

FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2021/2022

PŘÍKLADY KE KAPITOLE II

K ODDÍLU II.1 – OBECNÉ SLABÉ TOPOLOGIE

Příklad 1. Necht' $X = C([0, 1])$ s topologií bodové konvergence na $[0, 1]$. Popište všechny spojité lineární funkcionály na X (tj. popište X^*).

Návod: *Použijte Větu II.4 z přednášky.*

Příklad 2. Necht' X je normovaný lineární prostor, který není úplný, a Y necht' je jeho zúplnění.

- (1) Ukažte, že $X^* = Y^*$, a vysvětlete, v jakém smyslu tato rovnost platí.
- (2) Ukažte, že topologie $\sigma(Y^*, Y)$ a $\sigma(Y^*, X)$ jsou různé.

Návod: (2) *Použijte Větu II.4 z přednášky.*

Příklad 3. Necht' X je normovaný lineární prostor, X^* jeho duál a X^{**} druhý duál. Ukažte, že na X^* splývají slabá a slabá* topologie (tj. topologie $\sigma(X^*, X^{**})$ a $\sigma(X^*, X)$), právě když X je reflexivní Banachův prostor.

Návod: *Použijte Větu II.4 z přednášky.*

Příklad 4. Necht' X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že kanonické vnoření $\varkappa : X \rightarrow X^{**}$ je homeomorfismus (X, w) do (X^{**}, w^*) .

Návod: *Použijte Větičku II.1(6) z přednášky.*

Příklad 5. Z Příkladu I.52 a z Úvodu do funkcionální analýzy víme, že pro $p \in (0, 1]$ je $(\ell^p)^* = \ell^\infty$.

- (1) Ukažte, že topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^p)$, $p \in (0, 1]$, jsou navzájem různé.
- (2) Necht' $0 < p < q \leq 1$. Která z topologií $\sigma(\ell^\infty, \ell^p)$ a $\sigma(\ell^\infty, \ell^q)$ je slabší?

Návod: (1) *Použijte Větu II.4 z přednášky.* (2) *Použijte Větičku II.1(6) z přednášky.*

Příklad 6. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ odděluje body X . Ukažte, že topologie $\sigma(X, M)$ je metrizable, právě když M neobsahuje nespočetnou lineárně nezávislou podmnožinu.

Návod: *Použijte Větu I.12 (nebo I.22) a Lemma II.3 z přednášky.*

K ODDÍLU II.2 – SLABÉ TOPOLOGIE NA LOKÁLNĚ KONVEXNÍCH PROSTORECH

Příklad 7. Necht' X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $(X, \|\cdot\|)$ je separabilní, právě když (X, w) je separabilní.

Návod: *Použijte Mazurovu větu.*

Příklad 8. Najděte příklad Banachova prostoru X a konvexní normově uzavřené podmnožiny X^* , která není slabě* uzavřená.

Návod: Uvažte například $X = c_0$, a tedy $X^ = \ell^1$, za onu množinu zvolte uzavřený konvexní obal kanonických jednotkových vektorů v ℓ^1 . Další zásobu příkladů poskytuje Goldstineova věta.*

Příklad 9. Nechť X a Y jsou LCS a $T : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení. Ukažte, že T je spojitě i jako zobrazení (X, w) do (Y, w) .

Návod: Použijte Větičku II.1(6) z přednášky.

Příklad 10. Nechť X a Y jsou LCS a $T : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení. Pro $\varphi \in Y^*$ definujme zobrazení $T'\varphi : X \rightarrow \mathbb{F}$ předpisem $T'\varphi = \varphi \circ T$.

- (1) Ukažte, že $T'\varphi \in X^*$ pro každé $\varphi \in Y^*$.
- (2) Ukažte, že zobrazení $T' : \varphi \mapsto T'\varphi$ je lineární zobrazení Y^* do X^* .
- (3) Ukažte, že zobrazení T' je spojitě z (Y^*, w^*) do (X^*, w^*) .

Návod: (3) Použijte Větičku II.1(6) z přednášky.

Příklad 11. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T : Y^* \rightarrow X^*$ omezený lineární operátor. Ukažte, že existuje $S \in L(X, Y)$, pro který $T = S'$, právě když T je spojitý i jako zobrazení (Y^*, w^*) do (X^*, w^*) .

*Návod: Uvažte operátor $T' : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ a ukažte, že $T'(\mathcal{K}(X)) \subset \mathcal{K}(Y)$ s využitím Důsledku II.5(c) z přednášky.*

Příklad 12. Nechť X je Hilbertův prostor a (e_n) je ortonormální posloupnost v X . Ukažte, že posloupnost (e_n) konverguje slabě k nule.

