příklad 6. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s úplnou mírou, nechť X je Banachův prostor a nechť $f : \Omega \to X$ je zobrazení. Bod $x \in X$ patří do **esenciálního oboru hodnot** f, jestliže pro každé U, okolí x v X, vzor $f^{-1}(U)$ není množina míry nula.

(1) Ukažte, že esenciální obor hodnot f je separabilní, pokud μ je konečná míra a f je borelovsky Σ-měřitelné.

(2) Předpokládejme, že f je esenciálně separabilně hodnotová (tj. f má **esenciálně separabilní obor hodnot**). Ukažte, že esenciální obor hodnot f je separabilní.

(3) Najděte příklad funkce, která nemá esenciálně separabilní obor hodnot, ale jejíž esenciální obor hodnot je prázdný (a tedy separabilní).

Návod: *(1) Je-li esenciální obor hodnot neseparabilní, obsahuje nespočetnou ε-diskrétní množinu D pro nějaké $\varepsilon > 0$. Pak $f^{-1}(U(d, \varepsilon/2))$, $d \in D$, je nespočetný systém měřitelných množin kladné míry. (3) Uvažte například funkci z Příkladu 1.*

Příklad 7. Ukažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Existuje prostor s konečnou úplnou mírou (Ω, Σ, μ) a Banachův prostor X a borelovsky Σ-měřitelná funkce $f : \Omega \to X$, která není esenciálně separabilně hodnotová.

(ii) Existuje množina Γ a konečná nenulová σ-aditivní míra definovaná ja σ-algebře všech podmnožin Γ, která je nulová na jednoprvkových množinách (tj. existuje **reálně měřitelný kardinál**).

Návod: *(ii)⇒(i) Uvědomte si, že Γ musí být nespočetná a uvažte $f : \Gamma \to \ell^2(\Gamma)$ definovanou vzorcem $f(\gamma) = e_\gamma$. (i)⇒(ii) Nechť R je esenciální obor hodnot f. Díky Příkladu 6(1) víme, že R je separabilní, tedy $\Omega \setminus f^{-1}(R)$ má kladnou míru. Tedy bez újmy na obecnosti $R = \emptyset$. Tj., každý bod $x \in X$ má okolí, jehož vzor je míry nula. S použitím faktu, že každý metrický prostor má σ-disjunktní bázi otevřených množin, můžeme najít disjunktní systémy $\mathcal{U}_n$ otevřených množin, jejichž vzory mají míru nula, přičemž $\bigcup_n \bigcup \mathcal{U}_n = X$. Existuje n, že $\mu(f^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_n)) > 0$. Položme $\Gamma = \mathcal{U}_n$ a $\nu(A) = \mu(f^{-1}(\bigcup A))$ pro $A \subset \Gamma$.*

Příklad 8. Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor, nechť X je Banachův prostor a nechť (f_n) je posloupnost silně Σ-měřitelných funkcí $f_n : \Omega \to X$ taková, že pro každé $\omega \in \Omega$ posloupnost $(f_n(\omega))$ slabě konverguje k nějakému $f(\omega)$. Ukažte, že f je silně Σ-měřitelná.

Návod: *Ukažte, že f je slabě Σ-měřitelná a má separabilní obor hodnot (s využitím Mazurovy věty). Pak použijte Pettisovu větu.*

Příklad 9. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s úplnou mírou, nechť X je Banachův prostor a nechť (f_n) je posloupnost silně μ-měřitelných funkcí $f_n : \Omega \to X$, že pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ posloupnost $(f_n(\omega))$ slabě konverguje k nějakému $f(\omega)$. Ukažte, že f je silně μ-měřitelná.

Návod: *Ukažte, že f je slabě μ-měřitelná a je esenciálně separabilně hodnotová (s využitím Mazurovy věty). Pak použijte Pettisovu větu.*

Příklad 10. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou, $X = L^p((0, \infty))$, kde $p \in [1, \infty)$ a $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{F}$ je funkce.

