

FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2021/2022

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

K ODDÍLU IV.1 – PŘÍKLADY BANACHOVÝCH ALGEBER, INVERTIBILNÍ PRVKY

Příklad 1. Necht' $A = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$ a $n \geq 2$. Uvažujme na A násobení po souřadnicích, tj.,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n).$$

- (1) Ukažte, že A je Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.
- (2) Ukažte, že jednotka má normu 1, právě když $p = \infty$.
- (3) Aplikujte na A příslušné přenormování a ukažte, že nová norma je $\|\cdot\|_\infty$.

Příklad 2. Necht' M_n je algebra komplexních $n \times n$ -matic opatřená maticovým násobením. Připomeňme, že každá $n \times n$ -matice reprezentuje lineární zobrazení $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ a že maticové násobení odpovídá skládání lineárních zobrazení.

- (1) Necht' $p \in [1, \infty]$ a uvažujme na M_n operátorovou normu z $L((\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p))$. Ukažte, že M_n pak je Banachova algebra s jednotkou a že jednotka má normu 1.
- (2) Ukažte, že pro $p_1 \neq p_2$ jsou normy z (1) ekvivalentní a různé, pokud $n \geq 2$.
- (3) Ukažte, že M_n je komutativní, právě když $n = 1$.

Příklad 3. Necht' M_n je algebra komplexních $n \times n$ -matic opatřená maticovým násobením. Uvažujme na M_n normu

$$\|(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

Ukažte, že M_n opatřená touto normou je Banachova algebra s jednotkou a její jednotka má normu větší než 1 (pro $n \geq 2$).

Příklad 4. Necht' $A = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, kde $n \geq 2$ a $p \in [1, \infty]$.

- (1) Definujme násobení na A předpisem

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n).$$

Ukažte, že A opatřená tímto násobením je Banachova algebra a že A má mnoho levých jednotek, ale žádnou pravou jednotku.

- (2) Definujme násobení na A by

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_1, \dots, x_n y_1).$$

Ukažte, že A opatřená tímto násobením je Banachova algebra a že A má mnoho pravých jednotek, ale žádnou levou jednotku.

- (3) Reprezentujte algebry z bodů (1) a (2) jako podalgebry maticové algebry M_n .

Návod: (3) Uvažte matice s jedním nenulovým řádkem nebo sloupcem.

Příklad 5. Necht' $A = \ell^p(\Gamma)$, kde $p \in [1, \infty]$ a Γ je nekonečná množina. Uvažujme na A bodové násobení.

- (1) Ukažte, že A je Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A má jednotku, právě když $p = \infty$.

Příklad 6. Necht' X je libovolný netriviální Banachův prostor. Definujme na X triviální násobení, tj., $x \cdot y = \mathbf{o}$ pro $x, y \in X$.

- (1) Ukažte, že X je Banachova algebra bez jednotky.
- (2) Popište algebra X^+ (s přidanou jednotkou).
- (3) Reprezentujte algebra X a X^+ jako podalgebra $L(X^+) = L(X \oplus_1 \mathbb{C})$.
- (4) Najděte podalgebra maticové algebry M_n (kde $n \geq 2$) izomorfní takové triviální algebře.

Návod: (4) Použijte popis z (3) pro $X = \mathbb{C}^{n-1}$.

Příklad 7. Necht' A_1, \dots, A_n jsou Banachovy algebra a necht' $p \in [1, \infty]$. Uvažme vektorový prostor $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, kde norma a násobení jsou dány vzorci

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \|(\|a_1\|, \dots, \|a_n\|)\|_p,$$

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

- (1) Ukažte, že A je Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A má jednotku, právě když každá z algeber A_1, \dots, A_n má jednotku. (Příslušnou jednotku najděte.)
- (3) Ukažte, že A je komutativní, právě když každá z algeber A_1, \dots, A_n je komutativní.

Příklad 8. Necht' T je Hausdorffův lokálně kompaktní prostor. Uvažme Banachův prostor $\mathcal{C}_0(T)$ (s maximovou normou) a definujme na něm bodové násobení.

