FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

ZIMNÍ SEMESTER 2018/2019

ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY – DRUHÁ SADA

Obecné poznámky:

- Všechna tvrzení a všechny výpočty musí být srozumitelně zdůvodněné. Pro tento účel je možné využít znalosti z přednášky (o Banachových algebrách i z předchozích kapitol) a také znalosti z bakalářských kurzů matematiky (včetně komplexní analýzy – Cauchyova věta, Cauchyův vzorec, princip maxima modulu aj.).
- Odevzdaná řešení musí být ručně psaná, nikoli tištěná.
- M_n je standardní maticová algebra komplexních matic typu $n \times n$ opatřená maticovým násobením, maticovou normou pocházející z $L(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ a standardní involucí, která každé matici přiřadí matici adjungovanou (tj., matici komplexně sdruženou k transponované matici).
- Je-li G komutativní grupa, $\ell^1(G)$ značí standardní konvoluční algebru (viz Příklad 12 k Banachových algebrám). Příklady grup, na které se to používá, jsou $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ ($= \{0, \dots, n-1\}$ se sčítáním modulo n) nebo $Z_m \times Z_n$ (součin dvou grup, operace jsou definovány po souřadnicích).
- Lokálně kompaktní prostor $\Delta(A)$ (tj. multiplikativní funkcionály na A opatřené slabou* topologií; pro algebry s jednotkou je tento prostor kompaktní) je třeba nalézt pomocí analýzy příslušné algebry. Lze použít následující známé popisy:
  - $\Delta(\mathcal{C}(K))$ (kde K je kompaktní prostor) je tvořen evaluačními funkcionály $f \mapsto f(t)$ pro $t \in K$ (tj. Diracovými mírami). Tedy, $\Delta(\mathcal{C}(K))$ je kanonicky homeomorfní K. Totéž platí pro $\Delta(\mathcal{C}_0(T))$, kde T je lokálně kompaktní.
  - $\Delta(\ell^1(G))$ je tvořen grupovými homorphismy $\varphi : G \to \mathbb{T}$ (tj. funkcemi $\varphi : G \to \mathbb{T}$ splňujícími $\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ pro $g_1, g_2 \in G$) jako prvky $\ell^\infty(G) = (\ell^1(G))^*$ (s využitím standardní duality).
  - Speciálně, $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}))$ lze ztotožnit s $\mathbb{T}$, kde každému $\lambda \in \mathbb{T}$ odpovídá homorphismus $\varphi_\lambda(n) = \lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
  - $\Delta(L^1(\mathbb{R}))$ lze ztotožnit s $\mathbb{R}$, kde každému $t \in \mathbb{R}$ odpovídá funkce $\varphi_t(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$, jako prvek $L^\infty(\mathbb{R}) = (L^1(\mathbb{R}))^*$.
- K výpočtu spektra lze použít definici nebo Gelfandovu transformaci (příslušný obor hodnot).
- K určení, zda komutativní Banachova algebra je izomorfní nebo izometrická C^*-algebře, lze použít Gelfandovu transformaci. (Je izomorfní, právě když Gelfandova transformace je prostá a na; izometrická, právě když navíc je Gelfandova transformace izometrie.)
- Příklady je třeba rezervovat e-mailem. Rezervace bude potvrzena uvedením čísla problému u daného studenta v SISu. Poku příklad již není volný, upozorním studenta v odpovědi na jeho e-mail. V rezervačním e-mailu je možné uvést více příkladů, v pořadí odpovídajícím preferencím studenta. Rezervuji první z nich, který je dosud volný.
- Pokud se někomu zdá jeho úkol neřešitelný, příliš obtížný, nejasný atp., nechť se ozve. Dotazy, vysvětlení či konzultace jsou možné.
- Doporučený termín odevzdání: 21.12.2018

Příklad č. 1 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$
jako podprostor maticové algebry M_3 opatřený standardní maticovou normou.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova podalgebra M_3.
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.
(5) Nechť $\boldsymbol{x} \in A$ a nechť f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(\boldsymbol{x})$. Spočtěte $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$.

