II.2 Slabé topologie na lokálně konvexních prostorech

Věta 6 (Mazurova věta). *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pak platí:*

(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.

(b) *A je uzavřená, právě když je slabě uzavřená.*

Důsledek 7. *Nechť X je metrizovatelný LCS a (x_n) posloupnost v X, která slabě konverguje k bodu $x \in X$. Pak existuje posloupnost (y_n) v X, která splňuje*

- $y_n \in \operatorname{co}\{x_k; k \geq n\}$ *pro každé $n \in \mathbb{N}$;*
- $y_n \to x$ *v (původní topologii prostoru) X.*

Věta 8 (omezenost a slabá omezenost). *Nechť X je LCS a $A \subset X$. Pak A je omezená v X, právě když je omezená v $\sigma(X, X^*)$.*

Tvrzení 9 (slabá topologie na podprostoru). *Nechť X je LCS a $Y \subset\subset X$. Pak na Y splývá slabá topologie $\sigma(Y, Y^*)$ s restrikcí slabé topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y.*

II.3 Poláry a jejich aplikace

Definice. Nechť X je LCS. Nechť $A \subset X$ a $B \subset X^*$ jsou neprázdné množiny. Pak definujeme

$$\begin{aligned}
A^{\triangleright} &= \{f \in X^*; \forall x \in A : \operatorname{Re} f(x) \leq 1\}, & B_{\triangleright} &= \{x \in X; \forall f \in B : \operatorname{Re} f(x) \leq 1\},\\
A^{\circ} &= \{f \in X^*; \forall x \in A : |f(x)| \leq 1\}, & B_{\circ} &= \{x \in X; \forall f \in B : |f(x)| \leq 1\},\\
A^{\perp} &= \{f \in X^*; \forall x \in A : f(x) = 0\}, & B_{\perp} &= \{x \in X; \forall f \in B : f(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

Množiny $A^{\triangleright}$ a $B_{\triangleright}$ nazýváme **poláry** množin A a B, množiny A° a $B_{\circ}$ pak **absolutní poláry** a množiny $A^{\perp}$ a $B_{\perp}$ **anihilátory**.

Poznámky:

(1) Terminologie a značení v literatuře kolísá. Někdy je slovem polára míněna absolutní polára, někdy se pro naši poláru používá značení A°, $B_{\circ}$.

V přednášce Úvod do funkcionální analýzy se pro anihilátor používalo značení A° a ${}^{\circ}A$. My se přidržíme výše uvedeného značení.

(2) Pokud X je Hilbertův prostor, pak pro $A \subset X$ může $A^{\perp}$ označovat buď anihilátor nebo ortogonální doplněk. To je třeba rozlišit podle kontextu. Nicméně tyto dvě situace spolu souvisí. Připomeňme, že v tom případě pro $x \in X$ je

$$f_x(y) = \langle y, x \rangle, \quad y \in X$$

spojitý lineární funkcionál na X a navíc $x \mapsto f_x$ je (sdruženě lineární) izometrie X na X^*. Při tomto značení máme

$$\text{anihilátor } A = \{f_x; x \in \text{ ortogonální doplněk } A\}.$$

(3) Pokud X je Hausdorffův a prostor X^* opatříme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$, pak $(X^*, w^*)^* = X$, a tedy pro $B \subset X^*$ (zpětná) polára $B_{\triangleright}$ dle předchozí definice splývá s polárou $B^{\triangleright}$ vůči prostoru (X^*, w^*) a jeho duálu X. Podobně je tomu pro absolutní poláry a pro anihilátory.

Příklad 10. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak platí*

(a) $(B_X)^{\triangleright} = (B_X)^{\circ} = B_{X^*}$,

(b) $(B_{X^*})_{\triangleright} = (B_{X^*})_{\circ} = B_X$.