- (1) Ukažte, že $\mathcal{C}_0(T)$ je komutativní Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že algebra $\mathcal{C}_0(T)$ má jednotku, právě když T je kompaktní.
- (3) Necht' T není kompaktní. Necht' $B = \text{span}(\mathcal{C}_0(T) \cup \{1\})$ jakožto podalgebra $\ell^\infty(T)$. Ukažte, že B je (algebraicky) izomorfní $(\mathcal{C}_0(T))^+$, ale nikoli izometrická.

Příklad 9. Necht' K je kompaktní Hausdorffův prostor a necht' A je Banachova algebra. Necht' $\mathcal{C}(K, A)$ je vektorový prostor všech spojitých zobrazení $f : K \rightarrow A$. Uvažujme na $\mathcal{C}(K, A)$ normu a násobení dané vzorci

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\|; t \in K\}, \quad f \in \mathcal{C}(K, A),$$

$$(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t), \quad t \in K, \quad f, g \in \mathcal{C}(K, A).$$

- (1) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ je Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ má jednotku, právě když A má jednotku, a najděte ji.
- (3) Ukažte, že $\mathcal{C}(K, A)$ je komutativní, právě když A je komutativní.

Příklad 10. Necht' X je Banachův prostor. Uvažme prostor $L(X)$ všech spojitých lineárních operátorů na X s operátorovou normou. Definujme na $L(X)$ násobení jako skládání operátorů.

- (1) Ukažte, že $L(X)$ je Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.
- (2) Ukažte, že $L(X)$ je komutativní, právě když $\dim X = 1$.

Návod: (2) Pokud $\dim X \geq 2$, zvolte $x_1, x_2 \in X$ lineárně nezávislé. Ukažte, že existují $x_1^*, x_2^* \in X^*$, pro které $x_1^*(x_1) = x_2^*(x_2) = 1$ a $x_1^*(x_2) = x_2^*(x_1) = 0$. Uvažte operátory tvaru $x \mapsto x_i^*(x)x_j$ a jejich lineární kombinace.

Příklad 11. Necht' X je Banachův prostor a necht' $A = K(X)$ je prostor kompaktních lineárních operátorů na X , uvažovaný jakožto podprostor $L(X)$.

- (1) Ukažte, že A je uzavřená podalgebra $L(X)$, a je to tedy Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A má jednotku, právě když $\dim X < \infty$.
- (3) Ukažte, že A je komutativní, právě když $\dim X = 1$.
- (4) Necht' $\dim X = \infty$. Necht' $B = \text{span}(A \cup \{I\})$ jakožto podalgebra $L(X)$. Ukažte, že B je (algebraicky) izomorfní A^+ , ale ne izometrická.

Návod: (3) Ukažte, že operátory použité v Příkladu 10(2) jsou kompaktní.

Příklad 12. Necht' $(G, +)$ je komutativní grupa. Uvažujme na Banachově prostoru $\ell^1(G)$ násobení $*$ definované vzorcem

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x - y), \quad f, g \in \ell^1(G).$$

Ukažte, že $\ell^1(G)$ pak je komutativní Banachova algebra s jednotkou, a najděte její jednotku.

Příklad 13. Necht' (G, \cdot) je nekomutativní grupa. Uvažujme na Banachově prostoru $\ell^1(G)$ násobení $*$ definované vzorcem

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x), \quad f, g \in \ell^1(G).$$

Ukažte, že $\ell^1(G)$ pak je nekomutativní Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.

Příklad 14. Necht' $A = L^1(\mathbb{R}^n)$, kde $n \in \mathbb{N}$ (normu uvažujme standardní). Definujme na A násobení $*$ jakožto konvoluci, tj.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, f, g \in A.$$

- (1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A nemá jednotku.

*Návod: (1) Použijte vlastnosti konvoluce. (2) Necht' g je jednotka. Pak pro každé $r > 0$ platí $g * \chi_{B(0,r)} = \chi_{B(0,r)}$. Z toho odvod'te, že $\chi_{B(0,r)}(x) = \int_{B(x,r)} g$ pro skoro všechna x , speciálně $\int_{B(x,r)} g = 1$ skoro všude na $B(0,r)$. Pro dost malé r odvod'te spor s tím, že $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Příklad 15. Necht' $A = L^1([0, 1])$ (normu uvažujme standardní). Definujme na A násobení $*$ jakožto konvoluci, tj.

