FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY KE CVIČENÍ A K SAMOSTATNÉMU PŘEMÝŠLENÍ – ZS 2018/2019

TOPOLOGICKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

I. Příklady topologických vektorových prostorů

Příklad 1. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Uvažme na X topologii $\mathcal{T}$ generovanou normou.

(1) Ukažte, že $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův topologický vektorový prostor.
(2) Ukažte, že topologie $\mathcal{T}$ je lokálně konvexní.

`Návod:` *(1) Použijte spojitost operací na normovaném prostoru. (2) Využijte trojúhelníkovou nerovnost.*

Příklad 2. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina. Uvažte prostor $\mathbb{F}^\Gamma$ se součinovou topologií a s operacemi definovanými po souřadnicích. Ukažte, že pak je $\mathbb{F}^\Gamma$ Hausdorffův lokálně konvexní prostor.

`Návod:` *Uvažte kanonickou bázi okolí nuly v součinové topologii. Ukažte, že její prvky jsou absolutně konvexní, že tento systém splňuje axiómy pro bázi okolí nuly v topologickém vektorovém prostoru a že lineární topologie, kterou generuje, splývá se součinovou topologií.*

Příklad 3. Nechť $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ je prostor spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ opatřený metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(x) - g(x)|\,; x \in [-n, n]\}\}, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}).$$

(1) Ukažte, že tento prostor je Hausdorffův lokálně konvexní prostor.
(2) Ukažte, že posloupnost (f_n) konverguje k f v metrice ρ, právě když posloupnost (f_n) konverguje lokálně stejnoměrně k f.

`Návod:` *Položte $p_n(f) = \max\{|f(x)|\,; x \in [-n, n]\}$ pro $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ a $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že každé p_n je pseudonorma a pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}); \rho(f, 0) < \frac{\varepsilon}{2^n}\} \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}); p_n(f) < \varepsilon\} \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{F}); \rho(f, 0) < \varepsilon + \frac{1}{2^n}\}$. Z toho odvoďte obě tvrzení.*

Příklad 4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Ukažte, že prostor $H(\Omega)$ holomorfních funkcí na Ω opatřený topologií lokálně stejnoměrné konvergence je metrizovatelný lokálně konvexní prostor.

`Návod:` *Nechť (K_n) je posloupnost kompaktních množin vyčerpávající Ω (tj. splňující $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_n K_n = \Omega$). Uvažte metriku $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \max\{|f(z) - g(z)|\,; z \in K_n\}\}$ a postupujte analogicky jako v předchozím příkladu.*

Příklad 5. Ukažte, že Schwartzův prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je Hausdorffův lokálně konvexní prostor, pokud je opatřen topologií generovanou standardní metrikou.

Příklad 6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je kompaktní podmnožina. Ukažte, že prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je Hausdorffův lokálně konvexní prostor, pokud je opatřen topologií generovanou standardní metrikou.

Příklad 7. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s nezápornou mírou a $p \in (0,1)$. Položme

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{[f]; f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ měřitelná}, \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty\}.$$

Pro $[f], [g] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ položme

$$\rho(f,g) = \int_\Omega |f-g|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

(1) Ukažte, že $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ je vektorový prostor a ρ je metrika na něm.
(2) Ukažte, že $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ s topologií generovanou metrikou ρ je Hausdorffův topologický vektorový prostor.
(3) Nechť (Ω, Σ, μ) je interval $[0,1]$ s Lebesgueovou mírou. Ukažte, že $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ není lokálně konvexní.
(4) Nechť (Ω, Σ, μ) je množina $\mathbb{N}$ se sčítací mírou. Ukažte, že $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)(= \ell^p)$ není lokálně konvexní.