Tvrzení 11 (polárový kalkulus). *Nechť X je LCS a $A \subset X$ neprázdná množina.*

(a) *Množina $A^{\triangleright}$ je konvexní a obsahuje nulový funkcionál, A° absolutně konvexní a $A^{\perp}$ je podprostor X^*. Všechny tři množiny jsou navíc slabě* uzavřené.*
(b) $A^{\perp} \subset A^{\circ} \subset A^{\triangleright}$.
(c) *Je-li A vyvážená, je $A^{\triangleright} = A^{\circ}$. Je-li $A \subset\subset X$, je $A^{\triangleright} = A^{\circ} = A^{\perp}$.*
(d) $\{\boldsymbol{o}\}^{\triangleright} = \{\boldsymbol{o}\}^{\circ} = \{\boldsymbol{o}\}^{\perp} = X^*$, $X^{\triangleright} = X^{\circ} = X^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$.
(e) *Pro $c > 0$ platí $(cA)^{\triangleright} = \frac{1}{c}A^{\triangleright}$, $(cA)^{\circ} = \frac{1}{c}A^{\circ}$.*
(f) *Nechť $(A_i)_{i\in I}$ je neprázdný systém neprázdných podmnožin X. Pak $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\circ} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ}$. Analogický vzorec platí i pro poláry a anihilátory.*

Poznámka: Analogická tvrzení platí i pro $B \subset X^*$ a množiny $B_{\triangleright}$, $B_{\circ}$, $B_{\perp}$. Jsou jen dva rozdíly: Množiny $B_{\triangleright}$, $B_{\circ}$ a $B_{\perp}$ jsou slabě uzavřené a pro platnost analogie druhého tvrzení v bodě (d) je třeba předpokládat, že X je Hausdorffův.

Věta 12 (o bipoláře). *Nechť X je LCS a $A \subset X$ a $B \subset X^*$ jsou neprázdné množiny. Pak platí*

$$\begin{aligned}
(A^{\triangleright})_{\triangleright} &= \overline{\text{co}}(A \cup \{\boldsymbol{o}\}) \ (= \overline{\text{co}}^{\sigma(X,X^*)}(A \cup \{\boldsymbol{o}\})), & (B_{\triangleright})^{\triangleright} &= \overline{\text{co}}^{\sigma(X^*,X)}(B \cup \{\boldsymbol{o}\}),\\
(A^{\circ})_{\circ} &= \overline{\text{aco}}A \ (= \overline{\text{aco}}^{\sigma(X,X^*)}A), & (B_{\circ})^{\circ} &= \overline{\text{aco}}^{\sigma(X^*,X)}B,\\
(A^{\perp})_{\perp} &= \overline{\text{span}}A \ (= \overline{\text{span}}^{\sigma(X,X^*)}A), & (B_{\perp})^{\perp} &= \overline{\text{span}}^{\sigma(X^*,X)}B.
\end{aligned}$$

Důsledek 13. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X,Y)$. Pak $(\ker T)^{\perp} = \overline{T'(Y^*)}^{w^*}$.*

Věta 14 (Goldstine). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\varkappa : X \to X^{**}$ kanonické vnoření. Pak platí*

$$B_{X^{**}} = \overline{\varkappa(B_X)}^{\sigma(X^{**},X^*)}.$$

Věta 15 (Banach-Alaoglu). *Nechť X je LCS a $U \subset X$ je okolí $\boldsymbol{o}$. Pak platí:*

(a) *U° je slabě* kompaktní podmnožina X^* (tj., je kompaktní v topologii $\sigma(X^*,X)$).*
(b) *Je-li navíc X separabilní, je U° je v topologii $\sigma(X^*,X)$ metrizovatelná.*

Důsledek 16 (Banach-Alaoglu pro normované prostory). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (B_{X^*}, w^*) je kompaktní. Je-li X separabilní, je (B_{X^*}, w^*) navíc metrizovatelná.*

Důsledek 17 (reflexivní prostory a slabá kompaktnost). *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní. Je-li X reflexivní a separabilní, je (B_X, w) navíc metrizovatelná.*

Důsledek 18. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak každá omezená posloupnost v X má slabě konvergentní podposloupnost.*