Apendix: Základy obecné topologie

A.1 Topologické prostory a základní topologické pojmy

Definice. **Topologickým prostorem** rozumíme dvojici $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je nějaký systém podmnožin množiny X, který má následující vlastnosti:

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
(b) Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ libovolná podmnožina, pak $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.
(c) Pro každé dvě množiny $U, V \in \mathcal{T}$ platí $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Systém $\mathcal{T}$ s těmito vlastnostmi nazýváme **topologií** na X. Místo $(X, \mathcal{T})$ často píšeme jen X (víme-li, jakou topologii uvažujeme).

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor.

- Množina $A \subset X$ se nazývá **otevřená v** $(X, \mathcal{T})$ (nebo též $\mathcal{T}$-**otevřená**, případně krátce **otevřená**), pokud $A \in \mathcal{T}$.
- Nechť $A \subset X$ a $x \in A$. Bod x se nazývá **vnitřním bodem** množiny A, pokud existuje otevřená množina B, pro kterou platí $x \in B \subset A$.
- **Vnitřkem** množiny $A \subset X$ nazýváme množinu všech jejích vnitřních bodů. Vnitřek A značíme $\operatorname{Int} A$, případně podrobněji $\operatorname{Int}_{\mathcal{T}} A$.
- Množina $A \subset X$ se nazývá **okolím bodu** $x \in X$, pokud je x vnitřním bodem množiny A.
- Nechť $A \subset X$ a $x \in X$. Bod x se nazývá **hraničním bodem** množiny A, pokud pro každé okolí U bodu x platí $U \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- **Hranicí** množiny $A \subset X$ nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů. Hranici A značíme ∂A, případně podrobněji $\partial_{\mathcal{T}} A$. (Někdy se hranice značí $H(A)$ nebo též $\operatorname{bd} A$.)
- Množina $A \subset X$ se nazývá **uzavřená**, pokud obsahuje všechny své hraniční body, tj. pokud $\partial A \subset A$.
- **Uzávěrem** množiny $A \subset X$ rozumíme množinu $A \cup \partial A$. Uzávěr množiny A značíme $\overline{A}$, případně $\overline{A}^{\mathcal{T}}$. (Někdy se uzávěr množiny A značí také $\operatorname{cl} A$, případně $\operatorname{cl}_{\mathcal{T}} A$ nebo $\mathcal{T} - \operatorname{cl} A$.)

Tvrzení 1. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $A \subset X$.*

(i) *Vnitřek množiny A je největší otevřená množina obsažená v A.*
(ii) *Množina A je uzavřená, právě když $X \setminus A$ je otevřená.*
(iii) *Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující A.*
(iv) *Nechť $x \in X$. Pak $x \in \overline{A}$, právě když pro každé okolí U bodu x platí $U \cap A \neq \emptyset$.*

Tvrzení 2 (vlastnosti uzavřených množin). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor.*

(a) *$\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny.*
(b) *Je-li $\mathcal{A}$ libovolný systém uzavřených podmnožin X, pak je i $\bigcap \mathcal{A}$ uzavřená množina.*
(c) *Pro každé dvě množiny uzavřené množiny $C, D \subset X$ je $C \cup D$ uzavřená množina.*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

- $\mathcal{B}$ se nazývá **bází topologie** $\mathcal{T}$, pokud pro každou $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existuje $G \in \mathcal{B}$ splňující $x \in G \subset U$.
- $\mathcal{B}$ se nazývá **subbází topologie** $\mathcal{T}$, pokud pro každou $U \in \mathcal{T}$ a každé $x \in U$ existují $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{B}$ splňující $x \in G_1 \cap \dots \cap G_k \subset U$.