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y)g(x - y \pmod{1}) dy, \quad x \in [0, 1], f, g \in A.$$

- (1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A nemá jednotku.

Návod: (1) Použijte podobný postup jako při důkazu vlastností konvoluce. (2) Postupujte analogicky jako v Příkladu 14(2).

Příklad 16. Necht' $(G, +)$ je komutativní kompaktní topologická grupa. (Tj., $(G, +)$ je komutativní grupa opatřená Hausdorffovou topologií, v níž jsou operace $(x, y) \mapsto x + y$ a $x \mapsto -x$ spojité, která je navíc v této topologii kompaktní.) Necht' $\mathcal{M}(G)$ je prostor všech komplexních Radonových měr na G , norma na něm necht' je totální variace a násobení $*$ je definované vzorcem

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G; x + y \in A\}),$$

kde $\mu \times \nu$ značí příslušnou součinovou míru. Ukažte, že $\mathcal{M}(G)$ pak je komutativní Banachova algebra s jednotkou, a najděte její jednotku.

Příklad 17. Necht' (G, \cdot) je nekomutativní kompaktní topologická grupa. (Tj., (G, \cdot) je nekomutativní grupa opatřená Hausdorffovou topologií, v níž jsou operace $(x, y) \mapsto x \cdot y$ a $x \mapsto x^{-1}$ spojité, která je navíc v této topologii kompaktní.) Necht' $\mathcal{M}(G)$ je prostor všech komplexních Radonových měr na G , norma na něm necht' je totální variace a násobení $*$ je definované vzorcem

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G; x \cdot y \in A\}),$$

kde $\mu \times \nu$ značí příslušnou součinovou míru. Ukažte, že $\mathcal{M}(G)$ pak je nekomutativní Banachova algebra s jednotkou a najděte její jednotku.

Příklad 18. Ukažte, že prvek maticové algebry M_n má pravou inverzi, právě když má levou inverzi.

Příklad 19. Necht' $A = L(\ell^2)$. Definujme dva operátory $S, T \in A$ vzorcem

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \quad \text{a} \quad T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

- (1) Ukažte, že S a T nejsou invertibilní.
- (2) Ukažte, že S má pravou inverzi a popište všechny pravé inverze.
- (3) Ukažte, že T má a levou inverzi a popište všechny levé inverze.

Příklad 20. Necht' $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ kde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ opatřená sčítáním modulo n . Necht' $A = \ell^1(G)$ je Banachova algebra popsaná v Příkladu 12.

- (1) Reprezentujte A jako podalgebru maticové algebry M_n (s příslušnou normou).
- (2) Pro $n = 2$ a $n = 3$ explicitně charakterizujte invertibilní prvky v A .

Návod: (1) Vnořte A do $L(A)$.

Příklad 21. Necht' A je Banachova algebra. Definujme na A nové násobení \odot vzorcem

$$x \odot y = y \cdot x, \quad x, y \in A.$$

- (1) Ukažte, že $A^{op} = (A, \odot)$ je Banachova algebra.
- (2) Ukažte, že A^{op} nemusí být (algebraicky) izomorfní A .
- (3) Necht' X je reflexivní Banachův prostor. Ukažte, že $L(X)^{op}$ je izometricky izomorfní $L(X^*)$.
- (4) Necht' H je Hilbertův prostor. Ukažte, že $L(H)^{op}$ je izometricky izomorfní $L(H)$.

Návod: (2) Použijte Příklad 4.

K ODDÍLU IV.2 – SPEKTRUM A JEHO VLASTNOSTI

Příklad 22. Necht' $A = \mathcal{C}(K)$ pro kompaktní Hausdorffův prostor K a necht' $f \in A$.

- (1) Ukažte, že $\sigma(f) = f(K)$.
- (2) Spočítejte rezolventní funkci f .

Příklad 23. Necht' $A = \mathcal{C}_0(T)$ pro nekompaktní lokálně kompaktní prostor T .

