

V.5 Fréchetovy prostory

Definice. Necht' (X, \mathcal{T}) je LCS. Prostor X se nazývá **Fréchetův prostor**, pokud \mathcal{T} je generována nějakou úplnou translačně invariantní metrikou.

Příklady 24.

- (1) Každý Banachův prostor je i Fréchetův prostor.
- (2) Prostory $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, $C(\mathbb{R}, \mathbb{F})$, $H(\Omega)$ zmíněné v Příkladech 1 jsou Fréchetovy prostory.

Tvrzení 25. Necht' (X, \mathcal{T}) je Fréchetův prostor. Pak každá translačně invariantní metrika, která generuje topologii \mathcal{T} , je úplná.

Tvrzení 26. Necht' X je Fréchetův prostor. Pak množina $A \subset X$ je kompaktní, právě když je totálně omezená a uzavřená.

Tvrzení 27. Necht' X je LCS a $A \subset X$ je totálně omezená. Pak aco A je též totálně omezená.

Důsledek 28. Necht' X je Fréchetův prostor a $A \subset X$ kompaktní podmnožina. Pak \overline{A} je rovněž kompaktní.

Věta 29 (Banach-Steinhausova věta). Necht' X je Fréchetův prostor a Y je LCS. Necht' (T_n) je posloupnost spojitých lineárních zobrazení $T_n : X \rightarrow Y$. Necht' pro každé $x \in X$ existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ v Y . Pak zobrazení $T : X \rightarrow Y$ definované předpisem $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ pro $x \in X$ je spojitě.

Věta 30 (o otevřeném zobrazení). Necht' X a Y jsou Fréchetovy prostory a $T : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení X na Y . Pak T je otevřené zobrazení. Speciálně, je-li T navíc prosté, je T^{-1} spojitě, tj. T je izomorfismus X na Y .

Poznámky: Pro obecné TVS je situace následující:

- TVS, jehož topologie je generována translačně invariantní úplnou metrikou, se nazývá **F -prostor**. Příkladem F -prostoru, který není lokálně konvexní, jsou prostory $L^p(\mu)$ pro $p \in (0, 1)$ zmíněné v Příkladu 1(5).
- Tvrzení 25 a 26 platí pro F -prostory beze změny.
- Tvrzení 27 a Důsledek 28 pro prostory, které nejsou lokálně konvexní, neplatí.
- Věta 29 platí i v případě, že X je F -prostor a Y je TVS. Důkaz je podobný, používá však složitější pojem stejné spojitosti.
- Věta 30 platí i pro F -prostory.