(1) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi(t) \cdot \chi_{(0,t)}$ je μ-měřitelná, právě když ψ je lebesgueovsky měřitelná.
(2) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi \cdot \chi_{(0,t)}$ (tj. $t \mapsto (u \mapsto \psi(u)\chi_{(0,t)}(u))$) je μ-měřitelná, právě když $\psi|_{(0,T)} \in L^p((0, T))$ pro každé $T \in (0, \infty)$.
(3) Předpokládejme, že ψ má hodnoty v $(0, \infty)$. Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \chi_{(0,\psi(t))}$ je μ-měřitelná, právě když ψ je lebesgueovsky měřitelná.

`Návod:` *(1) $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé t. K důkazu měřitelnosti ψ uvažte funkcionály reprezentované $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. $\Leftarrow$: Dokažte slabou měřitelnost. (2) $\Rightarrow$: Podmínka je nutná, aby $\phi(t) \in X$ pro každé t. $\Leftarrow$: Dokažte slabou měřitelnost. (3) $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé t. K důkazu měřitelnosti ψ uvažte funkcionály reprezentované $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. $\Leftarrow$: Stačí dokázat slabou měřitelnost. Snadno lze ověřit, že ϕ je slabě měřitelná pro ψ spojitou. Dále, pokud $\psi_n \to \psi$ skoro všude na $(0, \infty)$, pak pro příslušné funkce ϕ_n a ϕ máme $\phi_n(t) \to \phi(t)$ slabě pro skoro všechna t.*

Příklad 11. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou, $X = L^\infty((0, \infty))$ a $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{F}$ je funkce.

(1) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi(t) \cdot \chi_{(0,t)}$ je silně μ-měřitelná, právě když $\psi = 0$ skoro všude.
(2) Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \psi \cdot \chi_{(0,t)}$ (tj. $t \mapsto (u \mapsto \psi(u)\chi_{(0,t)}(u))$) je silně μ-měřitelná, právě když $\psi = 0$ skoro všude.
(3) Předpokládejme, že ψ má hodnoty v $(0, \infty)$. Ukažte, že funkce $\phi : t \mapsto \chi_{(0,\psi(t))}$ je silně μ-měřitelná, právě když ψ je lebesgueovsky měřitelná a existuje spočetná množina $C \subset (0, \infty)$ taková, že $\psi(t) \in C$ pro skoro všechna $t \in (0, \infty)$.

`Návod:` *(1) $\Leftarrow$: Jestliže $\psi = 0$ skoro všude, pak $\phi = 0$ skoro všude. $\Rightarrow$: $\|\phi(t) - \phi(u)\| \geq |\psi(u)|$ pro $t < u$. Jestliže $\psi(t) \neq 0$ na množině kladné míry, pak pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme $|\psi(t)| > \frac{1}{n}$ na množině kladné míry, tedy ϕ není esenciálně separabilně hodnotová. (2) $\Leftarrow$: Jestliže $\psi = 0$ skoro všude, pak $\phi = 0$ skoro všude. $\Rightarrow$: Nejdříve si všimněme, že ψ musí být lebesgueovsky měřitelná. Dále, $\|\phi(t) - \phi(u)\| = \left\|\psi|_{(t,u)}\right\|$ pro $t < u$. Jestliže $\psi \neq 0$ na množině kladné míry, existuje $n \in N$, že $A = \{t; |\psi(t)| \geq \frac{1}{n}\}$ má kladnou míru. Nechť Z je sjednocení všech otevřených intervalů I, pro které $I \cap A$ má nulovou míru. Pak $Z \cap A$ má také nulovou míru. Potom $(0, \infty) \setminus Z$ je uzavřená množina kladné míry. Nechť B značí množinu všech jednostranně izolovaných bodů množiny $(0, \infty) \setminus Z$. Pak B je spočetná, tedy $C = (0, \infty) \setminus (Z \cup B)$ má kladnou míru. Navíc, jsou-li $u, t \in C$, $u < t$, pak $(u, t) \cap A$ má kladnou míru. Odtud plyne, že ϕ není esenciálně separabilně hodnotová. (3) $\Leftarrow$: Ukažte, že ϕ je esenciálně separabilně hodnotová a borelovsky μ-měřitelná. $\Rightarrow$: $\phi(t) \in X$ pro každé t. K důkazu měřitelnosti ψ uvažte funkcionály reprezentované $\chi_{(0,T)}$, $T \in (0, \infty)$. Dále, charakteristické funkce tvoří diskrétní množinu v X, tedy pokud ϕ je esenciálně separabilně hodnotová, najdeme příslušnou množinu C.*

Příklad 12. Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor a nechť $X = \mathcal{C}(K)$ je prostor spojitých funkcí na K opatřený supremovou normou. Dále, nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor a $f : \Omega \to X$ je zobrazení.

