FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

ZIMNÍ SEMESTER 2018/2019

ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY – PRVNÍ SADA

Obecné poznámky:

- Všechna tvrzení a všechny výpočty musí být srozumitelně zdůvodněné. Pro tento účel je možné využít znalosti o topologických vektorových prostorech z přednášky a také znalosti z bakalářských kurzů matematiky.
- Odevzdaná řešení musí být ručně psané, nikoli tištěná.
- Mimo jiné se může hodit následující:
  - věta o generování lineární topologie pomocí báze okolí nuly;
  - věta o generování lokálně konvexní topologie pomocí systému pseudonorem;
  - charakterizace metrizovatelnosti topologického vektorového prostoru a její speciální případ pro lokálně konvexní prostory;
  - kritérium normovatelnosti topologického vektorového prostoru;
  - charakterizace spojitých lineárních funkcionálů na lokálně konvexním prostoru pomocí pseudonorem;
  - reprezentace duálů klasických Banachových prostorů;
  - je-li $0 < p < q < r < \infty$, pak z Hölderovy nerovnosti plyne $L^p \cap L^r \supset L^q$ a příslušný odhad norem.
- Je-li f měřitelná funkce, pak $[f]$ značí její třídu ekvivalence při rovnosti skoro všude.
- Příklady je třeba rezervovat e-mailem. Rezervace bude potvrzena uvedením čísla problému u daného studenta v SISu. Poku příklad již není volný, upozorním studenta v odpovědi na jeho e-mail. V rezervačním e-mailu je možné uvést více příkladů, v pořadí odpovídajícím preferencím studenta. Rezervuji první z nich, který je dosud volný.
- Pokud se někomu zdá jeho úkol neřešitelný, příliš obtížný, nejasný atp., nechť se ozve. Dotazy, vysvětlení či konzultace jsou možné.
- Doporučený termín odevzdání: 2.11.2018

Příklad č. 1 [JIŽ REZERVOVÁN]

Nechť

$$X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/n} < \infty\}.$$

Pro $\boldsymbol{x} = (x_n) \in X$ položme

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/n}.$$

(1) Ukažte, že vzorec $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ definuje translačně invariantní metriku na X, která generuje lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že metrika ρ je úplná.
(3) Je tento prostor lokálně konvexní?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 2 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť

$$X = \{[f]; f : [0,1] \to \mathbb{F} \text{ měřitelná}, \int_0^1 |f(t)|^t \, \mathrm{d}t < \infty\}.$$

For $[f] \in X$ set

$$p([f]) = \int_0^1 |f(t)|^t \, \mathrm{d}t < \infty.$$

(1) Ukažte, že vzorec $\rho(f,g) = p(f-g)$ definuje translačně invariantní metriku on X, která generuje lineární topologii na X.
(2) Ukažte, že metrika ρ je úplná.
(3) Je tento prostor lokálně konvexní?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 3 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť Γ je nespočetná množina a nechť X je prostor $\ell^\infty(\Gamma)$ opatřený topologií stejnoměrné konvergence na spočetných podmnožinách Γ.

(1) Ukažte, že tato topologie je Hausdorffova lineární topologie na X a popište bázi okolí nuly.
(2) Je tato topologie lokálně konvexní? Pokud ano, najděte generující systém pseudonorem.
(3) Je X metrizovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 4 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $X = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ je prostor všech $\mathbb{F}$-hodnotových spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ opatřený topologií stejnoměrné konvergence na řídkých kompaktních podmnožinách $\mathbb{R}$.

(1) Ukažte, že tato topologie je Hausdorffova lineární topologie na X a popište bázi okolí nuly.
(2) Je tato topologie lokálně konvexní? Pokud ano, najděte generující systém pseudonorem.
(3) Je X metrizovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 5 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $X = L^1_{loc}(\mathbb{R})$ je prostor všech (tříd ekvivalence) $\mathbb{F}$-hodnotových lokálně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ opatřený systémem pseudonorem

$$p_r(f) = \int_{-r}^{r} |f|, \qquad f \in X \quad (r > 0).$$

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 6 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $X = L^2_{loc}(\mathbb{R})$ je prostor všech (tříd ekvivalence) $\mathbb{F}$-hodnotových měřitelných funkcí na $\mathbb{R}$, jejichž restrikce na libovolný omezený interval patří do L^2, opatřený systémem pseudonorem

$$p_r(f) = \left(\int_{-r}^{r} |f|^2 \right)^{1/2}, \quad f \in X \quad (r > 0).$$

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 7 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť prostor

$$X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}; \forall p \in (1, \infty) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in (1, \infty)$.

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 8 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť prostor

$$X = \{[f]; f : [0, 1] \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in [1, \infty) : [f] \in L^p([0, 1])\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty)$.

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 9 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť prostor

$$X = \{[f]; f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in (1, \infty) : [f] \in L^p(\mathbb{R})\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in (1, \infty)$.

