IV.4 Ideály, komplexní homomorfismy a Gelfandova transformace

Definice. Nechť A je Banachova algebra. **Ideálem** v A rozumíme vlastní vektorový podprostor $I \subset A$ takový, že kdykoli $x \in I$ a $y \in A$, platí $xy \in I$ a $yx \in I$. **Maximálním ideálem** v algebře A rozumíme ideál, který je maximální vzhledem k inkluzi.

Poznámky:

(1) Každý ideál je zároveň vlastní podalgebrou. Vlastní podalgebra nemusí být ideálem.
(2) Zkoumají se i **levé ideály** (definované implikací $x \in I, y \in A \Rightarrow yx \in I$) a **pravé ideály** (definované analogicky). Pak ideál je podprostor, který je zároveň levý ideál i pravý ideál. My se však jednostrannými ideály zabývat nebudeme.

Tvrzení 18 (vlastnosti ideálů a maximálních ideálů). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*

(a) *Je-li I ideál v A, je $I \cap G(A) = \emptyset$.*
(b) *Uzávěr ideálu v A je též ideálem v A.*
(c) *Každý ideál I v A je obsažen v maximálním ideálu J.*
(d) *Každý maximální ideál v A je uzavřený.*

Příklady 19.

(1) *Je-li X nekonečněrozměrný Banachův prostor, pak $K(X)$ je uzavřený ideál v Banachově algebře $L(X)$.*
(2) *Jediný ideál v maticové algebře M_n (kde $n \in \mathbb{N}$) je nulový ideál.*
(3) *Nechť K je kompaktní Hausdorffův prostor. Pak všechny uzavřené ideály v Banachově algebře $\mathcal{C}(K)$ jsou podprostory tvaru*

$$\{f \in \mathcal{C}(K); f|_F = 0\}, \text{ kde } F \subset K \text{ je neprázdná uzavřená množina.}$$

Tvrzení 20 (faktorizace algeber). *Je-li A Banachova algebra a I je uzavřený ideál v A, pak Banachův kvocient A/I je Banachova algebra se součinem $q(x)q(y) = q(xy)$, kde q je kvocientové zobrazení Banachova prostoru A na Banachův prostor A/I. Je-li A komutativní, je i A/I komutativní. Má-li A jednotku, má i A/I jednotku.*

Definice.

- Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Zobrazení $h : A \to B$ nazýváme **homomorfismem Banachových algeber** (krátce **homomorfismem**), pokud je lineární a navíc $h(xy) = h(x)h(y)$ pro $x, y \in A$.
- **Komplexním homomorfismem** na Banachově algebře A rozumíme homomorfismus $h : A \to \mathbb{C}$.
- Označme $\Delta(A)$ množinu všech nenulových komplexních homomorfismů na A.

Poznámky:

(1) V definici homomorfismu Banachových algeber není požadavek spojitosti. V některých důležitých případech je homomorfismus spojitý automaticky (viz například Tvrzení 21 a Tvrzení 31).
(2) Je-li $h : A \to B$ homomofismus Banachových algeber, který není identicky roven nule, pak jeho jádro je ideálem v algebře A.
(3) Z předchozí poznámky a z Příkladu 19(2) plyne, že pro $n \geq 2$ je $\Delta(M_n) = \emptyset$.
(4) Kvocientové zobrazení z Tvrzení 20 je homomorfismem Banachových algeber.

Tvrzení 21 (vlastnosti komplexních homomorfismů). *Nechť A je Banachova algebra a nechť $h \in \Delta(A)$.*

- *Má-li A jednotku e, pak platí:*
  (a) $h(e) = 1$ a $\|h\| = 1$;
  (b) $\ker h$ *je maximální ideál v A;*
  (c) *je-li $x \in G(A)$, je $h(x) \neq 0$.*
- *Pro obecnou Banachovu algebru A (s jednotkou či bez) platí:*
  (d) *Existuje právě jedno $\tilde{h} \in \Delta(A^+)$, které rozšiřuje h (tj. splňuje $\tilde{h}(x, 0) = h(x)$ pro $x \in A$);*
  (e) $\|h\| \leq 1$;
  (f) $h(x) \in \sigma(x)$ *pro $x \in A$.*