- (1) Ukažte, že $\sigma(f) = f(T) \cup \{0\}$ pro každé $f \in A$.
- (2) Předpokládejme, že T není σ -kompaktní. Ukažte, že $\sigma(f) = f(T)$ pro $f \in A$.
- (3) V případě $T = \mathbb{R}$ najděte příklad $f \in A$ splňující $f(T) \subsetneq \sigma(f)$.

Návod: (1) Použijte definici $\sigma_A(f) = \sigma_{A^+}(f)$ a popis A^+ (například ten z Příkladu 8(3)). (2) $\{t \in T; f(t) \neq 0\}$ je σ -kompaktní.

Příklad 24. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z}_n)$ (viz Příklad 20) a $x \in A$.

- (1) Charakterizujte $\sigma(x)$ jako množinu vlastních čísel jisté matice.
- (2) Pro $n = 2, 3$ spočtěte $\sigma(x)$ a rezolventní funkci explicitně.

Návod: Použijte výsledky Příkladu 20.

Příklad 25. Necht' $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $A = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ a $f(z) = z$ pro $z \in \mathbb{T}$. Necht' B je uzavřená podalgebra A s jednotkou generovaná f , tj.,

$$B = \overline{\text{span}}\{1, f, f^2, f^3, \dots\}.$$

Spočtěte a porovnejte $\sigma_A(f)$ a $\sigma_B(f)$.

Příklad 26. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a necht' $x \in A$ splňuje $x^n = \mathbf{o}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

Příklad 27. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a necht' $x \in A$ splňuje $x^2 = x$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

Návod: Rozlište tři případy: $x = \mathbf{o}$, $x = e$ a $x \notin \{\mathbf{o}, e\}$. Inverzi $\lambda e - x$ najděte ve tvaru $\alpha e + \beta x$ pro vhodná $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Příklad 28. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a necht' $x \in A$ splňuje $x^3 = x$. Určete $\sigma(x)$ a spočtěte rezolventní funkci.

Návod: Je třeba rozlišit několik případů: Příklad $x^2 = x$ je obsažen v Příkladu 27. Příklad $x^2 = -x$ lze vyřešit podobně jako Příklad 27. Další případ je $x^2 = e$. Nakonec, pokud $x^2 \notin \{e, x, -x\}$, ukažte, že e, x, x^2 jsou lineárně nezávislé a najděte inverzi $\lambda e - x$ jako lineární kombinaci e, x, x^2 .

Příklad 29. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ (viz Příklad 12) a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Ukažte, že $\sigma(\mathbf{e}_n) = \mathbb{T}$ (kde \mathbf{e}_n je příslušný kanonický vektor) a že

$$R(\lambda, \mathbf{e}_n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_{kn}}{\lambda^{k+1}}, & |\lambda| > 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda^k \mathbf{e}_{-kn}, & |\lambda| < 1. \end{cases}$$

Návod: Tvzení lze dokázat přímo řešením rovnice $(\lambda \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_n) * f = \mathbf{e}_0$. Také lze využít výpočet rezolventní funkce pomocí Neumannovy řady.

K ODDÍLU IV.3 – HOLOMORFNÍ FUNKČNÍ KALKULUS

Příklad 30. Necht A je Banachova algebra s jednotkou a necht f je celá funkce. Necht

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

je její Taylorův rozvoj. Ukažte, že pro každé $x \in A$ platí

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Návod: Protože f je celá, lze v definici holomorfního kalkulu integrovat podél kružnice o středu v nule a dost velkém poloměru.

Příklad 31. Necht $A = M_n$ a $D \in A$ je diagonální matice s prvky d_1, \dots, d_n na diagonále.

- (1) Ukažte, že $\sigma(D) = \{d_1, \dots, d_n\}$ a spočtete rezolventní funkci.
- (2) Necht f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(D)$. Ukažte, že $\tilde{f}(D)$ je diagonální matice s prvky $f(d_1), \dots, f(d_n)$ na diagonále.
- (3) Z předchozího odvoďte, že v tomto případě $\tilde{f}(D)$ závisí pouze na $f|_{\sigma(D)}$.

