FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2023/2024

PŘÍKLADY KE KAPITOLE VI

K oddílu VI.1 – obecné slabé topologie

Příklad 1. Nechť $X = C([0,1])$ s topologií bodové konvergence na $[0,1]$. Popište všechny spojité lineární funkcionály na X (tj. popište X^*).

`Návod:` *Použijte Větu VI.4 z přednášky.*

Příklad 2. Nechť X je normovaný lineární prostor, který není úplný, a Y nechť je jeho zúplnění.

(1) Ukažte, že $X^* = Y^*$, a vysvětlete, v jakém smyslu tato rovnost platí.
(2) Ukažte, že topologie $\sigma(Y^*, Y)$ a $\sigma(Y^*, X)$ jsou různé.

`Návod:` *(2) Použijte Větu VI.4 z přednášky.*

Příklad 3. Nechť X je normovaný lineární prostor, X^* jeho duál a X^{**} druhý duál. Ukažte, že na X^* splývají slabá a slabá* topologie (tj. topologie $\sigma(X^*, X^{**})$ a $\sigma(X^*, X)$), právě když X je reflexivní Banachův prostor.

`Návod:` *Použijte Větu VI.4 z přednášky.*

Příklad 4. Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že kanonické vnoření $\varkappa : X \to X^{**}$ je homeomorfismus (X, w) do (X^{**}, w^*).

`Návod:` *Použijte Větičku VI.1(6) z přednášky.*

Příklad 5. Z Příkladu V.39 a z Úvodu do funkcionální analýzy víme, že pro $p \in (0,1]$ je $(\ell^p)^* = \ell^\infty$.

(1) Ukažte, že topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^p)$, $p \in (0,1]$, jsou navzájem různé.
(2) Nechť $0 < p < q \leq 1$. Která z topologií $\sigma(\ell^\infty, \ell^p)$ a $\sigma(\ell^\infty, \ell^q)$ je slabší?

`Návod:` *(1) Použijte Větu VI.4 z přednášky. (2) Použijte Větičku VI.1(6) z přednášky.*

Příklad 6. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$ odděluje body X. Ukažte, že topologie $\sigma(X, M)$ je metrizovatelná, právě když M neobsahuje nespočetnou lineárně nezávislou podmnožinu.

`Návod:` *Použijte Větu V.22 a Lemma VI.3 z přednášky.*

K oddílu VI.2 – slabé topologie na lokálně konvexních prostorech

Příklad 7. Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $(X, \|\cdot\|)$ je separabilní, právě když (X, w) je separabilní.

`Návod:` *Použijte Mazurovu větu.*

Příklad 8. Najděte příklad Banachova prostoru X a konvexní normově uzavřené podmnožiny X^*, která není slabě* uzavřená.

`Návod:` *Uvažte například $X = c_0$, a tedy $X^* = \ell^1$, za onu množinu zvolte uzavřený konvexní obal kanonických jednotkových vektorů v ℓ^1. Další zásobu příkladů poskytuje Goldstineova věta.*

Příklad 9. Nechť X a Y jsou LCS a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Ukažte, že T je spojité i jako zobrazení (X, w) do (Y, w).

`Návod:` *Použijte Větičku VI.1(6) z přednášky.*

Příklad 10. Nechť X a Y jsou LCS a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pro $\varphi \in Y^*$ definujme zobrazení $T'\varphi : X \to \mathbb{F}$ předpisem $T'\varphi = \varphi \circ T$.

(1) Ukažte, že $T'\varphi \in X^*$ pro každé $\varphi \in Y^*$.
(2) Ukažte, že zobrazení $T' : \varphi \mapsto T'\varphi$ je lineární zobrazení Y^* do X^*.
(3) Ukažte, že zobrazení T' je spojité z (Y^*, w^*) do (X^*, w^*).

`Návod:` *(3) Použijte Větičku VI.1(6) z přednášky.*

Příklad 11. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T : Y^* \to X^*$ omezený lineární operátor. Ukažte, že existuje $S \in L(X, Y)$, pro který $T = S'$, právě když T je spojitý i jako zobrazení (Y^*, w^*) do (X^*, w^*).

`Návod:` *Uvažte operátor $T' : X^{**} \to Y^{**}$ a ukažte, že $T'(\varkappa(X)) \subset \varkappa(Y)$ s využitím Důsledku VI.5(c) z přednášky.*

Příklad 12. Nechť X je Hilbertův prostor a (e_n) je ortonormální posloupnost v X. Ukažte, že posloupnost (e_n) konverguje slabě k nule.

`Návod:` *Použijte reprezentaci duálu Hilbertova prostoru a Besselovu nerovnost.*

Příklad 13. Nechť X je Hilbertův prostor a $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální systém v X. Ukažte, že množina $\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \cup \{\boldsymbol{o}\}$ je slabě kompaktní.

`Návod:` *S využitím reprezentace duálu k Hilbertovu prostoru a Besselovy nerovnosti ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje všechny prvky ortonormálního systému s výjimkou konečně mnoha.*

Příklad 14. Nechť $X = c_0(\Gamma)$ nebo $X = \ell^p(\Gamma)$, kde $p \in (1, \infty)$ a Γ je nějaká množina. Ukažte, že množina $\{\boldsymbol{o}\} \cup \{\boldsymbol{e}_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je slabě kompaktní ($\boldsymbol{e}_\gamma$ značí příslušný kanonický jednotkový vektor).

