IV.5 C*-algebry – základní vlastnosti

Definice. Nechť A je Banachova algebra.

- **Involucí** na A rozumíme zobrazení $x \mapsto x^*$ algebry A do sebe takové, že pro všechna $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:
$$(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \qquad (xy)^* = y^* x^* \qquad \text{a} \qquad x^{**} = x.$$
- Banachova algebra A s involucí se nazývá C^*-**algebra**, pokud pro každé $x \in A$ platí
$$\|x^* x\| = \|x\|^2.$$
- Je-li A Banachova algebra s involucí a $x \in A$, pak prvek x se nazývá **samoadjungovaný** (neboli **hermiteovský**), pokud $x^* = x$; **normální**, pokud $x^* x = x x^*$.

Poznámky.

(1) Nechť A je Banachova algebra s involucí. Pak $e \in A$ je levá jednotka, právě když e^* je pravá jednotka. Tedy, má-li A levou jednotku nebo pravou jednotku, pak má jednotku a tato jednotka je samoadjungovaná.

(2) Nechť A je Banachova algebra s involucí. Pokud pro každé $x \in A$ platí
$$\|x^* x\| \geq \|x\|^2,$$
pak je A C^*-algebra.

(3) Nechť A je C^*-algebra. Zobrazení $x \mapsto x^*$ je sdruženě lineární izometrie A na A. Pro každé $x \in A$ tedy platí
$$\|x^* x\| = \|x x^*\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

Příklady 25.

(1) *Těleso komplexních čísel je komutativní C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $\lambda^* = \overline{\lambda}$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$.*

(2) *Algebra $\mathcal{C}_0(T)$, kde T je lokálně kompaktní prostor, je komutativní C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem $f^*(t) = \overline{f(t)}$ pro $t \in T$.*

(3) *Maticová algebra M_n je C^*-algebra, pokud involuci definujeme předpisem*
$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right)^* = (\overline{a_{ji}})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}.$$

(4) *Je-li H Hilbertův prostor, pak algebry $L(H)$ a $K(H)$ jsou C^*-algebry, pokud involucí T^* rozumíme adjungovaný operátor k T.*

(5) *Na algebře $L^1(\mathbb{R}^n)$ lze involuci definovat buď předpisem $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$; nebo předpisem $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ani s jednou z těchto involucí není $L^1(\mathbb{R}^n)$ C^*-algebra.*

Tvrzení 26 (vlastnosti algeber s involucí). *Nechť A je Banachova algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí:*

(a) *Prvky $x + x^*$, $i(x - x^*)$, $x^* x$ jsou samoadjungované.*

(b) *Existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Navíc, x je normální, právě když $uv = vu$.*

(c) *Má-li A jednotku, pak $x \in G(A)$, právě když $x^* \in G(A)$ (pak $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$).*

(d) *$\sigma(x^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Tvrzení 27 (o spektrálním poloměru a normě normálního prvku). *Je-li A C^*-algebra a $a \in A$ je normální, pak $r(a) = \|a\|$.*

Důsledek 28. *Nechť A je algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma $\|\cdot\|$, pro kterou je $(A, \|\cdot\|)$ C^*-algebra.*

Tvrzení 29 (přidání jednotky). *Nechť A je Banachova algebra s involucí.*

(a) *A^+ je rovněž Banachova algebra s involucí, pokud involuci definujeme předpisem $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$ pro $(a, \lambda) \in A^+$.*

(b) *Je-li A C^*-algebra, pak i A^+ je C^*-algebra, pokud involuci definujeme jako v bodě (a) a normu na A^+ definujeme vzorcem*

$$\|(a, \lambda)\| = \max\{|\lambda|, \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \leq 1\}\}.$$

(c) *Je-li A C^*-algebra bez jednotky, pak normu z (b) lze vyjádřit ve tvaru*

$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\|; b \in A, \|b\| \leq 1\}.$$

Poznámka: Norma na A^+ z Tvrzení 29(b) se liší od normy z Tvrzení 2(b). Z Důsledku 28 plyne, že definice z Tvrzení 29(b) je jediná možná.

Definice. Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$. Říkáme, že h je $*$-**homomorfismus**, je-li to homomorfismus Banachových algeber splňující navíc $h(x^*) = h(x)^*$ pro každé $x \in B$.

Tvrzení 30 (o automatické spojitosti $*$-homomorfismu). *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je $*$-homomorfismus B do A. Pak $\|h\| \leq 1$.*

Příklad 31. *Nechť K, L jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ je $*$-homomorphismus splňující $\varphi(1) = 1$. Pak existuje spojité zobrazení $\alpha : L \to K$ takové, že $\varphi(f) = f \circ \alpha$ pro $f \in \mathcal{C}(K)$. Pokud φ je navíc prosté, pak $\alpha(L) = K$, a tedy φ je izometrie $\mathcal{C}(K)$ do $\mathcal{C}(L)$.*

Tvrzení 32. *Nechť A je C^*-algebra. Pak pro $a \in A$ platí:*

(a) *Je-li a samoadjungovaný, pak $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

(b) *Má-li A jednotku a $a^* = a^{-1}$ (tj. a je* **unitární**), *pak $\sigma(a) \subset \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

(c) *Pro $h \in \Delta(A)$ a $a \in A$ platí $h(a^*) = \overline{h(a)}$ (h je $*$-homomorfismus, je-li to homomorfismus).*

Věta 33 (Gelfand-Naimark). *Nechť A je komutativní C^*-algebra. Pak Γ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry A na C^*-algebru $C_0(\Delta(A))$ (mimo jiné tedy platí identita $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ na A).*

Speciálně, A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.

Důsledek 34. *Nechť A a B jsou komutativní C^*-algebry. Pak A a B jsou $*$-izomorfní, právě když $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Důsledek 35. *Nechť A a B jsou C^*-algebry a $h : B \to A$ je prostý $*$-homomorfismus B do A. Pak h je izometrie A do B.*