

IV.2 Spektrum prvku algebry a jeho vlastnosti

Definice. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$.

- **Spektrum** prvku x rozumíme množinu

$$\sigma_A(x) = \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ není invertibilní v } A\}.$$

- **Rezolventní množinou** prvku x rozumíme množinu $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.
- **Rezolventou** prvku x rozumíme funkci

$$R(\lambda, x) := (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Pokud A je Banachova algebra bez jednotky a $x \in A$, pak **spektrum** prvku x rozumíme množinu

$$\sigma_A(x) = \sigma(x) = \sigma_{A+}((x, 0)).$$

Pokud A je Banachova algebra (s jednotkou či bez), pak **spektrálním poloměrem** prvku $x \in A$ rozumíme číslo

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Poznámky:

- (1) Spektrum prvku je čistě algebraický pojem, nezávisí na normě Banachovy algebry.
- (2) Pokud A nemá jednotku, pak $0 \in \sigma_A(x)$ pro každé $x \in A$.
- (3) Pokud A má jednotku, pak $\sigma_{A+}((x, 0)) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.

Tvrzení 8 (vlastnosti rezolventy). Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$. Pak platí:

- $\rho(a)$ je otevřená podmnožina \mathbb{C} .
- Zobrazení $\lambda \mapsto R(\lambda, a)$ je spojitě na $\rho(a)$.
- Pro $\lambda, \mu \in \rho(a)$ platí

$$R(\mu, a) - R(\lambda, a) = -(\mu - \lambda)R(\mu, a)R(\lambda, a).$$

Speciálně platí, že prvky $R(\mu, a)$ a $R(\lambda, a)$ komutují.

- Funkce $\lambda \mapsto \varphi(R(\lambda, a))$ je holomorfní na $\rho(a)$ pro každé $\varphi \in A^*$.
- Pro $|\lambda| > \|a\|$ platí $\lambda \in \rho(a)$ a

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{a}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

- Pro $\lambda \in \rho(a)$ platí $aR(\lambda, a) = R(\lambda, a)a$.

Věta 9 (neprázdnost spektra). *Nechť A je Banachova algebra. Pak pro každé $x \in A$ je $\sigma(x)$ neprázdná kompaktní podmnožina \mathbb{C} .*

Poznámka. $\{a \in A : \sigma(a) \subset G\}$ je otevřená pro $G \subset \mathbb{C}$ otevřenou (tj. „ $\sigma : A \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ je shora polospojité mnohoznačné zobrazení A do množiny neprázdných kompaktních podmnožin \mathbb{C} “).

Věta 10 (Gelfand-Mazur). *Nechť A je Banachova algebra. Pak A je těleso (tj. všechny nenulové prvky A jsou invertibilní, neboli $G(A) = A \setminus \{0\}$), právě když je A izometricky izomorfní Banachově algebře \mathbb{C} .*

Lemma 11 (o spektru a polynomu). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li $p(\lambda) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \lambda^j$ polynom s komplexními koeficienty a $a \in A$, definujeme $p(a) = \sum_{j=0}^n \alpha_j a^j$. Pak platí:*

- (a) $p(a) \in G(A)$, právě když nulové body polynomu leží v $\rho(a)$.
- (b) $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

Věta 12 (o spektrálním poloměru). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$. Pak platí:*

- (a) $r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- (b) Vzorec z Tvzení 8(v) platí i pro $|\lambda| > r(a)$, přičemž řada vpravo konverguje absolutně.

Důsledek 13. *Je-li A Banachova algebra s jednotkou a $a \in A$ splňuje $r(a) < 1$, pak $(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ (řada konverguje absolutně).*

Tvrzení 14. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e . Nechť B je uzavřená podalgebra A obsahující e a $x \in B$. Pak platí:*

- (a) $\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.
- (b) Nechť G je komponenta souvislosti $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$. Pak buď $G \subset \sigma_B(x)$ nebo $G \cap \sigma_B(x) = \emptyset$.
- (c) Je-li $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ souvislá množina, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Důsledek 15. *Nechť A je Banachova algebra, B její uzavřená podalgebra a $x \in B$. Pak platí (a)–(c) z Tvzení 14, pokud v nich všude $\sigma_A(x)$ a $\sigma_B(x)$ nahradíme $\sigma_A(x) \cup \{0\}$ a $\sigma_B(x) \cup \{0\}$.*