(1) Předpokládejme, že f je slabě Σ-měřitelné. Ukažte, že pro každé $k \in K$ zobrazení $\omega \mapsto f(\omega)(k)$ je Σ-měřitelné.
(2) Předpokládejme navíc, že K je metrizovatelný. Ukažte, že obrácení platí též. Tj. f je slabě měřitelná, pokud zobrazení $\omega \mapsto f(\omega)(k)$ je Σ-měřitelné pro každé $k \in K$.

`Návod:` *(2) Podle Rieszovy věty potřebujeme ukázat, že $\omega \mapsto \int_K f(\omega)(k)\,\mathrm{d}\mu(k)$ je měřitelné pro každou (znaménkovou či komplexní) Radonovu míru na K. Množina všech měr s touto vlastností obsahuje Dirakovy míry (dle předpokladu). Navíc to je lineární podprostor a je uzavřený na slabé* limity posloupností. Dále, absolutně konvexní obal Dirakových měr je slabě* hustý v $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ podle věty o bipoláře. Nakonec, protože $\mathcal{C}(K)$ je separabilní, duální jednotková koule je metrizovatelná ve slabé* topologii, tedy každá míra z jednotkové koule je slabou* limitou posloupnosti z absolutně konvexního obalu Dirakových měr.*

Příklad 13. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $[0,1]$ s Lebesgueovou mírou, $X = \mathcal{C}([0,1])$ a $f : [0,1]^2 \to \mathbb{F}$ je funkce. Ukažte, že funkce

$$\Phi : t \mapsto f(t, \cdot)$$

je μ-měřitelná funkce $\Omega \to X$, právě když

- $u \mapsto f(t,u)$ je spojitá $[0,1]$ pro každé $t \in [0,1]$;
- $t \mapsto f(t,u)$ je lebesgueovsky měřitelná pro každé $u \in [0,1]$.

II. Bochnerův integrál

Příklad 14. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^p((0,1))$ kde $p \in (1,\infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ by

$$\phi(t)(u) = \psi(t)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

(1) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 t^{1/p}\,|\psi(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.
(2) Spočtěte Bochnerův integrál.

`Návod:` *(2) Pro $g \in L^{p^*}(0,1)$ spočtěte $\left\langle g, (B)\int \psi(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = (L)\int \langle g, \psi(t)\rangle\,\mathrm{d}t = \int(\int g(s)\psi(t)(s)\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t$.*

Příklad 15. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^p((0,1))$ kde $p \in (1,\infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce taková, že $\psi|_{(0,r)} \in L^p((0,r))$ pro každé $r \in (0,1)$. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ by

$$\phi(t)(u) = \psi(u)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

(1) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^1 \left(\int_0^t |\psi|^p\right)^{1/p}\,\mathrm{d}t < \infty$.
(2) Spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 16. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0,1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^p((0,1))$ kde $p \in [1,\infty)$. Nechť $\psi : (0,1) \to (0,1]$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0,1) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0,1), t \in (0,1).$$

Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná a spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 17. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^p((0, \infty))$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ by

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

(1) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_0^\infty |\psi(t)|^{1/p} \, \mathrm{d}t < \infty$.
(2) Spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 18. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^1((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \psi(t)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

(1) Ukažte, že ϕ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^1 t \, |\psi(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$.
(2) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, kdykoli je slabě integrovatelná.
(3) Spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 19. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^1((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to \mathbb{F}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pro kterou $\psi|_{(0,r)} \in L^1((0, r))$ pro každé $r \in (0, 1)$. Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \psi(u)\chi_{(0,t)}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