Návod: (2) Uvažte cyklus sestávající z dost malých kružnic o středech d_1, \dots, d_n a použijte Cauchyův vzorec pro kruh.

Příklad 32. Necht $A = M_n$ kde $n \geq 2$ a necht $J \in A$ je Jordanova buňka s hodnotou z na diagonále, tj.,

$$J = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}.$$

- (1) Ukažte, že $\sigma(J) = \{z\}$.
- (2) Ukažte, že

$$(\lambda I - J)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-z} & \frac{1}{(\lambda-z)^2} & \dots & \frac{1}{(\lambda-z)^n} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-z} & \dots & \frac{1}{(\lambda-z)^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda-z} \end{pmatrix} \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{z\}.$$

- (3) Necht f je funkce holomorfní na okolí z . Ukažte, že

$$\tilde{f}(J) = \begin{pmatrix} f(z) & f'(z) & \frac{f''(z)}{2} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} \\ 0 & f(z) & f'(z) & \dots & \frac{f^{(n-2)}(z)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(z) \end{pmatrix}$$

- (4) Z předchozího odvoďte, že v tomto případě hodnota $\tilde{f}(J)$ není určena pouze $f|_{\sigma(J)}$.

Návod: (3) Uvažte integrál podél dost malé kružnice o středu z a použijte Cauchyův vzorec pro vyšší derivace.

Příklad 33. Necht' $A = M_n$ a $E \in A$ je libovolná matice. Necht' f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(E)$.

- (1) Vyjádřete $\tilde{f}(E)$ pomocí Jordanova kanonického tvaru E .
- (2) Charakterizujte ty matice E , pro které je $\tilde{f}(E)$ určeno pouze $f|_{\sigma(E)}$.

Příklad 34. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z}_2)$ nebo $A = \ell^1(\mathbb{Z}_3)$. Pro $x \in A$ a f holomorfní na okolí $\sigma(x)$ spočtete $\tilde{f}(x)$.

Příklad 35. Necht' A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$ je prvek splňující jednu z následujících podmínek:

- (1) $x^n = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$;
- (2) $x^2 = x$;
- (3) $x^2 = -x$;
- (4) $x^2 = e$;
- (5) $x^3 = x$, ale žádná z podmínek (2)–(4) neplatí.

Necht' f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(x)$. Spočtete $\tilde{f}(x)$. V kterých případech je tato hodnota určena pouze $f|_{\sigma(x)}$?

Příklad 36. Necht' $A = \mathcal{C}(K)$, necht' $g \in A$ a necht' F je funkce holomorfní na okolí $\sigma(g) = g(K)$. Ukažte, že $\tilde{F}(g) = F \circ g$.

Příklad 37. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ (cf. Příklad 12) a $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Z Příkladu 29 víme, že $\sigma(e_n) = \mathbb{T}$. Necht' g je funkce holomorfní na okolí \mathbb{T} . Ukažte, že

$$\tilde{g}(e_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_{kn},$$

kde $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ jsou koeficienty v Laurentově rozvoji g na okolí \mathbb{T} .

Návod: Bud' lze použít definice a vzorec z Příkladu 29, nebo lze dokázat a použít analogii tvrzení z Příkladu 30 pro Laurentovy řady.

K ODDÍLU IV.4 – IDEÁLY, MULTIPLIKATIVNÍ FUNKCIONÁLY A GELFANDOVA TRANSFORMACE

Příklad 38. Necht' $A = \mathcal{C}(K)$.

- (1) Necht' I je vlastní uzavřený ideál v A . Ukažte, že existuje neprázdná uzavřená množina $F \subset K$ splňující

$$I = \{f \in \mathcal{C}(K); f|_F = 0\}.$$

- (2) Ukažte, že maximální ideály v A jsou právě podprostory tvaru

$$I = \{f \in \mathcal{C}(K); f(x) = 0\},$$

kde $x \in K$.

- (3) Z předchozího odvoďte, že multiplikativní funkcionály na A jsou právě funkcionály tvaru $f \mapsto f(x)$, kde $x \in K$.
- (4) Vysvětlete a dokažte tvrzení, že Gelfandova transformace algebry A je identické zobrazení.

