VII.6 Konvoluce a Fourierova transformace temperovaných distribucí

Značení a úmluva: Připomeňme, že λ^d značí Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^d$. Označme $m_d = (2\pi)^{-d/2}\lambda^d$. V tomto oddílu budeme prostorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ rozumět prostor $L^p(m_d)$. Taktéž konvoluci budeme uvažovat vůči této míře, tj.

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Navíc, všechny prostory uvažujeme komplexní.

Připomenutí:

- Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je Fourierova transformace funkce f definována vzorcem

$$\widehat{f}(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d.$$

- Fourierova transformace zobrazuje $L^1(\mathbb{R}^d)$ do $C_0(\mathbb{R}^d)$.
- Fourierova transformace zobrazuje $\mathscr{S}$ na $\mathscr{S}$ a pro $f \in \mathscr{S}$ platí $\widehat{\widehat{f}} = \check{f}$.

Lemma 24. *Fourierova transformace je izomorfismus $\mathscr{S}$ na $\mathscr{S}$.*

Definice. Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$. Její **Fourierovou transformací** rozumíme zobrazení

$$\widehat{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Připomenutí:

- Je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$, označme symbolem $\check{P}$ polynom na $\mathbb{R}^d$ definovaný vzorcem $\check{P}(\boldsymbol{t}) = P(i\boldsymbol{t})$ pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$. Je-li P tvaru

$$P(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N} c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d,$$

  kde $N \in \mathbb{N}_0$ a c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N$ jsou nějaká komplexní čísla, pak

$$\check{P}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N} i^{|\alpha|} c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d.$$

- Je-li P polynom na $\mathbb{R}^d$ výše uvedeného tvaru a f je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^d$ (nebo obecněji na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^d$), pak symbolem $P(D)f$ značíme funkci definovanou vzorcem

$$P(D)f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \le N} c_\alpha D^\alpha f.$$

  (Tato definice má smysl i pro funkce třídy $\mathcal{C}^N$.)

Věta 25 (vlastnosti Fourierovy transformace na $\mathscr{S}'$).

(a) *Fourierova transformace je lineární bijekce $\mathscr{S}'$ na $\mathscr{S}'$, pro $\Lambda \in \mathscr{S}'$ platí*

$$\widehat{\widehat{\Lambda}} = \check{\Lambda}, \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\Lambda}}}} = \Lambda.$$

(b) *Nechť (Λ_n) je posloupnost v $\mathscr{S}'$ a $\Lambda \in \mathscr{S}'$. Pak $\Lambda_n \to \Lambda$ v $\mathscr{S}'$, právě když $\widehat{\Lambda_n} \to \widehat{\Lambda}$ v $\mathscr{S}'$.*

(c) *Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{\widehat{f}}$.*

(d) *Pro $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{\Lambda_f} = \Lambda_{\mathcal{P}(f)}$, kde $\mathcal{P}$ je zobrazení z Plancherelovy věty.*

(e) *Je-li $\Lambda \in \mathscr{S}'$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$, pak*

$$\widehat{P(D)\Lambda} = \check{P} \cdot \widehat{\Lambda}, \quad \widehat{P \cdot \Lambda} = \check{P}(D)\widehat{\Lambda}$$

Lemma 26. *Nechť $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) *Je-li $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^d$, pak $\tau_{\boldsymbol{x}_n}\varphi \to \tau_{\boldsymbol{x}}\varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Nechť $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\partial_{\boldsymbol{e}}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Navíc, pokud pro $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definujeme funkci φ_r předpisem*

$$\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - r\boldsymbol{e})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

tj. $\varphi_r = \frac{1}{r}(\varphi - \tau_{r\boldsymbol{e}}\varphi)$, pak $\varphi_r \to \partial_{\boldsymbol{e}}\varphi$ v $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pro $r \to 0$.

Tvrzení 27. *Nechť $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ a $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$.*

(a) *Nechť $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_1})$. Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$ definujme $\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$. Pak $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d_2})$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_2}$ platí $D^\alpha\psi(\boldsymbol{y}) = \Lambda(\boldsymbol{x} \mapsto D^{(\boldsymbol{o},\alpha)}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$.*

(b) (Fubiniova věta pro temperované distribuce) *Nechť $\Lambda_1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_1})$ a $\Lambda_2 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d_2})$. Pak*

$$\Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))) = \Lambda_1(\boldsymbol{x} \mapsto \Lambda_2(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))).$$

Definice. Nechť U je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. **Konvolucí funkce φ a distribuce U** rozumíme funkci $U * \varphi$ definovanou vzorcem

$$U * \varphi(\boldsymbol{x}) = U(\tau_{\boldsymbol{x}}\check{\varphi}) = U(\boldsymbol{y} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka. Je-li $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pak tato definice splývá s definicí konvoluce distribuce a testovací funkce z oddílu VII.4.

Věta 28 (o konvoluci temeperované distribuce a funkce ze Schwartzova prostoru). *Nechť $U \in \mathscr{S}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Pak platí:*

(a) *$U * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α platí $D^\alpha(U * \varphi) = (D^\alpha U) * \varphi = U * D^\alpha\varphi$.*

(b) *$\Lambda_{U*\varphi}$ je temperovaná distribuce.*

(c) *Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $p \in [1, \infty]$, pak $\Lambda_f * \varphi = f * \varphi$.*

(d) *$\widehat{\Lambda_{U*\varphi}} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{U}$, $\widehat{\varphi \cdot U} = \Lambda_{\widehat{\varphi} * \widehat{U}}$.*

(e) *$U * (\varphi * \psi) = (U * \varphi) * \psi$.*