V.4 Metrizovatelnost lokálně konvexních prostorů

Tvrzení 21. (1) *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je metrizovatelný LCS. Pak je topologie $\mathcal{T}$ generovaná posloupností pseudonorem (p_n) splňující*

$$p_1 \le p_2 \le p_3 \le \dots$$

(2) *Nechť X je vektorový prostor a (p_n) je posloupnost pseudonorem na X, která splňuje podmínky:*

- $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \dots;$
- $\forall x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}\, \exists n\colon p_n(x) > 0.$

Pak

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \quad x,y \in X$$

je translačně invariantní metrika na X, která generuje lokálně konvexní topologii na X generovanou posloupností pseudonorem (p_n). Navíc pro každou posloupnost (x_k) v X platí

(a) $\rho(x_k,x) \to 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon p_n(x_k - x) \xrightarrow{k} 0;$

(b) *Posloupnost (x_k) je cauchyovská v metrice ρ, právě když je cauchyovská v každé z pseudonorem p_n.*

Věta 22 (o metrizovalnosti LCS). *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je HLCS. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *X je metrizovatelný (tj., topologie $\mathcal{T}$ je generovaná nějakou metrikou na X).*

(ii) *Existuje translačně invariantní metrika na X, která generuje topologii $\mathcal{T}$.*

(iii) *Existuje spočetná báze okolí $\boldsymbol{o}$* v *$(X,\mathcal{T})$.*

(iv) *Topologie $\mathcal{T}$ je generovaná spočetným systémem pseudonorem.*

Věta 23 (charakterizace normovatelných LCS). *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je HLCS. Pak X je normovatelný (tj. $\mathcal{T}$ je generovaná nějakou normou), právě když v X existuje omezené okolí $\boldsymbol{o}$.*

Poznámka: Z tohoto oddílu o obecných TVS platí:

- Ekvivalence podmínek (i)–(iii) z Věty 22. Důkaz je ovšem výrazně složitější.
- Varianta Věty 23, v níž se podmínka existence omezeného okolí $\boldsymbol{o}$ nahradí podmínkou existence omezeného konvexního okolí $\boldsymbol{o}$.