Poznámka. *Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.*

- *$\mathcal{B}$ je bází $\mathcal{T}$, právě když pro každé $U \in \mathcal{T}$ existuje $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ splňující $\bigcup \mathcal{A} = U$.*
- *$\mathcal{B}$ je subbází $\mathcal{T}$, právě když systém všech množin, které lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha prvků $\mathcal{B}$, tvoří bázi $\mathcal{T}$.*

Tvrzení 3. *Nechť X je množina a $\mathcal{B}$ nějaký systém podmnožin X.*

(i) *Systém $\mathcal{B}$ je bází nějaké topologie na X, právě když jsou splněny následující dvě podmínky:*
  - *$\bigcup \mathcal{B} = X$;*
  - *Pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a každé $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$ splňující $x \in W \subset U \cap V$.*

(ii) *Systém $\mathcal{B}$ je subbází nějaké topologie na X, právě když $\bigcup \mathcal{B} = X$.*

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor, $a \in X$ a $\mathcal{U}$ nějaký systém podmnožin X. Systém $\mathcal{U}$ je **bází okolí bodu** a, pokud platí:

- Každé $U \in \mathcal{U}$ je okolím bodu a.
- Pro každé okolí V bodu a existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset V$.

Tvrzení 4. *Nechť X je množina a pro každé $x \in X$ nechť $\mathcal{U}_x$ je nějaký systém podmnožin X. Pak existuje topologie $\mathcal{T}$ na X taková, že pro každé $x \in X$ je $\mathcal{U}_x$ bází okolí bodu x, právě když jsou splněny následující podmínky:*

(a) *Pro každé $x \in X$ a každé $U \in \mathcal{U}_x$ platí $x \in U$.*
(b) *Je-li $x \in X$ a $U, V \in \mathcal{U}_x$, pak existuje $W \in \mathcal{U}_x$ splňující $W \subset U \cap V$.*
(c) *Pro každé $x \in X$ a každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \subset X$ splňující $x \in V \subset U$ a navíc*

$$\forall y \in V \, \exists W \in \mathcal{U}_y : W \subset V.$$

Topologie $\mathcal{T}$ je pak jednoznačně určena a platí

$$\mathcal{T} = \{U \subset X; \forall x \in U \, \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subset U\}.$$

Příklad. *Nechť (X,ρ) je metrický prostor.*

- *Pro $x \in X$ a $r > 0$ označme $U(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) < r\}$. Pak*

  $$\mathcal{T} = \{U \subset X; \forall x \in U \, \exists r > 0 : U(x,r) \subset U\}$$

  je topologie na X. Je to **topologie generovaná metrikou** ρ.
- *Nechť $x \in X$. Každý z následujících systémů množin tvoří bázi okolí bodu x:*

  $$\{U(x,r); r > 0\}; \qquad \{U(x,\tfrac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}; \qquad \{\overline{U(x,\tfrac{1}{n})}; n \in \mathbb{N}\}.$$

A.2 Spojitá zobrazení

Definice. Nechť $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,\mathcal{U})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení.

(1) Zobrazení f je **spojité v bodě** $x \in X$, pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ v $(Y,\mathcal{U})$ existuje U okolí bodu x v $(X,\mathcal{T})$ splňující $f(U) \subset V$.
(2) Zobrazení f je **spojité na** X, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

Tvrzení 5 (charakterizace spojitosti). *Nechť $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{U})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojité na X.*
(ii) *Pro každou $U \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(U)$ otevřená v X.*
(iii) *Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F)$ uzavřená v X.*
(iv) *Pro každou $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

A.3 Oddělovací axiomy

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor. Prostor X se nazývá

- T_0, pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existuje $U \in \mathcal{T}$, která obsahuje právě jeden z bodů a, b;
- T_1, pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existuje $U \in \mathcal{T}$ taková, že $a \in U$ a $b \notin U$;
- T_2 (neboli **Hausdorffův**), pokud pro každé dva různé body $a, b \in X$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- **regulární**, pokud pro každé $a \in X$ a každou $B \subset X$ uzavřenou splňující $a \notin B$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $a \in U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- T_3, je-li T_1 a regulární;
- **úplně regulární**, pokud pro každé $a \in X$ a každou $B \subset X$ uzavřenou splňující $a \notin B$ existuje spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že $f(a) = 1$ a $f|_B = 0$;
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (neboli **Tichonovův**), je-li T_1 a úplně regulární;
- **normální**, pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny $A, B \subset X$ existují $U, V \in \mathcal{T}$ takové, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$;
- T_4, je-li T_1 a normální.