Příklad č. 2 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$
jako podprostor maticové algebry M_4 opatřený standardní maticovou normou.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova podalgebra M_4. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 3 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ je opatřený konvolucí (jako násobením).

(1) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(2) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.

Příklad č. 4 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $p \in [1, \infty)$ a nechť $A = \ell^p$ je opatřený bodovým násobením.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 5 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť

$$A = c_0(\mathbb{N}; \ell^1(\mathbb{Z}_2)) = \left\{ (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}; (\forall n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x}_n \in \ell^1(\mathbb{Z}_2)) \ \& \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n\|_1 = 0 \right\}$$

je opatřený normou a násobením danými vzorci

$$\|(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}\|_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{x}_n\|_1 , \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty} \cdot (\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^{\infty} = (\boldsymbol{x}_n * \boldsymbol{y}_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}, (\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^{\infty} \in A.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?
(4) Je A izomorfní C^*-algebře?
(5) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 6 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť

$$A = \mathcal{C}([0,1], \ell^1(\mathbb{Z}_2)) = \{ f : [0,1] \to \ell_1(\mathbb{Z}_2); f \text{ je spojitá} \}$$

je opatřený normou a násobením danými vzorci

$$\|f\|_A = \sup_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_1 , \quad (f \cdot g)(t) = f(t) * g(t), \quad t \in [0,1], f, g \in A.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?
(4) Je A izomorfní C^*-algebře?
(5) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.

Příklad č. 7 [VOLNÝ]
Nechť

$$A = \ell^1(\mathbb{Z}; c_0) = \left\{ (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}; (\forall n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x}_n \in c_0) \ \& \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\boldsymbol{x}_n\|_\infty < \infty \right\}$$

je opatřený normou a násobením danými vzorci

$$\|(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} \|\boldsymbol{x}_n\|_\infty , \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{y}_{n-k} \right)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A,$$

kde násobení on c_0 je bodové.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 8 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $A = L^1(\mathbb{R}; c_0)$ je Lebesgue-Bochnerův prostor. Nechť A je opatřený násobením daným vzorcem

$$(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) = (B) \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{f}(y)\boldsymbol{g}(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in A,$$

kde násobení on c_0 je bodové.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 9 [VOLNÝ]

Nechť $A = \ell^1(\mathbb{Z}_3) \times \mathcal{C}([0,1])$ je opatřený normou a násobení danými vzorci

$$\|(\boldsymbol{x}, f)\|_A = \max\{\|\boldsymbol{x}\|_1, \|f\|_\infty\}, \quad (\boldsymbol{x}, f)\cdot(\boldsymbol{y}, g) = (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}, f\cdot g), \quad (\boldsymbol{x}, f)(\boldsymbol{y}, g) \in A,$$

kde the násobení on $\mathcal{C}([0,1])$ je bodové.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?
(4) Je A izomorfní C^*-algebře?
(5) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.

Příklad č. 10 [JIŽ REZERVOVÁN]

Nechť $A = \mathcal{C}^1([0,1])$ je prostor (komplexních) spojitých funkcí na $[0,1]$, jejichž derivace je spojitá na $(0,1)$ a má vlastní jednostranné limity v krajních bodech, opatřený bodovým násobením a standardní normou

$$\|f\|_A = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad f \in A.$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?
(3) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.
(4) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(5) Je A izomorfní C^*-algebře?

Příklad č. 11 [VOLNÝ]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je omezená otevřená množina a nechť $\partial\Omega$ značí její hranici. Nechť $A = \mathcal{C}(\partial\Omega)$ a

$$B = \{f \in A; \exists g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : g|_{\partial\Omega} = f \ \&\ g|_\Omega \text{ je holomorfní}\}.$$

(1) Ukažte, že B je uzavřená podalgebra Banachovy algebry A obsahující jednotku A.
(2) Pro $f \in B$ určete $\sigma_A(f)$ a $\sigma_B(f)$.
(3) Najděte $\Delta(B)$ a popište Gelfandovu transformaci B.