`Návod:` *(1) Ukažte, že pro $a, b \geq 0$ platí $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ (například vyšetřením průběhu funkce) a z toho tvrzení odvoďte. (3) Nechť $\varepsilon > 0$ a $U_\varepsilon = \{f \in L^p([0,1]); \rho(f,0) < \varepsilon\}$. Ukažte, že konvexní obal množiny U_ε je celý prostor $L^p([0,1])$. (4) Nechť $\varepsilon > 0$ a $U_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^p; \rho(\boldsymbol{x}, 0) < \varepsilon\}$. Ukažte, že konvexní obal množiny U_ε je neomezený v metrice ρ.*

Příklad 8. Nechť T je Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ nechť označuje prostor spojitých funkcí na T. Položme

$$\mathcal{U} = \Big\{\{f \in \mathcal{C}(T,\mathbb{F}); \max_{x \in K} |f(x)| < c\}; K \subset T \text{ kompaktní}, c > 0\Big\}.$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 v jisté topologii, s níž $\mathcal{C}(T, \mathbb{F})$ je Hausdorffův lokálně konvexní prostor.
(2) Ukažte, že posloupnost (či net) konverguje v této topologii, právě když konverguje lokálně stejnoměrně na kompaktech.
(3) Je-li T kompaktní, ukažte že jde o topologii lokálně stejnoměrné konvergence.

Příklad 9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $\mathscr{D}(\Omega)$ nechť označuje prostor testovacích funkcí na Ω. Položme

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathscr{D}(\Omega) \text{ absolutně konvexní, pohlcující}; \\ \forall K \subset \Omega \text{ kompaktní} : U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \text{ je okolí nuly v } \mathscr{D}_K(\Omega)\}$$

(1) Ukažte, že systém $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 v jisté topologii, s níž $\mathscr{D}(\Omega)$ je Hausdorffův lokálně konvexní prostor.
(2) Ukažte, že posloupnost (φ_n) konverguje v této topologii, právě když konverguje v prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$ (ve smyslu teorie distribucí).

Příklad 10. Nechť X je prostor všech lebesgueovsky měřitelných funkcí na $[0,1]$ (s hodnotami v $\mathbb{F}$; ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude). Pro $f, g \in X$ položme

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \min\{1, |f-g|\}.$$

(1) Ukažte, že ρ je metrika, která na X generuje lineární topologii.
(2) Ukažte, že konvergence posloupností v metrice ρ splývá s konvergencí v míře.
(3) Je výsledná topologie lokálně konvexní?

`Návod:` *(1) Ukažte, že operace jsou spojité s využitím konvergence posloupností. (3) Ukažte, že pro každé $r > 0$ je konvexní obal množiny $\{f \in X; \rho(f,0) < r\}$ celé X.*

Příklad 11. Nechť X je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{U}$ je systém všech absolutně konvexních pohlcujících množin.

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lokálně konvexní topologii $\mathcal{T}$ na X.
(2) Ukažte, že tato topologie $\mathcal{T}$ je nejsilnější lokálně konvexní topologie na X.
(3) Ukažte, že každá konvergentní posloupnost v $(X, \mathcal{T})$ je obsažena v podprostoru konečné dimenze.

`Návod:` *(3) Kdyby ne, pak existuje lineárně nezávislá posloupnost* (x_n)*, která konverguje k nule. Doplňme ji na algebraickou bázi. Pak popište absolutně konvexní pohlcující množinu, která neobsahuje žádný z vektorů* x_n*.*

II. Lineární topologie a jejich generování

Příklad 12. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ neprázdná množina. Ukažte, že A je konvexní, právě když pro každé $\alpha, \beta > 0$ platí $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Příklad 13. Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{T}$ je topologie na X.

(1) Ukažte, že $\mathcal{T}$ je translačně invariantní, právě když sčítání na X je odděleně spojité (tj. pro každé $y \in X$ je $x \mapsto x + y$ spojité).
(2) Najděte X a $\mathcal{T}$ tak, aby sčítání bylo spojité (v obou proměnných, jako zobrazení $X \times X \to X$), ale násobení nebylo spojité.
(3) Najděte topologii na $\mathbb{R}^2$, v níž je sčítání odděleně spojité, nikoli však spojité.

`Návod:` *(2) Uvažte diskrétní topologii. (3) Uvažte například bázi okolí nuly* $\{(0,0)\} \cup \{(x,y); |y| < |x| < r\}$, $r > 0$.

Příklad 14. Nechť X je vektorový prostor, $\mathcal{T}$ je translačně invariantní topologie na X, která má bázi z konvexních množin.

(1) Ukažte, že sčítání je spojité (v obou proměnných), právě když pro každé U okolí nuly je i množina $\frac{1}{2}U$ okolím nuly.
(2) Najděte X a $\mathcal{T}$, aby sčítání nebylo spojité.
(3) Lze najít příklad z (2) konečněrozměrný?