Poznámka.

- *Triviálně platí $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.*
- *Platí i $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$, není to však triviální, plyne to z Urysohnova lemmatu.*
- *Každý metrický prostor je T_4.*

Tvrzení 6 (Urysohnovo lemma). *Nechť X je normální topologický prostor a $A, B \subset X$ dvě disjunktní uzavřené množiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$ splňující $f|_A = 0$ a $f|_B = 1$.*

A.4 Podprostory, součiny a kvocienty

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Pak $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y; U \in \mathcal{T}\}$ je topologie na Y a prostor $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je pak **topologický podprostor** prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Poznámka. *Podprostor prostoru, který je T_0, T_1, T_2, regulární, T_3, úplně regulární nebo $T_{3\frac{1}{2}}$, má opět tutéž vlastnost. (To je zřejmé.) Podprostor T_4 prostoru nemusí být T_4. (To není zřejmé.)*

Definice. Nechť $(X_1, \mathcal{T}_1)$, ... ,$(X_k, \mathcal{T}_k)$ jsou neprázdné topologické prostory. Jejich **kartézským součinem** rozumíme množinu $X_1 \times \cdots \times X_k$ opatřenou topologií, jejíž báze je

$$\{U_1 \times \cdots \times U_k; U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots U_k \in \mathcal{T}_k\}.$$

Definice. Nechť $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, je libovolný neprázdný systém neprázdných topologických prostorů. Jejich **kartézským součinem** rozumíme množinu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ opatřenou topologií, jejíž báze je

$$\Big\{\{f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha; f(\alpha_1) \in U_1, \dots, f(\alpha_k) \in U_k\}; \\ U_1 \in \mathcal{T}_{\alpha_1}, \dots, U_k \in \mathcal{T}_{\alpha_k}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A, k \in \mathbb{N}\Big\}$$

Tvrzení 7. *Nechť $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, je libovolný neprázdný systém neprázdných topologických prostorů a $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ jejich kartézský součin. Nechť $(Y, \mathcal{U})$ je topologický prostor a $f : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ zobrazení. Zobrazení f je spojité na Y, právě když pro každé $\alpha \in A$ je zobrazení $y \mapsto f(y)(\alpha)$ spojité zobrazení Y do X_α.*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, Y množina a $f : X \to Y$ zobrazení X na Y. **Kvocientová topologie** na Y indukovaná zobrazením f je topologie

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset Y; f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{U})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení X na Y. Říkáme, že f je **kvocientové zobrazení**, pokud $\mathcal{U}$ je kvocientová topologie indukovaná zobrazením f.

Tvrzení 8. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{U})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ spojité zobrazení X na Y. Je-li f otevřené (tj. obraz každé otevřené množiny v X je otevřená množina v Y) nebo uzavřené (tj. obraz každé uzavřené množiny v X je uzavřená množina v Y), je kvocientové.*

Tvrzení 9. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ a $(Y, \mathcal{U})$ jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ kvocientové zobrazení X na Y. Nechť $(Z, \mathcal{W})$ je topologický prostor a $g : Y \to Z$ je zobrazení. Pak g je spojité, právě když $g \circ f$ je spojité.*

A.5 Kompaktní prostory

Definice. Topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ se nazývá **kompaktní**, pokud pro každý systém $\mathcal{U}$ otevřených množin, který pokrývá X (tj. který splňuje $\bigcup \mathcal{U} = X$) existuje konečný podsystém $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, který také pokrývá X (tj. $\bigcup \mathcal{W} = X$.)

