VI.2 Slabé topologie na lokálně konvexních prostorech

Poznámka: V tomto oddílu je podstatné, že se zabýváme lokálně konvexními prostory. Pro obecné TVS neplatí žádné z uvedených tvrzení.

Věta 6 (Mazurova věta). *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je konvexní množina. Pak platí:*

(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.
(b) *A je uzavřená, právě když je slabě uzavřená.*

Důsledek 7. *Nechť X je metrizovatelný LCS a (x_n) posloupnost v X, která slabě konverguje k bodu $x \in X$. Pak existuje posloupnost (y_n) v X, která splňuje*

- $y_n \in \operatorname{co}\{x_k; k \geq n\}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$;
- $y_n \to x$ *v (původní topologii prostoru)* X.

Poznámka. Je-li X LCS, (x_n) posloupnost v X a $x \in X$, pak platí

$$x_n \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} x \iff \forall f \in X^*\colon f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

Speciálně, je-li X normovaný lineární prostor, pak

$$x_n \xrightarrow{\sigma(X,X^*)} x \iff x_n \xrightarrow{w} x,$$

kde používáme značení z oddílu II.4. Tedy **slabá konvergence** znamená *konvergence ve slabé topologii.*

Věta 8 (omezenost a slabá omezenost). *Nechť X je LCS a $A \subset X$. Pak A je omezená v X, právě když je omezená v $\sigma(X, X^*)$.*

Poznámka. Z Lemmatu V.15 plyne, že A je omezená v $\sigma(X, X^*)$, právě když každý funkcionál $f \in X^*$ je omezený na množině A.

Tvrzení 9 (slabá topologie na podprostoru). *Nechť X je LCS a $Y \subset\subset X$. Pak na Y splývá slabá topologie $\sigma(Y, Y^*)$ s restrikcí slabé topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y.*

Poznámka: Z poznámky za Důsledkem 7 plyne:

- Věta 6 a Důsledek 7 jsou zobecněním Tvrzení II.26.
- Věta 8 je zobecněním Důsledku II.29.
- Tvrzení 9 je zobecněním Tvrzení II.24.