Návod: (1) Položte $F = \{x \in K; \forall f \in I : f(x) = 0\}$. Ukažte, že $F \neq \emptyset$ (jinak z kompaktnosti a z definice ideálu odvoďte, že $1 \in I$). Podobně ukažte, že pro každou uzavřenou množinu H disjunktní s F existuje nezáporná $f \in I$, která je na H kladná. S použitím Tietzeho věty a vlastnosti ideálu dále ukažte, že existuje $g \in I$, která nabývá hodnot z $[0, 1]$ a je rovna 1 na H .

Z toho nakonec odvodíte, že každou funkci nulovou na F lze libovolně přesně aproximovat funkcí z I .

Příklad 39. Necht' $A = M_n$, kde $n \geq 2$. Ukažte, že jediný vlastní oboustranný ideál v A je nulový.

Návod: Předpokládejte, že I je nenulový ideál. Ukažte, že obsahuje alespoň jednu matici, která má právě jeden nenulový prvek, z toho následně odvodíte, že obsahuje všechny takové matice.

Příklad 40. Necht' $A = \ell^1(G)$, kde $(G, +)$ je komutativní grupa (viz Příklad 12). Připomeňme, že pak $A^* = \ell^\infty(G)$. Ukažte, že $\varphi \in \ell^\infty(G)$ patří do $\Delta(A)$, právě když je to grupový homomorfismus do jednotkové kružnice (tj. $\varphi : G \rightarrow \mathbb{T}$ a pro $g_1, g_2 \in G$ platí $\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$).

Návod: Uvažte, že $e_{g_1} * e_{g_2} = e_{g_1+g_2}$. K tomu, že hodnoty jsou v \mathbb{T} použijte omezenost φ a grupové operace.

Příklad 41. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z})$.

- (1) Popište $\Delta(A)$ a vysvětlete, jak rozumět v tomto případě rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{T}$.
- (2) Popište Gelfandovu transformaci A a pomocí ní vyjádřete spektrum obecného prvku A .
- (3) Je Gelfandova transformace prostá? Pokud ano, jak vypadá inverzní zobrazení?
- (4) Jaký je obor hodnot Gelfandovy transformace? Je na?

Návod: (1) Použijte Příklad 40 a uvažte zobrazení $\Delta(A) \ni \varphi \mapsto \varphi(1)$. (3) Použijte znalosti Fourierových řad. (4) Ne každá spojitá funkce má absolutně konvergentní Fourierovu řadu.

Příklad 42. Necht' $A = \ell^1(\mathbb{Z}_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (1) Popište $\Delta(A)$ a ukažte, že má právě n prvků.
- (2) Popište Gelfandovu transformaci A a pomocí ní vyjádřete spektrum obecného prvku A .
- (3) Je Gelfandova transformace prostá? Pokud ano, jak vypadá inverzní zobrazení?
- (4) Jaký je obor hodnot Gelfandovy transformace? Je na?

Návod: (1) Použijte Příklad 40 a uvažte zobrazení $\Delta(A) \ni \varphi \mapsto \varphi(1)$. (3,4) Mimo jiné využijte vlastnosti prostorů konečné dimenze.

Příklad 43. Necht' $A = L^1(\mathbb{R}^n)$ (viz Příklad 14). Připomeňme, že $A^* = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále platí

$$\Delta(A) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}; \varphi \text{ je spojitá a } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{y})\},$$

což je známý netriviální fakt.

- (1) Ukažte, že prvky $\Delta(A)$ jsou právě funkce $\mathbf{x} \mapsto e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$, kde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Vysvětlete, jak rozumět často uváděné rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{R}^n$.
- (3) Popište Gelfandovu transformaci A a vysvětlete její vztah k Fourierově transformaci.