`Návod:` *(2) Uvažte* $X = c_{00}$ *(tj. prostor posloupností s konečně mnoha nenulovými členy), kde báze okolí nuly jsou množiny tvaru* $\{(x_k) \in c_{00}; (\forall k \in \mathbb{N})(|x_k| < c_k)\}$*, kde* (c_k) *je rostoucí posloupnost kladných čísel s limitou* 1.

Příklad 15. Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní metrika na X.

(1) Ukažte, že sčítání je spojité v topologii generované metrikou ρ.
(2) Ukažte na protipříkladu, že topologie generovaná metrikou ρ nemusí být lineární topologie (tj., že násobení nemusí být spojité).
(3) V případě, že topologie generovaná metrikou ρ je lineární topologie, ukažte, že pro každé $x \in X$ je funkce $\lambda \mapsto \rho(\lambda x, 0)$ spojitá v bodě 0.
(4) V případě, že topologie generovaná metrikou ρ je lineární topologie, ukažtem že platí
$$\lim_{x \to 0} \sup_{\lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| \le 1} \rho(\lambda x, 0) = 0.$$
(5) Ukažte, že pokud metrika ρ splňuje obě nutné podmínky z bodů (3) a (4), pak topologie generovaná metrikou ρ je lineární topologie.

Návod: *(4) Dokažte obměnu – pokud neplatí uvedená rovnost, pak pomocí vhodné posloupnosti ukažte, že násobení není spojité. (5) Dokažte spojitost násobení pomocí posloupností dle Heineho věty s využitím (1).*

Příklad 16. (1) Nechť $A \subset \mathbb{R}^2$ je vyvážená a pohlcující. Ukažte, že $A + A$ je okolím nuly (ve standardní topologii).
(2) Najděte vyváženou pohlcující $A \subset \mathbb{R}^2$, která není okolím nuly.
(3) Z předchozích dvou bodů odvoďte, že systém všech vyvážených pohlcujících podmnožin $\mathbb{R}^2$ není bází okolí nuly v žádné lineární topologii na $\mathbb{R}^2$.

Návod: *(1) Ukažte, že $A + A$ obsahuje obdélník tvaru $[-a, a] \times [-b, b]$.*

Příklad 17. (1) Ukažte, že konvexní obal vyvážené podmnožiny vektorového prostoru je vyvážený, a tedy absolutně konvexní.
(2) Ukažte, že vyvážený obal konvexní množiny nemusí být konvexní.

Návod: *(2) Uvažte vhodnou úsečku v $\mathbb{R}^2$.*

Příklad 18. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ vyvážená množina s neprázdným vnitřkem.
(1) Ukažte, že $\operatorname{int} A$ je vyvážená, právě když $0 \in \operatorname{int} A$.
(2) Ukažte na protipříkladu, že $\operatorname{int} A$ nemusí být vyvážená.

Příklad 19. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ neprázdná. Ukažte, že
$$\overline{A} = \bigcap \{A + U; U \in \mathcal{T}(0)\}.$$

Příklad 20. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický vektorový prostor, který není Hausdorffův.

- Označme $Z = \overline{\{\boldsymbol{o}\}} = \bigcap \mathcal{T}(0)$. Ukažte, že Z je vektorový podprostor X.
- Nechť $Y = X/Z$ je kvocientový vektorový prostor a $q : X \to Y$ kanonické kvocientové zobrazení. Nechť $\mathcal{R}$ je kvocientová topologie na Y (tj. $\mathcal{R} = \{U \subset Y; q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$). Ukažte, že $(Y, \mathcal{R})$ je Hausdorffův topologický vektorový prostor.
- Ukažte, že $(Y, \mathcal{R})$ je lokálně konvexní, právě když $(X, \mathcal{T})$ je lokálně konvexní.

III. Omezené množiny, spojitá lineární zobrazení

Příklad 21. Nechť X je TVS a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená, právě když každá spočetná podmnožina A je omezená.

Příklad 22. Nechť X je TVS a $A, B \subset X$ jsou omezené množiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$ jsou omezené.

Příklad 23. Nechť X je LCS a $A \subset X$ je omezená množina. Ukažte, že i množiny $\operatorname{co} A$ a $\operatorname{aco} A$ jsou omezené.