Příklad č. 12 [VOLNÝ]

Nechť

$$A = c(\mathbb{N}; M_2) = \left\{(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^\infty; (\forall n \in \mathbb{N} : \boldsymbol{x}_n \in M_2) \ \&\ \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \text{ existuje v } M_2\right\}$$

je opatřený normou a násobení danými vzorci

$$\|(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^\infty\|_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{x}_n\|_{M_2}, \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^\infty \cdot (\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^\infty = (\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n)_{n=1}^\infty, \quad (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^\infty, (\boldsymbol{y}_n)_{n=1}^\infty \in A,$$

kde M_2 je opatřený standardní maticovou normou a maticovým násobením.

(1) Ukažte, že A je Banachova algebra. Má jednotku? Je komutativní?
(2) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.
(3) Existuje involuce na A taková, aby A byla C^*-algebra?

Příklad č. 13 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$A = M_2(\mathcal{C}([0,1])) = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}; f_{ij} \in \mathcal{C}([0,1]) \text{ pro } i,j = 1,2 \right\}$$
je opatřený maticovým násobením, tj.
$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \cdot g_{11} + f_{12} \cdot g_{21} & f_{11} \cdot g_{12} + f_{12} \cdot g_{22} \\ f_{21} \cdot g_{11} + f_{22} \cdot g_{21} & f_{21} \cdot g_{12} + f_{22} \cdot g_{22} \end{pmatrix}$$
kde $\mathcal{C}([0,1])$ je opatřený bodovým násobení.

(1) Najděte normu a involuci na A, aby A byla $\mathbb{C}^*$-algebra.
(2) Má A jednotku? Je komutativní?
(3) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.

Příklad č. 14 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť
$$A = M_2(\ell^1(\mathbb{Z}_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{11} & \boldsymbol{x}_{12} \\ \boldsymbol{x}_{21} & \boldsymbol{x}_{22} \end{pmatrix}; \boldsymbol{x}_{ij} \in \ell^1(\mathbb{Z}_2) \text{ pro } i,j = 1,2 \right\}$$
je opatřený maticovým násobením, tj.
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{11} & \boldsymbol{x}_{12} \\ \boldsymbol{x}_{21} & \boldsymbol{x}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{11} & \boldsymbol{y}_{12} \\ \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{y}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{11} * \boldsymbol{y}_{11} + \boldsymbol{x}_{12} * \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{x}_{11} * \boldsymbol{y}_{12} + \boldsymbol{x}_{12} * \boldsymbol{y}_{22} \\ \boldsymbol{x}_{21} * \boldsymbol{y}_{11} + \boldsymbol{x}_{22} * \boldsymbol{y}_{21} & \boldsymbol{x}_{21} * \boldsymbol{y}_{12} + \boldsymbol{x}_{22} * \boldsymbol{y}_{22} \end{pmatrix}.$$

(1) Ukažte, že A je algebra s jednotkou. Je komutativní?
(2) Najděte normu on A taková, aby A byla Banachova algebra a aby norma jednotky byla 1.
(3) Spočtěte spektrum a rezolventní funkci obecného prvku A.

Příklad č. 15 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $A = \ell^1(\mathbb{N}_0)$ se standardní normou a s násobením definovaným vzorcem
$$(x_n)_{n=0}^\infty * (y_n)_{n=0}^\infty = \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right)_{n=0}^\infty .$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 16 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť $A = \ell^1(\mathbb{N})$ se standardní normou a s násobením definovaným vzorcem
$$(x_n)_{n=1}^\infty * (y_n)_{n=1}^\infty = \left(\sum_{k \cdot l = n} x_k y_l \right)_{n=1}^\infty .$$

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 17 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

jako podprostor maticové algebry M_4 opatřený standardní maticovou normou.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova podalgebra M_4. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.

Příklad č. 18 [JIŽ REZERVOVÁN]
Nechť

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

jako podprostor maticové algebry M_5 opatřený standardní maticovou normou.

(1) Ukažte, že A je komutativní Banachova podalgebra M_5. Má A jednotku?
(2) Najděte $\Delta(A)$ a popište Gelfandovu transformaci A.
(3) Je A izomorfní C^*-algebře?
(4) Spočtěte spektrum obecného prvku A.