Tvrzení 22 (vlastnosti $\Delta(A)$). *Nechť A je Banachova algebra.*

(a) *Má-li A jednotku, je $\Delta(A)$ slabě* kompaktní podmnožina jednotkové sféry S_{A^*}.*
(b) $\Delta(A^+) = \{\tilde{h}; h \in A\} \cup \{h_\infty\}$, *kde $\tilde{h}$ je rozšíření h dané Tvrzením 21(d) a $h_\infty(x,\lambda) = \lambda$ pro $(x,\lambda) \in A^+$.*
(c) *Pokud A nemá jednotku, je $\Delta(A)$ podmnožina jednotkové koule B_{A^*} a $\Delta(A) \cup \{\boldsymbol{o}\}$ je slabě* kompaktní. Speciálně, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní ve slabé* topologii.*

Tvrzení 23 (komplexní homomorfismy a maximální ideály). *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*

(1) *Je-li I ideál v A kodimenze jedna, pak existuje jediné $h \in \Delta(A)$, pro které $I = \ker h$.*
(2) *Je-li A komutativní, pak $h \mapsto \ker h$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A.*

Definice. Nechť A je komutativní Banachova algebra.

- Nechť $x \in A$. Pro $h \in \Delta(A)$ položme $\hat{x}(h) = h(x)$. Pak funkci $\hat{x} : \Delta(A) \to \mathbb{C}$ nazýváme **Gelfandovou transformací prvku** x. Z definic snadno plyne, že $\hat{x}$ je spojitá komplexní funkce na $\Delta(A)$, navíc z Tvrzení 22(c) vidíme, že $\hat{x} \in \mathcal{C}_0(\Delta(A))$.
- **Gelfandovou transformací algebry** A rozumíme zobrazení $\Gamma : A \to \mathcal{C}_0(\Delta(A))$ definované předpisem $\Gamma(x) = \hat{x}$, $x \in A$.

Věta 24 (vlastnosti Gelfandovy transformace). *Nechť A je komutativní Banachova algebra a $\Gamma : A \to \mathcal{C}_0(\Delta(A))$ její Gelfandova transformace. Dále, nechť $\Gamma^+ : A^+ \to \mathcal{C}(\Delta(A^+))$ je Gelfandova transformace algebry A^+. K popisu $\Delta(A^+)$ použijme Tvrzení 22(b) (včetně značení).*

(a) *Γ je homomorfismus algebry A do algebry $C_0(\Delta(A))$.*
(b) *Pro $(x,\lambda) \in A^+$ platí*

$$\Gamma^+(x,\lambda)(\tilde{h}) = \Gamma(x)(h) + \lambda \quad \textit{for } h \in \Delta(A),$$
$$\Gamma^+(x,\lambda)(h_\infty) = \lambda.$$

(c) *Má-li A jednotku, pak*

$$\ker \Gamma = \operatorname{rad}(A) := \bigcap \{I : I \textit{ je maximální ideál v } A\}.$$

Speciálně, Γ je prostá (tj. je to izomorfismus algeber A a $\Gamma(A) = \hat{A}$), právě když $\operatorname{rad}(A) = \{0\}$ (tj. A je **polojednoduchá***).*
(d) *Γ je prostá, právě když Γ^+ je prostá.*
(e) *Má-li A jednotku, pak pro každé $x \in A$ platí $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma(x)$.*
(f) *Nemá-li A jednotku, pak pro každé $x \in A$ platí $\sigma(x) = \hat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\}$.*
(g) *Pro každé $x \in A$ platí $\|\hat{x}\| = r(x)$.*
(h) *Γ je spojitý homomorfismus, splňuje $\|\Gamma\| \leq 1$.*
(i) *Γ je topologický izomorfismus algeber A a $\Gamma(A)$, právě když Γ je prostá (viz (c,d)) a $\hat{A} = \Gamma(A)$ je uzavřená.*
(j) *$\Gamma(A)$ odděluje body $\Delta(A)$.*