Příklad 24. Nechť $X = L^p([0, 1])$, kde $p \in (0, 1)$. Ukažte, že $A = \{f \in X; \|f\|_p < 1\}$ je omezená množina, jejíž konvexní obal není omezená množina.

Návod: *Ukažte, že $\operatorname{co} A = X$.*

Příklad 25. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená jakožto podmnožina TVS X, právě když je omezená v metrice generované normou.

Příklad 26. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ.

(1) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v X, je omezená i v metrice ρ.
(2) Ukažte, že množina $A \subset X$, která je omezená v metrice ρ, nemusí být omezená v TVS X.

`Návod:` *(2) Metrika ρ sama může být omezená.*

Příklad 27. Uvažme prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(\Omega)$ s topologií z Příkladu 9. Nechť $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál. Ukažte, že $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, právě když Λ je spojitý.

Příklad 28. Uvažme prostor $(X, \mathcal{T})$ z Příkladu 11. Ukažte, že každý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{F}$ je spojitý.

Příklad 29. Nechť $X = \mathbb{F}^\Gamma$ (viz Příklad 2) a $A \subset X$. Ukažte, že A je omezená v X, právě když je „bodově omezená“, tj. právě když pro každé $\gamma \in \Gamma$ je množina $\{x(\gamma); x \in A\}$ omezená v $\mathbb{F}$.

Příklad 30. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ s topologií bodové konvergence, $Y = \mathcal{C}([0,1])$ s topologií generovanou metrikou ρ z Příkladu 10 a $L : X \to Y$ je identita.

(1) Ukažte, že L zobrazuje omezené množiny na omezené množiny.
(2) Ukažte, že L je sekvenciálně spojité (tj., pokud $f_n \to f$ v X, pak $Lf_n \to Lf$ v Y).
(3) Ukažte, že L není spojité.

`Návod:` *(1) Nechť $A \subset X$ je omezená. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \{x \in [0,1]; \forall f \in A : |f(x)| \le n\}$. Ukažte, že F_n jsou uzavřené podmnožiny $[0,1]$, jejichž sjednocení je celý interval $[0,1]$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolte $n \in \mathbb{N}$, aby $\lambda([0,1] \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m > n$, aby $\frac{n}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ukažte, že pak $L(A) \subset m\{g \in Y; \rho(g,0) < \varepsilon\}$. Z toho odvoďte omezenost $L(A)$ v Y. (2) Použijte Lebesgueovu větu. (3) Nechť $U = \{f \in Y; \rho(f,0) < \frac{1}{2}\}$. Pak U je okolí nuly v Y. Ukažte, že $L^{-1}(U)$ není okolí nuly v X. (Pro každou konečnou $F \subset [0,1]$ najděte $f \in \mathcal{C}([0,1])$, pro kterou platí $f|_F = 0$ a přitom $f = 1$ na množině míry aspoň $\frac{1}{2}$.)*

Příklad 31. Nechť X je TVS a (x_n) je posloupnost prvků X. Ukažte, že posloupnost (x_n) je omezená v X, právě když pro každou posloupnost (λ_n) v $\mathbb{F}$ platí $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

Příklad 32. Nechť X je metrizovatelný TVS a (x_n) posloupnost prvků X. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n), pro kterou $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Nechť ρ je metrika generující topologii na X. Ukažte a pak použijte, že pro každé $x \in X$ platí $\lim\limits_{t \to 0+} \rho(\boldsymbol{o}, tx) = 0$.*

Příklad 33. Platí tvrzení z Příkladu 32 i pro nemetrizovatelné TVS?

`Návod:` *Uvažte prostor z Příkladu 11.*

Příklad 34. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Nechť (x_n) je posloupnost prvků X, která konverguje k nule. Ukažte, že existuje posloupnost kladných čísel (λ_n) splňující $\lambda_n \to \infty$ a $\lambda_n x_n \to \boldsymbol{o}$.

`Návod:` *Z translační invariance metriky ρ plyne $\rho(\boldsymbol{o}, nx) \le n\rho(\boldsymbol{o}, x)$ pro $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 35. Platí tvrzení z předchozího příkladu pro obecný TVS?

`Návod:` *Uvažte například $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro $p \in (1, \infty)$ se slabou topologií, (x_n) nechť je posloupnost kanonických jednotkových vektorů.*

Příklad 36. Nechť $X = L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že jediný spojitý lineární funkcionál na X je nulový.