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 10 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť prostor

$$X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}; \forall \alpha > 0 : (n^{\alpha} x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená posloupnost}\}$$

je opatřený systémem norem

$$p_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{\alpha} |x_n|, \quad \boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \quad (\alpha > 0).$$

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 11 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$X = \{(x_n)_{n=1}^\infty; \forall p \in (0,1) : (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p\}$$
a
$$\mathcal{U} = \Big\{\{\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=1}^\infty \in X; \|\boldsymbol{x}\|_{p_1} < \varepsilon, \dots, \|\boldsymbol{x}\|_{p_k} < \varepsilon\}; p_1, \dots, p_k \in (0,1), \varepsilon > 0\Big\}.$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lineární topologii na X.
(2) Je X lokálně konvexní?
(3) Je X metrizovatelný? Je to F-prostor?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 12 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$X = \{[f]; f : [0,1] \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in (0,1) : [f] \in L^p([0,1])\}$$
a
$$\mathcal{U} = \Big\{\{[f] \in X; \|[f]\|_{p_1} < \varepsilon, \dots, \|[f]\|_{p_k} < \varepsilon\}; p_1, \dots, p_k \in (0,1), \varepsilon > 0\Big\}.$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lineární topologii na X.
(2) Je X lokálně konvexní?
(3) Je X metrizovatelný? Je to F-prostor?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 13 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$X = \{[f]; f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in (0,1) : [f] \in L^p(\mathbb{R})\}$$
a
$$\mathcal{U} = \Big\{\{[f] \in X; \|[f]\|_{p_1} < \varepsilon, \dots, \|[f]\|_{p_k} < \varepsilon\}; p_1, \dots, p_k \in (0,1), \varepsilon > 0\Big\}.$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lineární topologii na X.
(2) Je X lokálně konvexní?
(3) Je X metrizovatelný? Je to F-prostor?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 14 [VOLNÝ]
Nechť
$$X = \{[f]; f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in (0,\infty) : [f] \in L^p(\mathbb{R})\}$$
a
$$\mathcal{U} = \Big\{\{[f] \in X; \|[f]\|_{p_1} < \varepsilon, \dots, \|[f]\|_{p_k} < \varepsilon\}; p_1, \dots, p_k \in (0,\infty), \varepsilon > 0\Big\}.$$

(1) Ukažte, že $\mathcal{U}$ je báze okolí nuly v nějaké Hausdorffově lineární topologii na X.
(2) Je X lokálně konvexní?
(3) Je X metrizovatelný? Je to F-prostor?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 15 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť prostor $X = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ je opatřený systémem pseudonorem

$$p_{n,r}(f) = \sup_{t\in[-r,r]} \left|f^{(n)}(t)\right|, \quad f \in X \quad (r > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 16 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $X = \mathcal{C}^\infty([0,1])$ je prostor $\mathcal{C}^\infty$ funkcí na $[0,1]$ (tj. takových $\mathcal{C}^\infty$ funkcí na $(0,1)$, jejichž všechny derivace lze spojitě rozšířit na $[0,1]$) opatřený systémem pseudonorem

$$p_n(f) = \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right|, \quad f \in X \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 17 [VOLNÝ]
Nechť $X = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ je prostor všech $\mathbb{F}$-hodnotových spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ opatřený topologií stejnoměrné konvergence na konvergentních posloupnostech (tj. na množinách tvaru $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, kde (x_n) je konvergentní posloupnost reálných čísel).
(1) Ukažte, že tato topologie je Hausdorffova lineární topologie na X a popište bázi okolí nuly.
(2) Je tato topologie lokálně konvexní? Pokud ano, najděte generující systém pseudonorem.
(3) Je X metrizovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.

Příklad č. 18 [VOLNÝ]
Nechť I je jeden z intervalů $(1,2)$ nebo $[1,2]$. Nechť prostor

$$X = \{[f]; f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in I : [f] \in L^p(\mathbb{R})\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in I$.
(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.
(5) Splývají uvedené dva prostory?

Příklad č. 19 [VOLNÝ]
Nechť I je jeden z intervalů $[1,2)$ nebo $(1,2]$. Nechť prostor

$$X = \{[f]; f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in I : [f] \in L^p(\mathbb{R})\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in I$.
(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.
(5) Splývají uvedené dva prostory?

Příklad č. 20 [VOLNÝ]

Nechť I je jeden z intervalů $(1,2)$, $[1,2)$, $(1,2]$ nebo $[1,2]$. Nechť prostor

$$X = \{[f]; f : [0,1] \to \mathbb{F} \text{ měřitelná taková, že } \forall p \in I : [f] \in L^p([0,1])\}$$

je opatřený systémem norem $\|\cdot\|_p$, $p \in I$.

(1) Popište bázi okolí nuly v této topologii.
(2) Je X Hausdorffův? Je X metrizovatelný? Je to Fréchetův prostor?
(3) Je X normovatelný?
(4) Popište všechny spojité lineární funkcionály na X.
(5) Splývají některé z uvedených čtyř prostorů?