Návod: Použijte reprezentaci duálu Hilbertova prostoru a Besselovu nerovnost.

Příklad 13. Nechť X je Hilbertův prostor a $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální systém v X . Ukažte, že množina $\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \cup \{0\}$ je slabě kompaktní.

Návod: S využitím reprezentace duálu k Hilbertovu prostoru a Besselovy nerovnosti ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje všechny prvky ortonormálního systému s výjimkou konečně mnoha.

Příklad 14. Nechť $X = c_0(\Gamma)$ nebo $X = \ell^p(\Gamma)$, kde Γ je nějaká množina. Ukažte, že množina $\{0\} \cup \{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je slabě kompaktní (e_γ značí příslušný kanonický jednotkový vektor).

Návod: S využitím reprezentace duálu X^ ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje všechny kanonické jednotkové vektory s výjimkou konečně mnoha.*

Příklad 15. Nechť $X = C([0, 1])$. Uvažme na X tři topologie – normovou (tj. generovanou supremovou normou), slabou (tj. slabou topologií prostoru $(X, \|\cdot\|_\infty)$ – tu značme w) a topologii bodové konvergence na $[0, 1]$ (tu značme τ_p).

- (1) Najděte posloupnost (f_n) v X , která v topologii τ_p konverguje k nule, ale není omezená v normě.
- (2) Ukažte, že existuje τ_p -omezená množina, která není normově omezená.
- (3) Nechť (f_n) je normově omezená posloupnost X a $f \in X$. Ukažte, že $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $f_n \xrightarrow{\tau_B} f$.
- (4) Platí ekvivalence z bodu (3) bez předpokladu normové omezenosti?

Návod: (2) Použijte posloupnost z bodu (1). (3) Použijte Rieszovu větu o reprezentaci $C([0, 1])^*$ a Lebesgueovu větu. (4) Uvažte posloupnost z bodu (1).

Příklad 16. Ukažte, že v prostoru ℓ^1 splývá slabá a normová konvergence posloupností (tj. ℓ^1 má **Schurovu vlastnost**).

Návod: Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ^1 existuje posloupnost (\mathbf{x}_k) , která slabě konverguje k nule a přitom existuje takové $c > 0$, že $\|\mathbf{x}_k\| > c$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože (\mathbf{x}_k) je omezená, bez újmy na obecnosti $\|\mathbf{x}_k\| = 1$ pro každé k . Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel (k_j) a (m_j) , že $\sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} |x_{k_j}(l)| > \frac{3}{4}$. Následně najděte $\varphi \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$, aby $|\varphi(x_{k_j})| > \frac{1}{2}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.

Příklad 17. Ukažte, že prostory c_0 , ℓ^p pro $p \in (1, \infty]$ a $C([0, 1])$ nemají Schurovu vlastnost.

Návod: V každém z těchto prostorů najděte posloupnost na jednotkové sféře, která slabě konverguje k nule. Pro $C([0, 1])$ využijte popis Příklad 15(3).

Příklad 18. Ukažte, že nekonečnědimensionální Hilbertův prostor nemá Schurovu vlastnost.

Návod: Použijte Příklad 12.

Příklad 19. Ukažte, že prostor $L^1([0, 1])$ nemá Schurovu vlastnost.

Návod: Nechť $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ je identita. Uvažte ON bázi (f_n) prostoru $L^2([0, 1])$ známou z teorie Fourierových řad a uvažte posloupnost (Tf_n) .

Příklad 20. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze.

- (1) Ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje netriviální vektorový podprostor X .
- (2) Ukažte, že S_X je slabě hustá podmnožina B_X .

Návod: (1) Ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje průnik jader konečně mnoha funkcí, a toto je netriviální vektorový podprostor. (2) Použijte (1).

Příklad 21. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze.

- (1) Ukažte, že každé slabé* okolí nuly v X^* obsahuje netriviální vektorový podprostor X^* .
- (2) Ukažte, že S_{X^*} je slabě* hustá podmnožina B_{X^*} .

Návod: X^* má také nekonečnou dimenzi a slabá* topologie je slabší než slabá, tedy lze použít Příklad 20.

Příklad 22. Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\dim X < \infty$.
- (ii) Na X splývá slabá a normová topologie.
- (iii) na X^* splývá slabá* a normová topologie.

Příklad 23. Necht' X je separabilní normovaný lineární prostor. Ukažte, že (X^{**}, w^*) je separabilní.

Návod: *Použijte Goldstineovu větu.*

Příklad 24. Ukažte, že $((\ell^\infty)^*, w^*)$ je separabilní.

Návod: $\ell^\infty = (\ell^1)^*$.

