

### VIII.3 Lebesgue-Bochnerovy prostory

**Definice.** Necht  $f : \Omega \rightarrow X$  je silně  $\mu$ -měřitelná.

- Necht  $p \in [1, \infty)$ . Řekneme, že funkce  $f$  patří do  $L^p(\mu; X)$  (podrobněji do  $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ ), pokud funkce  $\omega \mapsto \|f(\omega)\|^p$  je integrovatelná. Pro takovou funkci položíme

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} \|f(\omega)\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

- Řekneme, že  $f$  patří do  $L^\infty(\mu; X)$  (podrobněji do  $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ ), pokud funkce  $\omega \mapsto \|f(\omega)\|$  je esenciálně omezená. Pro takovou funkci položíme

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|.$$

**Poznámky:**

- (1) Je-li  $p \in [1, \infty)$ , pak jednoduché integrovatelné funkce patří do  $L^p(\mu; X)$ . Pokud  $f = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$ , kde  $E_1, \dots, E_k \in \Sigma$  jsou po dvou disjunktní a  $x_1, \dots, x_k \in X$ , pak

$$\|f\|_p = \left( \sum_{j=1}^k \|x_j\|^p \mu(E_j) \right)^{1/p}.$$

- (2) Jednoduché měřitelné funkce patří do  $L^\infty(\mu; X)$ . Je-li  $f$  tvaru jako v předchozím bodě, pak

$$\|f\|_\infty = \max\{\|x_j\|; j \in \{1, \dots, k\} \text{ \& } \mu(E_j) > 0\}.$$

- (3) Je-li  $p \in [1, \infty]$ ,  $h \in L^p(\mu)$  a  $x \in X$ , pak funkce  $f : \Omega \rightarrow X$  definovaná vzorcem  $f(\omega) = h(\omega) \cdot x$  patří do  $L^p(\mu; X)$  a platí  $\|f\|_p = \|h\|_p \cdot \|x\|$ . Značíme  $f = h \cdot x$ .

**Věta 14.**

- (a) Necht  $p \in [1, \infty]$ . Po ztotožnění funkcí, které se rovnají skoro všude, je prostor  $(L^p(\mu; X), \|\cdot\|_p)$  Banachův prostor.  
 (b) Prostor  $L^1(\mu; X)$  je tvořen právě bochnerovsky integrovatelnými funkcemi (přesněji příslušnými třídami ekvivalence).  
 (c) Je-li  $X$  Hilbertův prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , je i  $L^2(\mu; X)$  Hilbertův prostor se skalárním součinem definovaným vzorcem

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \langle f(\omega), g(\omega) \rangle d\mu(\omega), \quad f, g \in L^2(\mu; X).$$

- (d) Je-li míra  $\mu$  konečná, pak pro každé  $1 \leq p < q \leq \infty$  platí

$$L^\infty(\mu; X) \subset L^q(\mu; X) \subset L^p(\mu; X) \subset L^1(\mu; X).$$

**Věta 15.** Necht  $p \in [1, \infty)$ .

- (a) Jednoduché integrovatelné funkce tvoří hustý podprostor  $L^p(\mu; X)$ .  
 (b) Pokud jsou prostory  $L^p(\mu)$  a  $X$  separabilní, pak i prostor  $L^p(\mu; X)$  je separabilní.

### Příklady 16.

- (1) Necht'  $G \subset \mathbb{R}^n$  je lebesgueovsky měřitelná množina kladné míry a  $p \in [1, \infty]$ . Pak symbolem  $L^p(G; X)$  značíme prostor  $L^p(\mu; X)$ , kde  $\mu$  je zúžení Lebesgueovy  $n$ -rozměrné míry na  $G$ . Je-li  $p \in [1, \infty)$  a  $X$  je separabilní, pak  $L^p(G; X)$  je separabilní.
- (2) Necht'  $\mu$  je sčítací míra na  $\mathbb{N}$  a  $p \in [1, \infty]$ . Pak prostor  $L^p(\mu; X)$  se značí  $\ell^p(X)$  a lze ho vyjádřit jako

$$\ell^p(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\} \text{ pro } p \in [1, \infty),$$

$$\ell^\infty(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}; \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\}.$$

Příslušná norma je pak definovaná vzorcem

$$\|(x_n)\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p}, \quad (x_n) \in \ell^p(X), p \in [1, \infty),$$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|, \quad (x_n) \in \ell^\infty(X).$$

Je-li  $X$  separabilní a  $p \in [1, \infty)$ , je i  $\ell^p(X)$  separabilní.

**Poznámky o reprezentaci duálních prostorů:** Necht'  $p \in [1, \infty)$  a  $p^* \in (1, \infty]$  je duální exponent. Pak platí:

- (1) Duál k prostoru  $\ell^p(X)$  je kanonicky izometrický prostoru  $\ell^{p^*}(X^*)$ . Přesněji, pokud posloupnost  $(\varphi_n)$  patří do  $\ell^{p^*}(X^*)$ , pak předpis

$$(x_n) \mapsto \sum_n \varphi_n(x_n), \quad (x_n) \in \ell^p(X)$$

definuje spojitý lineární funkcionál, jehož norma je rovna  $\|(\varphi_n)\|_{\ell^{p^*}(X^*)}$ . Navíc každý spojitý lineární funkcionál je takového tvaru.

- (2) Je-li  $X$  reflexivní a  $\mu$   $\sigma$ -konečná, pak duál k prostoru  $L^p(\mu; X)$  je kanonicky izometrický prostoru  $L^{p^*}(\mu; X^*)$ . Přesněji, pokud  $g \in L^{p^*}(\mu; X^*)$ , pak předpis

$$f \mapsto \int g(\omega)(f(\omega)) d\mu, \quad f \in L^p(\mu; X)$$

definuje spojitý lineární funkcionál, jehož norma je rovna  $\|g\|_{L^{p^*}(\mu; X^*)}$ . Navíc každý spojitý lineární funkcionál je takového tvaru.

- (3) Důkaz bodu (1) není těžký, je analogický důkazu reprezentace duálu k  $\ell^p$ . Důkaz bodu (2) je obtížnější, mj. je v něm potřeba využít netriviální speciální vlastnosti  $X$ . Bod (2) platí i pro obecnější  $X$ , ale ne pro každé  $X$ . Přesná podmínka pro platnost bodu (2) pro libovolnou  $\sigma$ -konečnou míru je následující:

$$\forall Y \subset\subset X \text{ separabilní: } Y^* \text{ je separabilní.}$$

Tato podmínka je ekvivalentní tomu, že  $X^*$  má **Radon-Nikodýmovu vlastnost**, tj. platnosti následující verze Radon-Nikodýmovy věty:

$$\forall m : \Sigma \rightarrow X^* \text{ } \sigma\text{-aditivní, } m \ll \mu \Rightarrow \exists f \in L^1(\mu, X^*) \forall A \in \Sigma: m(A) = (B) \int_A f d\mu.$$

- (4) Pokud  $X$  je reflexivní a  $p \in (1, \infty)$ , je i  $L^p(\mu; X)$  reflexivní.