

IV.3 Holomorfní kalkulus

Tvrzení 16 (křivkový integrál s hodnotami v Banachově prostoru). *Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá po částech \mathcal{C}^1 křivka (tj., φ je spojitě zobrazení a existuje dělení intervalu $[a, b]$ takové, že na každém z dělicích intervalů je derivace φ' spojitá a má v krajních bodech vlastní jednostranné limity). Nechť dále X je Banachův prostor a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow X$ je spojitě zobrazení (kde $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b])$ je obraz křivky φ). Pak integrál*

$$\int_{\varphi} f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

existuje jako Bochnerův.

Poznámky:

- (1) Stejně jako v komplexní analýze budeme uvažovat i integrál přes cykly (tj. formální součty uzavřených po částech \mathcal{C}^1 křivek).
- (2) Pro výpočet křivkového integrálu a práci s ním budeme používat slabou verzi integrálu, tj. ekvivalenci

$$x = \int_{\varphi} f \Leftrightarrow \forall x^* \in X^* : x^*(x) = \int_{\varphi} x^* \circ f.$$

- (3) Pro definici uvedeného křivkového integrálu a práci s ním není nezbytná teorie Bochnerova integrálu. Integrál existuje i v Riemannově smyslu. Přičemž Riemannův integrál funkce $g : [a, b] \rightarrow X$ je roven prvku $x \in X$, právě když

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ dělení intervalu $[a, b]$:

$$\max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}) < \delta \Rightarrow \forall u_1 \in [t_0, t_1], \dots, u_k \in [t_{k-1}, t_k] : \left\| x - \sum_{j=1}^k f(u_j)(t_j - t_{j-1}) \right\| < \varepsilon.$$

Lze ukázat, že v našem případě Riemannův integrál existuje a navíc platí ekvivalence z předchozího bodu. Tento přístup se též vyskytuje v literatuře.

Definice. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e , $x \in A$ a f buď funkce holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\sigma(x)$. Nechť Γ je „cyklus obíhající $\sigma(x)$ v Ω jedenkrát v kladném smyslu“ (tj. Γ je cyklus v Ω , $\text{ind}_{\Gamma} z$ nabývá jen hodnot 0 nebo 1, přičemž pro $z \in \sigma(x)$ je $\text{ind}_{\Gamma} z = 1$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\text{ind}_{\Gamma} z = 0$). Pak definujeme prvek $\tilde{f}(x) \in A$ vzorcem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Poznámky:

- (1) Z komplexní analýzy víme, že cyklus s uvedenými vlastnostmi vždy existuje.
- (2) Prvek $\tilde{f}(x)$ je dobře definovaný díky Tvrzení 16.
- (3) Z Cauchyovy věty plyne, že hodnota $\tilde{f}(x)$ nezávisí na konkrétní volbě cyklu Γ .
- (4) Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ se nazývá **holomorfním funkčním kalkulem**, nebo též **Dunfordovým funkčním kalkulem**.
- (5) Místo $\tilde{f}(x)$ se často píše jen $f(x)$.

Věta 17 (vlastnosti holomorfního kalkulu). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e , $x \in A$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující $\sigma(x)$.*

- (a) *Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ je algebraický homomorfismus (komutativní) algebry s jednotkou $H(\Omega)$ do algebry A .*
- (b) *$\tilde{id}(x) = x$ a $\tilde{1}(x) = e$, kde $id(\lambda) = \lambda$ a $1(\lambda) = 1$ pro $\lambda \in \Omega$.*
- (c) *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$, kde $p(x)$ má význam jako v Lemmatu 11.*
- (d) *Je-li $\lambda \in \Omega$, pak $\tilde{f}(\lambda e) = f(\lambda)e$.*
- (e) *Pokud $f_n \rightarrow f$ lokálně stejnoměrně na Ω (kde $f_n \in H(\Omega)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), pak $\tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ v A .*
- (f) *$\tilde{f}(x) \in G(A)$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(x)$.*
- (g) *$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.*
- (h) *$(\tilde{g \circ f})(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ pro $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega')$, $\Omega' \supset f(\sigma(x))$.*
- (i) *Pokud $y \in A$ komutuje s x (tj. $yx = xy$), pak y komutuje též s $\tilde{f}(x)$ pro každou $f \in H(\Omega)$.*

Poznámka. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$.*

- (1) *Pokud f a g jsou dvě holomorfní funkce na okolí $\sigma(x)$, které se na nějakém okolí $\sigma(x)$ rovnají, pak $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$.*
- (2) *Může se stát, že f a g se rovnají na $\sigma(x)$ a přitom $\tilde{f}(x) \neq \tilde{g}(x)$.*
- (3) *Přiřazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ nemusí být prosté. Tj. rovnost $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ neimplikuje, že se f a g shodují na nějakém okolí $\sigma(x)$.*
- (4) *Pokud $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$, pak $f|_{\sigma(x)} = g|_{\sigma(x)}$.*