(1) Ukažte, že ϕ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^1 (1 - u) \, |\psi(u)| \, \mathrm{d}u < \infty$.
(2) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, kdykoli je slabě integrovatelná.
(3) Spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 20. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^1((0, \infty))$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Definujme funkci $\phi : (0, \infty) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

(1) Ukažte, že ϕ je slabě integrovatelná, právě když $\int_0^\infty \mu(\psi^{-1}(u, \infty)) \, \mathrm{d}u < \infty$.
(2) Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\psi \in L^1((0, \infty))$.
(3) Ukažte, že v tomto případě je bochnerovská integrovatelnost ekvivalentní slabé integrovatelnosti.
(4) Spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 21. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, 1)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^\infty((0, 1))$. Nechť $\psi : (0, 1) \to (0, 1)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce která je „esenciálně spočetně hodnotová“ (viz podmínku v Příkladu 11(3)). Definujme funkci $\phi : (0, 1) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, 1), t \in (0, 1).$$

Ukažte, že ϕ je bochnerovsky integrovatelná a spočtěte Bochnerův integrál.

Příklad 22. Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $(0, \infty)$ s Lebesgueovou mírou a nechť $X = L^\infty((0, \infty))$. Nechť $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce která je „esenciálně spočetně hodnotová“ (viz podmínku v Příkladu 11(3)). Definujme funkci $\phi : (0, \infty) \to X$ vzorcem

$$\phi(t)(u) = \chi_{(0,\psi(t))}(u), \quad u \in (0, \infty), t \in (0, \infty).$$

Characterizujte funkce ψ, pro které je ϕ bochnerovsky integrovatelná a spočtěte Bochnerův integrál.

III. Lebesgue-Bochnerovy prostory

Příklad 23. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, nechť $p \in [1, \infty]$ a nechť $X = c_0$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky ztotožnit s posloupností (f_n) skalárních funkcí na Ω.

(1) Ukažte, že funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je μ-měřitelná, právě když f_n je μ-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je μ-měřitelná. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí tohoto vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Ukažte, že $L^\infty(\mu, X)$ je kanonicky izometrický vlastnímu podprostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^\infty(\mu)\right)_{\ell^\infty}$ a popište tento podprostor.

`Návod:` *(1) Uvažte slabou měřitelnost.*

Příklad 24. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, nechť $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ a nechť $X = \ell^q$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky ztotožnit s posloupností (f_n) skalárních funkcí na Ω.

(1) Ukažte, že a funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je μ-měřitelná, právě když f_n je μ-měřitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ be μ-měřitelná. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí tohoto vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Pokud $p = q$, ukažte, že $L^p(\mu; X)$ jekanonicky izometrický prostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^p(\mu)\right)_{\ell^p}$.

`Návod:` *(1) Uvažte slabou měřitelnost.*

Příklad 25. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, nechť $p \in [1, \infty]$ a nechť $X = \ell^\infty$. Každou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ lze kanonicky ztotožnit s posloupností (f_n) skalárních funkcí na Ω.

(1) Ukažte, že funkce $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ je μ-měřitelná, právě když je esenciálně separabilně hodnotová a f_n je μ-měřitelné pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \Omega \to X$ be μ-měřitelné. Spočtěte $\|\boldsymbol{f}\|_p$ a pomocí tohoto vzorce popište prostor $L^p(\mu; X)$.
(3) Ukažte, že $L^\infty(\mu, X)$ je kanonicky izometrický vlastnímu podprostoru $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} L^\infty(\mu)\right)_{\ell^\infty}$ a popište tento podprostor.

`Návod:` *(1) Nutnost podmínky je zřejmá. K důkazu postačujícnosti si všimněte, že vzor libovolné otevřené koule v X při $\boldsymbol{f}$ patří do Σ a s využitím předpokladu, že $\boldsymbol{f}$ je esenciálně separabilně hodnotová, dokažte borelovskou μ-měřitelnost.*

Příklad 26. Nechť μ je sčítací míra na $\mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty]$. Ukažte, že prostor $L^p(\mu;X)$ je kanonicky izometrický prostoru $\ell^p(X)$, který je definován jako ℓ^p-suma spočetně mnoha kopií prostoru X, tj.

$$\ell^p(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\} \text{ pro } p \in [1,\infty),$$
$$\ell^\infty(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\},$$

kde příslušná norma je definovaná vzorcem

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}, \quad (x_n) \in \ell^p(X), p \in [1,\infty),$$
$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|, \quad (x_n) \in \ell^\infty(X).$$

Příklad 27. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s úplnou σ-konečnou mírou, nechť $p \in [1,\infty]$, nechť $p^* \in [1,\infty]$ je sdružený exponent, nechť X je Banachův prostor a nechť X^* je jeho duál.