Příklad 44. Uvažme \mathbb{T} jako kompaktní grupu s operací násobení, tj. $\mathbb{T} = \{e^{it}; t \in [0, 2\pi)\} = \{e^{it}; t \in \mathbb{R}\}$. Nechť $A = L^1(\mathbb{T})$ se standardní normou a s násobením definovaným pomocí konvoluce, tj.

$$\|f\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt, \quad (f * g)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is})g(e^{i(t-s)}) ds.$$

- (1) Ukažte, že A je komutativní Banachova algebra bez jednotky.
- (2) S využitím reprezentace $A^* = L^\infty(\mathbb{T})$ a známého netriviálního faktu, že $\Delta(A) = \{\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}; \varphi \text{ je spojitá a } \forall x, y \in \mathbb{T} : \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)\}$, ukažte, že prvky $\Delta(A)$ jsou právě funkce $x \mapsto x^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $e^{it} \mapsto e^{int}$).
- (3) Vysvětlete, jak rozumět často uváděné rovnosti $\Delta(A) = \mathbb{Z}$.
- (4) Popište Gelfandovu transformaci A a vysvětlete její vztah k Fourierovým řadám.

Návod: (1) Ukažte, že jde o jiný popis algebry z Příkladu 15.

Příklad 45. Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou, která má konečnou dimenzi. Ukažte, že pro každé $x \in A$ je $\sigma(x)$ konečná množina, která má nejvýše $\dim A$ prvků.

Návod: Nechť $x \in A$. Z předpokladů plyne, že existuje $k \leq n$, že prvek x^k je lineární kombinací prvků $1, x, \dots, x^{k-1}$. Pro $\varphi \in \Delta(A)$ tedy musí být $\varphi(x)$ kořenem jistého polynomu stupně k . Navíc $\sigma(x) = \{\varphi(x); \varphi \in \Delta(A)\}$ (viz Věta IV.24(e)).

K ODDÍLŮM IV.5 A IV.6 – C^* -ALGEBRY A SPOJITÝ FUNKČNÍ KALKULUS

Příklad 46. Ukažte, že na Banachově algebře $\ell^1(\mathbb{Z})$ (viz Příklad 12) neexistuje involuce, se kterou by to byla C^* -algebra.

Návod: Uvažte Gelfandovu transformaci (viz Příklad 41) a ukažte, že její obor hodnot je vlastní hustý podprostor $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Následně použijte Větu IV.33.

Příklad 47. Ukažte, že na Banachově algebře $L^1(\mathbb{R})$ (viz Příklad 14) neexistuje involuce, se kterou by to byla C^* -algebra.

Návod: Uvažte Gelfandovu transformaci a její vztah k Fourierově transformaci (viz Příklad 43), použijte známý fakt, že Fourierova transformace není na $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ a Větu IV.33.

Příklad 48. Nechť $A = \mathcal{C}(K)$, nechť $g \in A$ a nechť F je funkce spojitá na $\sigma(g) = g(K)$. Ukažte, že $\tilde{F}(g) = F \circ g$.

- Příklad 49.**
- (1) Nechť A je komutativní C^* -algebra a $x \in A$. Ukažte, že x je samoadjungovaný, právě když $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
 - (2) Platí tato ekvivalence i pro nekomutativní C^* -algebry?

Návod: (1) Pro implikaci \Rightarrow použijte Tvzení IV.32. Pro opačnou implikaci si uvědomte, že tvrzení platí v $\mathcal{C}_0(T)$ a použijte Větu IV.33. (2) Protipříklad na implikaci \Leftarrow najděte v maticové algebře M_2 .

Příklad 50. Nechť A je C^* -algebra. Řekneme, že prvek $x \in A$ je **nezáporný**, pokud je samoadjungovaný a $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Ukažte, že každý samoadjungovaný prvek lze vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných prvků.

Návod: Použijte spojitý funkční kalkulus pro funkce $t \mapsto t^+$ a $t \mapsto t^-$.

Příklad 51. Necht' A je C^* -algebra s jednotkou, $x \in A$ normální prvek a $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

- (1) Ukažte, že $\tilde{f}(x)$ je normální prvek.
- (2) Ukažte, že $\tilde{f}(x)$ je samoadjungovaný prvek, právě když funkce f nabývá pouze reálných hodnot.
- (3) Ukažte, že $\tilde{f}(x)$ je nezáporný prvek, právě když funkce f nabývá pouze nezáporných hodnot.
- (4) Ukažte, že $\tilde{f}(x)$ je invertibilní prvek, právě když funkce f nenabývá hodnoty 0.

