

III. Základy vektorové integrace

Úmluva: V této kapitole budeme používat následující značení:

- (M, \mathcal{A}) je pevně zvolený měřitelný prostor, tj. M je nějaká neprázdná množina a \mathcal{A} je nějaká σ -algebra podmnožin M .
- (Ω, Σ, μ) je pevně zvolený prostor s úplnou nezápornou σ -aditivní mírou, tj. Ω je nějaká neprázdná množina, Σ nějaká σ -algebra podmnožin Ω a μ je nezáporná σ -aditivní míra na Σ , která je navíc úplná.
- X je pevně zvolený Banachův prostor nad \mathbb{F} .

Poznámky:

- (1) (Ω, Σ) je speciální případ měřitelného prostoru. Proto vše, co je níže uvedeno pro prostor (M, \mathcal{A}) , lze aplikovat i na prostor (Ω, Σ) .
- (2) Apriori nepředpokládáme, že míra μ je konečná či σ -konečná, i když to jsou samozřejmě nejdůležitější případy.

III.1 Měřitelnost vektorových funkcí

Definice. Nechť $f : M \rightarrow X$ je zobrazení. Říkáme, že funkce f je

- **jednoduchá**, pokud obor hodnot je konečná množina, tj. pokud $f = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{A_j}$, kde $x_1, \dots, x_k \in X$ a A_1, \dots, A_k jsou neprázdné po dvou disjunktní podmnožiny M ;
- **jednoduchá měřitelná**, pokud lze vyjádřit ve tvaru z předchozího bodu a navíc $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$;
- **(silně) \mathcal{A} -měřitelná**, pokud existuje posloupnost (u_n) jednoduchých měřitelných funkcí, která bodově konverguje k f (tj. pro každé $t \in M$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - f(t)\| = 0$);
- **borelovsky \mathcal{A} -měřitelná**, pokud pro každou $U \subset X$ otevřenou platí $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$;
- **slabě \mathcal{A} -měřitelná**, pokud pro každé $\varphi \in X^*$ je funkce $\varphi \circ f : M \rightarrow \mathbb{F}$ (borelovsky) \mathcal{A} -měřitelná.

Větička 1.

- Jednoduché funkce, jednoduché měřitelné funkce, silně \mathcal{A} -měřitelné funkce a slabě \mathcal{A} -měřitelné funkce tvoří vektorový prostor.*
- Nechť (f_n) je posloupnost funkcí $f_n : M \rightarrow X$, která bodově konverguje k funkci $f : M \rightarrow X$. Pokud jsou všechny funkce f_n borelovsky \mathcal{A} -měřitelné (resp. slabě \mathcal{A} -měřitelné), má příslušnou vlastnost i f .*
- Nechť $f : M \rightarrow X$ je funkce. Pak platí*

$$f \text{ silně } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ borelovsky } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ slabě } \mathcal{A}\text{-měřitelná}.$$

Pro jednoduché funkce všechny uvedené druhy měřitelnosti splývají.

- Je-li $f : M \rightarrow X$ silně \mathcal{A} -měřitelná, pak $f(M)$ je separabilní podmnožina X .*
- Je-li $f : M \rightarrow X$ borelovsky \mathcal{A} -měřitelná, pak $t \mapsto \|f(t)\|$ je \mathcal{A} -měřitelná (skalární) funkce.*

Poznámky:

- (1) Borelovsky \mathcal{A} -měřitelné funkce tvoří vektorový prostor, pokud X je separabilní (to plyne z Věty 3 níže), obecně vektorový prostor tvořit nemusí.
- (2) V bodě (c) obrácené implikace neplatí, viz Příklady 6 níže.

Lemma 2. Necht' (f_n) je posloupnost silně \mathcal{A} -měřitelných funkcí $f_n : M \rightarrow X$, která bodově konverguje k funkci $f : M \rightarrow X$. Pak f je silně \mathcal{A} -měřitelná.

Věta 3 (Pettisova). Necht' $f : M \rightarrow X$ je funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) f je silně \mathcal{A} -měřitelná.
- (ii) f je borelovsky \mathcal{A} -měřitelná a $f(M)$ je separabilní podmnožina X .
- (iii) f je slabě \mathcal{A} -měřitelná a $f(M)$ je separabilní podmnožina X .

Definice. Necht' $f : \Omega \rightarrow X$ je zobrazení. Říkáme, že funkce f je

- (silně) μ -měřitelná, pokud existuje posloupnost (u_n) jednoduchých měřitelných funkcí $u_n : \Omega \rightarrow X$, která konverguje k f skoro všude (tj. pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$);
- borelovsky μ -měřitelná (resp. slabě μ -měřitelná), pokud je borelovsky Σ -měřitelná (resp. slabě Σ -měřitelná).

Poznámky:

- (1) Necht' $f : \Omega \rightarrow X$ je funkce. Pak platí:

$$f \text{ silně } \mu\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ borelovsky } \mu\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ slabě } \mu\text{-měřitelná}$$

- (2) Je-li $f : \Omega \rightarrow X$ (silně) μ -měřitelná, pak

$$\exists Y \subset\subset X \text{ separabilní} \exists N \in \Sigma : \mu(N) = 0 \ \& \ f(\Omega \setminus N) \subset Y.$$

Funkce, která splňuje tuto podmínku, se nazývá **esenciálně separabilně hodnotová**.

Lemma 4. Necht' (f_n) je posloupnost silně μ -měřitelných funkcí $f_n : M \rightarrow X$, která skoro všude konverguje k funkci $f : M \rightarrow X$. Pak f je silně μ -měřitelná.

Věta 5 (Pettisova). Necht' $f : \Omega \rightarrow X$ je funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) f je silně μ -měřitelná.
- (ii) f je borelovsky μ -měřitelná a esenciálně separabilně hodnotová.
- (iii) f je slabě μ -měřitelná a esenciálně separabilně hodnotová.

Příklady 6.

- (1) Necht' $\Omega = [0, 1]$, μ je Lebesgueova míra na $[0, 1]$ a Σ je σ -algebra všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin $[0, 1]$. Uvažme funkci $f : [0, 1] \rightarrow \ell^2([0, 1])$ definovanou předpisem $f(t) = e_t$, $t \in [0, 1]$, kde e_t označuje příslušný kanonický jednotkový vektor. Pak f je slabě μ -měřitelná, není esenciálně separabilně hodnotová, tedy není silně μ -měřitelná. Dokonce není ani borelovsky μ -měřitelná.
- (2) Necht' (Ω, Σ, μ) a f jsou jako v bodě (1). Necht' navíc $h : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ je libovolná funkce. Pak i funkce $h \cdot f$ je slabě μ -měřitelná. Přitom pro každé $t \in [0, 1]$ platí $\|h(t)f(t)\| = h(t)$. Tedy, je-li h neměřitelná, pak $g = h \cdot f$ je slabě μ -měřitelná, ale funkce $t \mapsto \|g(t)\|$ není měřitelná.
- (3) Necht' $\Omega = [0, 1]$, Σ je σ -algebra všech podmnožin $[0, 1]$, μ je sčítací míra a f je stejného tvaru jako v bodě (1). Pak f je borelovsky μ -měřitelná, není esenciálně separabilně hodnotová, tedy není silně μ -měřitelná.

Poznámka: Otázka, zda pro konečnou míru μ je každá borelovsky μ -měřitelná funkce esenciálně separabilně hodnotová (a tedy silně μ -měřitelná), je složitější. Odpověď závisí na dodatečných axiómech teorie množin.