(1) Nechť $f \in L^p(\mu;X)$ a $g \in L^{p^*}(\mu;X^*)$. Ukažte, že funkce
$$h(\omega) = g(\omega)(f(\omega)), \quad \omega \in \Omega,$$
je μ-integrovatelná a $\|h\|_1 \le \|g\|_{p^*} \cdot \|f\|_p$.

(2) Pro $g \in L^{p^*}(\mu;X^*)$ definujme
$$\Phi_g(f) = \int_\Omega g(\omega)(f(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^p(\mu;X).$$
Ukažte, že Φ_g je spojitý lineární funkcionál na $L^p(\mu;X)$ a $\|\Phi_g\| \le \|g\|_{p^*}$.

(3) Ukažte, že $\|\Phi_g\| = \|g\|_{p^*}$ a odvoďte, že $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ je lineární izometrie $L^{p^*}(\mu;X^*)$ do $L^p(\mu,X)^*$.

(4) Ukažte, že zobrazení Φ je na $L^p(\mu,X)^*$, pokud $p \in [1,\infty)$ a $X = c_0$ nebo $X = \ell^q$ pro nějaké $q \in (1,\infty)$.

(5) Ukažte, že zobrazení Φ je na $L^p(\mu,X)^*$, pokud $p \in [1,\infty)$ a (Ω,Σ,μ) je množina $\mathbb{N}$ s počítací mírou.

(6) Ukažte, že zobrazení Φ není na, pokud (Ω,Σ,μ) je interval $[0,1]$ s Lebesgueovou mírou a $X = \ell^1$.

`Návod:` *(1) Nejprve je třeba ukázat měřitelnost funkce h. Jestliže g je jednoduchá funkce, je to snadné. K důkazu obecného případ vuužijte existenci posloupnosti jednoduchých integrovatelných funkcí konvergující skoro všude ke g. Pro odhad využijte Hölderovu nerovnost. (2) plyne z (1). (3) Protože spočetně hodnotové funkce jsou husté in $L^{p^*}(\mu;X^*)$, stačí rovnost dokázat pro spočetně hodnotové g. Jedna nerovnost plyne z (2), stačí dokázat obrácenou nerovnost. Nechť $\varepsilon > 0$. Dle skalárního případu existuje nezáporná měřitelná funkce h splňující $\|h\|_p = 1$ a $\int_\Omega h(\omega)\,\|g(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) > \|g\|_{p^*} - \varepsilon$. Nechť $g = \sum_{j=1}^\infty x_j^* \chi_{E_j}$, kde $x_j^* \in X^*$ a $E_j \in \Sigma$ with $0 < \mu(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Zvolme posloupnost dost malých čísel $\delta_j > 0$ a najděme $x_j \in X$ splňující $\|x_j\| = 1$ a $x_j^*(x_j) > \left\|x_j^*\right\| - \delta_j$. Nechť $f = \sum_{j=1}^\infty h x_j \chi_{E_j}$. Pak $f \in L^p(\mu;X)$, $\|f\|_p = 1$ a $\Phi_g(f) > \|g\|_{p^*} - 2\varepsilon$. (5) Využijte Příklady 23 a 24 a metodu důkazu reprezentace duálů c_0 a ℓ^p. (6) Využijte Příklad 26. (7) S využitím Příkladu 24 a metody důkazu reprezentace duálu k ℓ^1 popiště duál k $L^p(\mu;\ell^1)$ a porovnejte ho s prostorem $L^{p^*}(\mu;\ell^\infty)$ popsaným v Příkladu 25.*