VII.5 Temperované distribuce

Úmluva: Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ značíme symbolem $\|\boldsymbol{x}\|$ eukleidovskou normu vektoru $\boldsymbol{x}$.

Definice.

- **Schwartzovým prostorem na** $\mathbb{R}^d$ rozumíme prostor funkcí

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \begin{array}{c} \text{funkce } \boldsymbol{x} \mapsto (1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \\ \text{je omezená na } \mathbb{R}^d \\ \text{pro každé } N \in \mathbb{N}_0 \text{ a každý multiindex } \alpha \end{array} \right\}.$$

  Nehrozí-li nedorozumění (tj., je-li d předem dáno), místo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ píšeme jen $\mathscr{S}$.
- Pro $f \in \mathscr{S}$ a $N \in \mathbb{N}_0$ položme

$$\begin{aligned} p_N(f) &= \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N} \left\| (1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \right\|_\infty \\ &= \sup\{ \left| (1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \right|; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N \}. \end{aligned}$$

  Pak p_N je norma na $\mathscr{S}$.

Tvrzení 17. *Nechť $d \in \mathbb{N}$.*

(a) *Schwartzův prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ opatřený posloupností norem (p_N) je Fréchetův prostor.*
(b) *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý podprostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*
(c) *Pokud (φ_j) je posloupnost v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ konvergující v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ k funkci φ, pak také $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Definice. Temperovanou distribucí na $\mathbb{R}^d$ rozumíme spojitý lineární funkcionál na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, tj. spojité lineární zobrazení $\Lambda : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{F}$. Prostor temperovaných distribucí značíme $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nebo jen $\mathscr{S}'$.

Poznámka:

- Je-li Λ temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, pak její zúžení na $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ je (díky Tvrzení 17(c)) distribuce na $\mathbb{R}^d$.
- Prostor $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ lze tedy díky předchozímu bodu a Tvrzení 17(b) interpretovat jako lineární podprostor $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
- Při interpretaci z předchozího bodu je daná distribuce $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ temperovaná, právě když existuje její spojité rozšíření na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Tvrzení 18 (charakterizace temperovaných distribucí).

(a) *Nechť $\Lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{F}$ je lineární zobrazení. Pak Λ je temperovaná distribuce, právě když existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, pro která platí*

$$|\Lambda(\varphi)| \le C p_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

(b) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Pak Λ je temperovaná (ve smyslu předchozí poznámky), právě když existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$, pro která platí*

$$|\Lambda(\varphi)| \le C p_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Definice. Nechť $(\Lambda_n) \subset \mathscr{S}'$ je posloupnost temperovaných distribucí na $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že posloupnost (Λ_n) **konverguje v** $\mathscr{S}'$ k temperované distribuci Λ, pokud konverguje ve slabé*-topologii, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathscr{S}$.

Věta 19 (Banach-Steinhausova věta pro temperované distribuce). *Nechť (Λ_n) je posloupnost temperovaných distribucí. Pokud pro každé $\varphi \in \mathscr{S}$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$, pak limitní zobrazení $\Lambda(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{S}$, je temperovaná distribuce.*

Tvrzení 20 (příklady temperovaných distribucí).

(a) *Každá distribuce s kompaktním nosičem je temperovaná.*

(b) *Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $p \in [1,\infty]$, pak Λ_f je temperovaná distribuce a je dána vzorcem*
$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

(c) *Je-li f měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$, pro kterou existuje polynom P na $\mathbb{R}^d$ splňující $|f| \le |P|$ na $\mathbb{R}^d$, pak Λ_f je temperovaná distribuce a je dána vzorcem z bodu (b).*

(d) *Je-li μ znaménková či komplexní míra na $\mathbb{R}^d$, pak Λ_μ je temperovaná distribuce a je dána vzorcem*
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Poznámka: Protože temperované distribuce jsou speciálním případem distribucí na $\mathbb{R}^d$, operace s distribucemi definované v oddílech VII.2-VII.4 (derivace, násobení funkcí třídy C^∞, posun, otočení, konvoluce s funkcí z $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$) jsou použitelné i na temperované distribuce, přičemž výsledkem je distribuce. V některých případech je výsledkem dokonce temperovaná distribuce.

Lemma 21 (spojitost operací na Schwartzově prostoru). *Následující zobrazení jsou spojitá lineární zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$:*

- *$f \mapsto P \cdot f$, je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$,*
- *$f \mapsto g \cdot f$, je-li $g \in \mathscr{S}$,*
- *$f \mapsto D^\alpha f$, je-li α multiindex.*

Tvrzení 22 (operace s temperovanými distribucemi). *Nechť $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Nechť α je libovolný multiindex. Pak $D^\alpha\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc,*
$$D^\alpha\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(b) *Nechť $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nebo f je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $f\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc, $D^\alpha\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc,*
$$f\Lambda(\varphi) = \Lambda(f\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(c) *Nechť $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\tau_{\boldsymbol{y}}\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ a*
$$\tau_{\boldsymbol{y}}\Lambda(f) = \Lambda(\tau_{-\boldsymbol{y}}f), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(d) *$\check{\Lambda} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Navíc $\check{\Lambda}(f) = \Lambda(\check{f})$ pro $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Tvrzení 23. *Nechť (Λ_n) je posloupnost v $\mathscr{S}'$ konvergující v $\mathscr{S}'$ k $\Lambda \in \mathscr{S}'$.*

(a) *$D^\alpha\Lambda_n \to D^\alpha\Lambda$ v $\mathscr{S}'$ pro každý multiindex α.*

(b) *$f\Lambda_n \to f\Lambda$, je-li $f \in \mathscr{S}$ nebo f je polynom na $\mathbb{R}^d$.*