`Návod:` *Ukažte, že jediné dvě konvexní otevřené množiny v X jsou $\emptyset$ a X.*

Příklad 37. Nechť $X = \ell^p$, kde $p \in (0,1)$. Ukažte, že pro každou posloupnost $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^\infty$ vzorec

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell^p,$$

definuje spojitý lineární fukcionál na ℓ^p a že každý spojitý lineární funkcionál na X je tohoto tvaru.

IV. Prostory konečné a nekonečné dimenze

Příklad 38. Ukažte, že každý TVS konečné dimenze je lokálně konvexní.

`Návod:` *Pro Hausdorffův prostor použijte příslušné tvrzení z přednášky. Pro obecný případ využijte Příklad 20.*

Příklad 39. Nechť X je vektorový prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje Hausdorffova lineární topologie, která není lokálně konvexní.

`Návod:` *Nechť $(e_j)_{j\in J}$ je algebraická báze X. Zvolme $p \in (0,1)$ a definujme na X metriku $\rho(\sum a_j e_j, \sum b_j e_j) = \sum |a_j - b_j|^p$.*

Příklad 40. Nechť X je metrizovatelný TVS nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje nespojitý lineární funkcionál.

`Návod:` *Použijte algebraickou bázi X a Příklad 32.*

Příklad 41. Existuje na každém HTVS nekonečné dimenze nespojitý lineární funkcionál?

`Návod:` *Použijte Příklad 28.*

V. Metrizovatelnost TVS

Příklad 42. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $p : X \to [0,\infty)$ je F-norma na X, tj. zobrazení splňující vlastnosti

(i) $\forall x \in X : p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(ii) $\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{F}, |\lambda| = 1 : p(\lambda x) \le p(x)$,
(iii) $\forall x, y \in X : p(x+y) \le p(x) + p(y)$,
(iv) $\forall x \in X : \lim\limits_{t\to 0+} p(tx) = 0$.

(1) Ukažte, že vzorec $\rho(x,y) = p(x-y)$ definuje translačně invariantní metriku na X, která generuje lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že systém $\left\{\{x \in X; p(x) < \frac{1}{n}\}; n \in \mathbb{N}\right\}$ tvoří bázi okolí nuly v této topologii.

Příklad 43. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $q : X \to [0,\infty)$ je **kvazinorma** na X, tj. zobrazení s vlastnostmi:

- $\forall x \in X : q(x) = 0 \Leftrightarrow x = \boldsymbol{o}$;
- $\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{F} : q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$;
- $\exists C \ge 1\, \forall x, y \in X : q(x+y) \le C(q(x) + q(y))$.

(1) Ukažte, že systém $\Big\{\{x \in X; q(x) < r\}; r \in (0,\infty)\Big\}$ tvoří bázi okolí nuly v jisté lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že tato topologie je metrizovatelná.
(3) Ukažte, že v této topologii platí $x_n \to x$, právě když $q(x_n - x) \to 0$.

`Návod:` *(2) Ukažte, že existuje spočetná báze okolí nuly.*

Příklad 44. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $q : X \to [0,\infty)$ F-norma na X a $p \in (0,1)$. Pak říkáme, že q je p**-norma**, pokud $q(\lambda x) = |\lambda|^p\, q(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) Ukažte, že funkce $f \mapsto \|f\|_p$ je p-norma na $L^p(\mu)$.
(2) Ukažte, že funkce $f \mapsto (\|f\|_p)^{1/p}$ je kvazinorma na $L^p(\mu)$.
(3) Nechť q je p-norma na X. Ukažte, že $q^{1/p}$ je kvazinorma na X a odhadněte příslušnou hodnotu C.

`Návod:` *(2) je speciální případ (3). Položme $\alpha = \frac{1}{p}$. Pomocí vyšetření průběhu vhodné funkce ukažte, že pro $a, b \geq 0$ je $a^\alpha + b^\alpha \leq (a+b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$.*

Příklad 45. Nechť X je TVS a p je F-pseudonorma na X (F pseudonorma je zobrazení se stejnými vlastnostmi jako F-norma, až na to, že bod (i) je nahrazen vlastností $p(0) = 0$). Ukažte, že p je spojitá, právě když je spojitá v nule.