Tvrzení 10. *Nechť X je kompaktní topologický prostor a $Y \subset X$ jeho topologický podprostor.*

- *Je-li Y uzavřený, je Y kompaktní.*
- *Je-li X Hausdorffův a Y kompaktní, je Y uzavřený.*

Tvrzení 11. *Nechť X je kompaktní topologický prostor, Y topologický prostor a $f : X \to Y$ spojité zobrazení X na Y. Pak platí:*

(i) *Y je kompaktní.*
(ii) *Je-li Y Hausdorffův, je f uzavřené zobrazení (a tedy kvocientové).*
(iii) *Je-li Y Hausdorffův a f je prosté, je f homeomorfismus (tj. i f^{-1} je spojité).*

Tvrzení 12. *Každý Hausdorffův kompaktní topologický prostor je T_4, a tedy i $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Věta 13 (Tichonovova věta). *Kartézský součin libovolného systému Hausdorffových kompaktních topologických prostorů je kompaktní. Speciálně, prostory $[-1,1]^\Gamma$, $[0,1]^\Gamma$, $\{0,1\}^\Gamma$ a $\{z \in \mathbb{C}; |z| \le 1\}^\Gamma$ jsou kompaktní pro každou množinu Γ.*

A.6 Konvergence posloupností a netů

Definice. Nechť X je topologický prostor, (x_n) posloupnost prvků X a $x \in X$. Říkáme, že posloupnost (x_n) **konverguje k x v prostoru** X, jestliže pro každé okolí U bodu x existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $x_n \in U$. Bod x se pak nazývá **limitou posloupnosti** (x_n), značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nebo $x_n \to x$.

Poznámka: Je-li X Hausdorffův, pak každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 14. *Nechť X je metrický prostor. Pak platí:*

(1) *Nechť $A \subset X$. Pak*

$$\overline{A} = \{x \in X; \exists (x_n) \text{ posloupnost v } A : x_n \to x\}$$

(2) *Nechť $A \subset X$. Pak A je uzavřená, právě když každé $x \in X$, k němuž konverguje nějaká posloupnost prvků A, je prvkem A.*

(3) *Nechť Y je topologický prostor, $f : X \to Y$ zobrazení a $x \in X$. Zobrazení f je spojité v bodě x, právě když platí*

$$\forall (x_n) \text{ posloupnost v } X : x_n \to x \Rightarrow f_n(x) \to f(x).$$

Definice. Nechť $(\Gamma, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Říkáme, že je **usměrněná** (podrobněji **nahoru usměrněná**), pokud pro každou dvojici $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existuje $\gamma \in \Gamma$, splňující $\gamma_1 \preceq \gamma$ a $\gamma_2 \preceq \gamma$.

Příklady usměrněných množin:.

- $\Gamma =$ *množina všech konečných podmnožin* $\mathbb{N}$, $A \preceq B \equiv^{\mathrm{df}} A \subset B$.
- $\Gamma =$ *množina všech okolí bodu x v topologickém prostoru* X, $U \preceq V \equiv^{\mathrm{df}} U \supset V$.

Definice. Nechť X je topologický prostor a $(\Gamma, \preceq)$ je usměrněná množina.

- **Netem indexovaným množinou** Γ rozumíme každé zobrazení $\alpha : \Gamma \to X$.
- Říkáme, že net $\alpha : \Gamma \to X$ **konverguje k bodu** $x \in X$, pokud platí

$$\forall U \text{ okolí bodu } x\, \exists \gamma_0 \in \Gamma\, \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \succeq \gamma_0 : \alpha(\gamma) \in U.$$

Bod x se nazývá **limitou netu** α, píšeme $\lim_{\gamma\in\Gamma} \alpha(\gamma) = x$ nebo $\alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma\in\Gamma} x$.

Poznámka: Je-li X Hausdorffův, pak každý net v X má nejvýše jednu limitu.

Tvrzení 15. *Nechť X je topologický prostor. Pak platí:*

(1) *Nechť $A \subset X$. Pak*

$$\overline{A} = \{x \in X; \exists \text{ net } \alpha : \Gamma \to A : \alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma\in\Gamma} x\}$$

(2) *Nechť $A \subset X$. Pak A je uzavřená, právě když každé $x \in X$, k němuž konverguje nějaký net v A, je prvkem A.*

(3) *Nechť Y je topologický prostor, $f : X \to Y$ zobrazení a $x \in X$. Zobrazení f je spojité v bodě x, právě když platí*

$$\forall \text{ net } \alpha : \Gamma \to X : \alpha(\gamma) \xrightarrow{\gamma\in\Gamma} x \Rightarrow f(\alpha(\gamma)) \xrightarrow{\gamma\in\Gamma} f(x).$$