Příklad 52. Necht' A je C^* -algebra a $x, y \in A$ jsou dva nezáporné prvky, které komutují (tj. $xy = yx$). Ukažte, že xy je také nezáporný prvek.

Návod: Necht' B je uzavřená podalgebra A generovaná x a y . Pak B je komutativní C^* -algebra. Použijte Větu IV.33 a skutečnost, že tvrzení platí v $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

Příklad 53. Necht' A je C^* -algebra s jednotkou e a $x \in A$ je normální prvek. Označme B uzavřenou podalgebru A generovanou prvky x, x^*, e a B_0 uzavřenou podalgebru A generovanou prvky x, x^* .

- (1) Ukažte, že $B = B_0$, právě když x je invertibilní v A .
- (2) Necht' $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Ukažte, že $\tilde{f}(x) \in B$.
- (3) Necht' $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Ukažte, že $\tilde{f}(x) \in B_0$, právě když buď x je invertibilní nebo $f(0) = 0$.

Návod: (1) Implikace \Leftarrow je zřejmá. Pokud x není invertibilní, odvoďte z Věty IV.39, že B_0 neobsahuje e . (2) Použijte Větu IV.38. (3) Implikace \Leftarrow plyne z (1) a z Věty IV.39. Předpokládejme, že x není invertibilní (tj. $0 \in \sigma(x)$) a $f(0) \neq 0$. Protože funkční kalkulus je izomorfismus $\mathcal{C}(\sigma(x))$ na B a zároveň izomorfismus $\mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$ na B_0 , stačí si uvědomit, že $f \notin \mathcal{C}_0(\sigma(x) \setminus \{0\})$.

Příklad 54. Mějme stejnou situaci jako v Příkladu 53 a navíc necht' $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Označme D uzavřenou podalgebru A generovanou prvky $\tilde{f}(x), \tilde{f}(x)^*, e$ a D_0 uzavřenou podalgebru A generovanou prvky $\tilde{f}(x), \tilde{f}(x)^*$.

- (1) Ukažte, že $D \subset B$ a $D_0 \subset B_0$.
- (2) Ukažte, že $D = D_0$, právě když f nenabývá nuly.
- (3) Uvažme diagram

$$\begin{array}{ccc} \Delta(B) & \xrightarrow{h_x} & \sigma(x) \\ r \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta(D) & \xrightarrow{h_{\tilde{f}(x)}} & \sigma(\tilde{f}(x)) \end{array} ,$$

kde $r(\varphi) = \varphi|_D$ pro $\varphi \in \Delta(B)$ a h_x a $h_{\tilde{f}(x)}$ jsou zobrazení z konstrukce spojitého kalkulu ve Větě IV.38, tj. $h_x(\varphi) = \varphi(x)$ a $h_{\tilde{f}(x)}(\psi) = \psi(\tilde{f}(x))$. Ukažte, že tento diagram komutuje, tj. $f \circ h_x = h_{\tilde{f}(x)} \circ r$.

- (4) Z předchozího bodu odvoďte, že pro každou $g \in \mathcal{C}(\sigma(\tilde{f}(x)))$ platí $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \widetilde{g \circ f(x)}$.

Návod: (2) Použijte Příklad 53(1). (3) Je třeba dokázat $\varphi(\tilde{f}(x)) = f(\varphi(x))$. K tomu použijte definici spojitého funkčního kalkulu a definici Gelfandovy transformace. (4) Použijte bod (3) a definici spojitého funkčního kalkulu.

Příklad 55. Necht' A je C^* -algebra a $x \in A$ je nezáporný prvek.

- (1) Ukažte, že existuje nezáporný prvek $y \in A$ splňující $y^2 = x$.
- (2) Je takové y jednoznačně určeno?

Návod: (1) Použijte spojitý kalkulus pro funkci $t \mapsto \sqrt{t}$ na prvek x . (2) Necht' z je nezáporný prvek splňující $z^2 = x$ a y je prvek získaný postupem z bodu (1). Pomocí Příkladu 54(4) aplikovaného na $f(t) = t^2$ a $g(t) = \sqrt{t}$ ukažte, že $z = y$.