Příklad 46. Nechť X je TVS a U je okolí nuly. Ukažte, že existuje spojitá F-pseudonorma p na X, pro kterou $\{x \in X; p(x) < 1\} \subset U$.

`Návod:` *Nechť (V_n) je posloupnost vyvážených okolí nuly spňující $V_1 + V_1 \subset U$ a $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ pro $n \in N$. Aplikujte na tuto posloupnost postup konstrukce z důkazu charakterizace metrizovatelnosti TVS.*

Příklad 47. S využitím předchozího příkladu ukažte, že každý TVS je úplně regulární.

VI. Pseudonormy, Minkowského funkcionály, F-pseudonormy

Příklad 48. Ukažte na protipříkladu, že Minkowského funkcionál vyváženého okolí nuly nemusí být spojitý.

`Návod:` *Může se stát, že existuje $x \in X$ a čísla $0 < a < b$, že úsečka $\{tx; t \in [a,b]\}$ je obsažena v hranici daného vyváženého okolí nuly. Protipříklad lze zkonstruovat již v $\mathbb{R}^2$.*

Příklad 49. Nechť X je TVS, $A \subset X$ vyvážené okolí nuly a p_A jeho Minkowského funkcionál. Ukažte, že následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(i) p_A je spojitý na X;
(ii) Pro každé $x \in \overline{A}$ platí $\{tx; t \in [0,1)\} \subset \operatorname{int} A$;
(iii) $\operatorname{int} A = \{x \in X; p_A(x) < 1\}$ & $\overline{A} = \{x \in X; p_A(x) \leq 1\}$.

Příklad 50. Nechť X je TVS, $A \subset X$ podmnožina obsahující nulový vektor a $p \in (0,1)$. Řekneme, že množina A je p-konvexní, jestliže

$$\forall x, y \in A\, \forall s, t \in [0,1] : s^p + t^p = 1 \Rightarrow sx + ty \in A.$$

(1) Nechť A je p-konvexní, $x_1, \ldots, x_n \in A$ a $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ splňují $t_1^p + \cdots + t_n^p = 1$. Ukažte, že $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n \in A$.
(2) Nechť $0 < p < q < 1$. Ukažte, že platí

$$A \text{ konvexní} \Rightarrow A\ q\text{-konvexní} \Rightarrow A\ p\text{-konvexní}.$$

(3) Ukažte na příkladu, že p-konvexní množina nemusí být konvexní.
(4) Nechť A je p-konvexní okolí nuly. Ukažte, že jeho Minkowského funkcionál je spojitý.

`Návod:` *(1) Použijte matematickou indukci. (2) Využijte, že $0 \in A$. (3) Uvažte například množinu $\{f \in L^p([0,1]); \|f\|_p < 1\}$. (4) Použijte charakterizaci z předchozího příkladu.*

Příklad 51. Ukažte, že topologie z Příkladu 11 je generována systémem všech pseudonorem na X.

Příklad 52. Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je nějaký systém F-pseudonorem na X.

(1) Ukažte, že systém
$$\Big\{\{x \in X; p_1(x) < c_1, \dots, p_k(x) < c_k\}; p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, c_1, \dots, c_k > 0\Big\}$$
tvoří bázi okolí nuly v nějaké lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že F-pseudonormy z $\mathcal{P}$ jsou v této topologii spojité.
(3) Ukažte, že tato topologie je Hausdorffova, právě když pro každé $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$, pro kterou $p(x) > 0$.

Příklad 53. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je TVS. Nechť $\mathcal{P}$ je systém všech spojitých F-pseudonorem na X. Ukažte, že topologie generovaná systémem $\mathcal{P}$ ve smyslu Příkladu 52 je právě $\mathcal{T}$.

`Návod:` *Použijte Příklad 46.*

Příklad 54. Nechť X je vektorový prostor. Ukažte, že na X existuje nejsilnější lineární topologie a že tato topologie je Hausdorffova.

`Návod:` *Použijte konstrukci z Příkladu 52 na systém všech F-seminorem na X.*

Příklad 55. Nechť X je vektorový prostor spočetné algebraické dimenze. Ukažte, že nejsilnější lineární topologie na X je lokálně konvexní.