Příklad 25. Necht' X je metrizable LCS. Ukažte, že (X^*, w^*) je σ -kompaktní (tj. sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin).

Návod: *Použijte Větu II.14 a spočetnou bázi okolí nuly v X .*

Příklad 26. Necht' X je neúplný normovaný lineární prostor a Y jeho zúplnění. Z Příkladu 2 víme, že $X^* = Y^*$ a že $\sigma(Y^*, X) \neq \sigma(X^*, X)$. Ukažte, že na jednotkové kouli B_{X^*} topologie $\sigma(Y^*, X)$ a $\sigma(X^*, X)$ splývají.

Návod: *Díky Důsledku II.16 víme, že $(B_{Y^*}, \sigma(Y^*, Y))$ je kompaktní a topologie $\sigma(Y^*, X)$ je slabší Hausdorffova topologie.*

Příklad 27. Uvažme ℓ^∞ jako duál ℓ^1 . Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^∞ splývá slabá* topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ s topologií bodové konvergence (tj. s topologií generovanou pseudonormami $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto |x_n|$, $n \in \mathbb{N}$).

Návod: *Použijte Příklad 26.*

Příklad 28. Uvažme ℓ^1 jako duál k c_0 . Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^1 splývá slabá* topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$ s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklad 26.*

Příklad 29. Necht' $p \in (1, \infty)$. Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^p splývá slabá topologie s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklad 26 a reflexivitu ℓ^p .*

Příklad 30. Ukažte, že na jednotkové kouli c_0 splývá slabá topologie s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklad 4 a 27.*

Příklad 31. Necht' X je LCS a X^* je jeho duál. Pro neprázdnou $A \subset X^*$ definujme

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A\}, \quad x \in X.$$

- (1) Ukažte, že A je $\sigma(X^*, X)$ -omezená, právě když pro každé $x \in X$ je $q_A(x) < \infty$.
- (2) Necht' A je $\sigma(X^*, X)$ -omezená. Ukažte, že q_A je pseudonorma na X .
- (3) Musí být q_A spojitá na X ?
- (4) Necht' U je absolutně konvexní okolí nuly v X . Ukažte, že $p_U = q_{U^\circ}$ (kde p_U je Minkowského funkcionál).

Návod: (3) *Vezměte za X nekonečněrozměrný Banachův prostor se slabou topologií a $A = B_{X^*}$.* (4) *Použijte větu o bipoláře.*

Příklad 32. Necht' X je normovaný lineární prostor, $C > 0$ a $f, g \in S_{X^*}$. Necht' $\|f|_{\ker g}\| \leq C$. Ukažte, že existuje $\alpha \in \mathbb{F}$, $|\alpha| = 1$ a $\|f - \alpha g\| \leq 2C$.

Návod: Pokud $C \geq 1$, tvrzení je triviální. Necht' tedy $C < 1$. Z Hahn-Banachovy věty plyne existence $\tilde{f} \in X^*$, pro které je $\|\tilde{f}\| \leq C$ a $\tilde{f} = f$ na $\ker g$. Protože $\ker g \subset \ker(f - \tilde{f})$, existuje $\beta \in \mathbb{F}$ splňující $f - \tilde{f} = \beta g$. Ukažte, že lze vzít $\alpha = \frac{\beta}{|\beta|}$.

Příklad 33. Necht' X je Banachův prostor. Necht' $f : X^* \rightarrow \mathbb{F}$ je lineární funkcionál, pro který $f|_{B_{X^*}}$ je slabě* spojitě zobrazení. Ukažte, že $f \in \varkappa(X)$.

Návod: Protože $f(B_{X^*})$ je kompaktní podmnožina \mathbb{F} , je $f \in X^{**}$. Příklad $f = 0$ je triviální, tedy bez újmy na obecnosti $\|f\| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ necht' $A_\varepsilon = \{x^* \in B_{X^*}; \operatorname{Re} f(x^*) \geq \varepsilon\}$ a $B_\varepsilon = \{x^* \in B_{X^*}; \operatorname{Re} f(x^*) \leq -\varepsilon\}$. Pak A_ε a B_ε jsou neprázdné disjunktní slabě* kompaktní konvexní množiny, a tedy díky oddělovací větě existuje $g \in \varkappa(X)$, pro které $\sup \operatorname{Re} g(B_\varepsilon) < \inf \operatorname{Re} g(A_\varepsilon)$. Odtud odvoďte, že $\|f|_{\ker g}\| \leq \varepsilon$. Pomocí Příkladu 32 pak ukažte, že f je v uzávěru $\varkappa(X)$, tedy v $\varkappa(X)$.

Příklad 34. Platí tvrzení z předchozího příkladu i pro neúplné prostory?

Návod: Použijte Příklad 26.