`Návod:` *Nechť $\mathcal{T}$ je topologie z Příkladu 11. Ukažte, že každá F-pseudonorma na X je spojitá v $\mathcal{T}$: Nechť p je F-pseudonorma na X a (e_n) je algebraická báze. Pro každé $\varepsilon > 0$ ukažte, že existuje (t_n) posloupnost kladných čísel, pro kterou* $\operatorname{aco}\{t_n e_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \{x; p(x) < \varepsilon\}$.

Příklad 56. Nechť X je vektorový prostor nespočetné algebraické dimenze. Ukažte, že nejsilnější lineární topologie na X není lokálně konvexní.

`Návod:` *Ukažte, že F-seminorma definovaná jako v Příkladu 39 není spojitá v topologii z Příkladu 11.*

VII. F-prostory, Fréchetovy prostory, totálně omezené množiny

Příklad 57. Nechť X je TVS a $A, B \subset X$ jsou totálně omezené podmnožiny. Ukažte, že i množiny $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$, $\mathrm{b}(A)$ jsou totálně omezené.

Příklad 58. Nechť X je TVS, jehož topologie je generovaná translačně invariantní metrikou ρ. Ukažte, že množina $A \subset X$ je totálně omezená v TVS X, právě když je totálně omezená v metrice ρ.

Příklad 59. Ukažte na protipříkladu, že v F-prostoru, který není lokálně konvexní, uzavřený konvexní obal kompaktní množiny nemusí být kompaktní.

`Návod:` *Protipříklad lze zkonstruovat například v prostoru $L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$: Zvolme kladná čísla ε, η a δ tak, aby platilo: $p < \frac{1}{1+\varepsilon}$, $\frac{\eta}{\varepsilon} < p$, $\delta < \varepsilon$ a $\frac{\eta}{\varepsilon-\delta} < p$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n^{1+\eta}}$, $f_n = n^{1+\varepsilon}\chi_{(x_{n+1},x_n)}$ a $t_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$. Ukažte, že $f_n \to 0$ v $L^p([0,1])$, a tedy $\{0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ je kompaktní množina. Dále ukažte, s využitím prvků $\frac{t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n}{t_1 + \cdots + t_n}$, že konvexní obal uvedené kompaktní množiny je množina neomezená v $L^p([0,1])$.*

VIII. Oddělovací věty

Příklad 60. Nechť $p \in (0,1)$. Ukažte, že ℓ^p je izomorfní (dokonce izometrické) podprostoru $L^p([0,1])$. S využitím Příkladů 36 a 37 pak ukažte na protipříkladu, že spojitý lineární funkcionál na podprostoru TVS nemusí jít rozšířit na spojitý lineární funkcionál na celém prostoru.

Příklad 61. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že v X existují dvě disjunktní konvexní množiny, které jsou husté v X (a tedy je nelze oddělit nenulovým prvkem X^*).

`Návod:` *Využijte existenci nespojitého lineárního funkcionálu.*

Příklad 62. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ s L^2-normou (tj. $\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$). Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujme $Y_\alpha = \{f \in X; f(0) = \alpha\}$. Ukažte, že $(Y_\alpha; \alpha \in \mathbb{R})$ je systém po dvou disjunktních hustých konvexních množin. Ukažte, že pro $\alpha \neq \beta$ nelze množiny Y_α a Y_β oddělit nenulovým prvkem X^*.

Příklad 63. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1,\infty)$ (uvažujme prostory nad $\mathbb{R}$). Nechť $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ je prvek, jehož všechny souřadnice jsou kladné, a $\boldsymbol{y} = (\frac{x_n}{n}) \in X$. Položme

$$A = \{\boldsymbol{z} = (z_n) \in X; \forall n \in \mathbb{N} : z_n \geq 0\}, \qquad B = \{-\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}; t \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že A a B jsou disjunktní uzavřené podmnožiny X, které není možné oddělit nenulovým prvkem X^*.

`Návod:` *Postupujte sporem: Nechť $f \in X^* \setminus \{0\}$ splňuje $\sup f(B) \leq \inf f(A)$. Ukažte, že nutně $f \geq 0$ na A a $\inf f(A) = 0$. Funkcionál f lze reprezentovat příslušnou posloupností (prvkem ℓ^1 resp. ℓ^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ukažte, že všechny prvky této posloupnosti musí být nezáporné. Z předpokladu $\inf f(B) \leq 0$ odvoďte $f(\boldsymbol{y}) = 0$, a odtud $f = 0$, což dává spor.*