`Návod:` *S využitím reprezentace duálu X^* ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje všechny kanonické jednotkové vektory s výjimkou konečně mnoha.*

Příklad 15. Nechť $X = \ell^1(\Gamma)$, kde Γ je nějaká množina. Ukažte, že množina $\{\boldsymbol{e}_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je uzavřená a diskrétní ve slabé topologii (tj., každá její podmnožina je slabě uzavřená v X).

`Návod:` *S využitím reprezentace $X^* = \ell^\infty(\Gamma)$ ukažte, že každý bod této množiny je izolovaný (ve slabé topologii) a že její doplněk je slabě otevřená množina.*

Příklad 16. Nechť $X = C([0,1])$. Uvažme na X tři topologie – normovou (tj. generovanou supremovou normou), slabou (tj. slabou topologii prostoru $(X, \|\cdot\|_\infty)$ – tu značme w) a topologii bodové konvergence na $[0,1]$ (tu značme τ_p).

(1) Najděte posloupnost (f_n) v X, která v topologii τ_p konverguje k nule, ale není omezená v normě.
(2) Ukažte, že existuje τ_p-omezená množina, která není normově omezená.
(3) Nechť (f_n) je normově omezená posloupnost X a $f \in X$. Ukažte, že $f_n \overset{w}{\to} f$, právě když $f_n \overset{\tau_p}{\to} f$.
(4) Platí ekvivalence z bodu (3) bez předpokladu normové omezenosti?

`Návod:` *(2) Použijte posloupnost z bodu (1). (3) Použijte Rieszovu větu o reprezentaci $C([0,1])^*$ a Lebesguovu větu. (4) Uvažte posloupnost z bodu (1).*

Příklad 17. Ukažte, že v prostoru ℓ^1 splývá slabá a normová konvergence posloupností (tj. ℓ^1 má **Schurovu vlastnost**).

`Návod:` *Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ^1 existuje posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)$, která slabě konverguje k nule a přitom existuje takové $c > 0$, že $\|\boldsymbol{x}_k\| > c$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $(\boldsymbol{x}_k)$ je omezená, bez újmy na obecnosti $\|x_k\| = 1$ pro každé k. Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel (k_j) a (m_j), že $\sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}} \left|x_{k_j}(l)\right| > \frac{3}{4}$. Následně najděte $\varphi \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$, aby $\left|\varphi(x_{k_j})\right| > \frac{1}{2}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.*

Příklad 18. Ukažte, že prostory c_0, ℓ^p pro $p \in (1, \infty]$ a $\mathcal{C}([0,1])$ nemají Schurovu vlastnost.

`Návod:` *V každém z těchto prostorů najděte posloupnost na jednotkové sféře, která slabě konverguje k nule. Pro $\mathcal{C}([0,1])$ využijte popis Příklad 16(3).*

Příklad 19. Ukažte, že nekonečnědimensionální Hilbertův prostor nemá Schurovu vlastnost.

`Návod:` *Použijte Příklad 12.*

Příklad 20. Ukažte, že prostor $L^1([0,1])$ nemá Schurovu vlastnost.

`Návod:` *Nechť $T : L^2([0,1]) \to L^1([0,1])$ je identita. Uvažte ON bázi (f_n) prostoru $L^2([0,1])$ známou z teorie Fourierových řad a uvažte posloupnost (Tf_n).*

Příklad 21. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze.

(1) Ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje netriviální vektorový podprostor X.
(2) Ukažte, že S_X je slabě hustá podmnožina B_X.

`Návod:` *(1) Ukažte, že každé slabé okolí nuly obsahuje průnik jader konečně mnoha funkcionálů, a toto je netriviální vektorový podprostor. (2) Použijte (1).*

Příklad 22. Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze.

(1) Ukažte, že každé slabé* okolí nuly v X^* obsahuje netriviální vektorový podprostor X^*.
(2) Ukažte, že S_{X^*} je slabě* hustá podmnožina B_{X^*}.

`Návod:` *X^* má také nekonečnou dimenzi a slabá* topologie je slabší než slabá, tedy lze použít Příklad 21.*

Příklad 23. Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) Na X splývá slabá a normová topologie.
(iii) na X^* splývá slabá* a normová topologie.

K oddílu VI.3 – poláry a jejich aplikace

Příklad 24. Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor. Ukažte, že (X^{**}, w^*) je separabilní.

Návod: *Použijte Goldstineovu větu.*

Příklad 25. Ukažte, že $((\ell^\infty)^*, w^*)$ je separabilní.

Návod: $\ell^\infty = (\ell^1)^*$.

Příklad 26. Nechť X je metrizovatelný LCS. Ukažte, že (X^*, w^*) je σ-kompaktní (tj. sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin).

Návod: *Použijte Větu VI.14 a spočetnou bázi okolí nuly v X.*

Příklad 27. Nechť X je neúplný normovaný lineární prostor a Y jeho zúplnění. Z Příkladu 2 víme, že $X^* = Y^*$ a že $\sigma(Y^*, X) \neq \sigma(Y^*, Y)$. Ukažte, že na jednotkové kouli B_{Y^*} topologie $\sigma(Y^*, X)$ a $\sigma(Y^*, Y)$ splývají.

Návod: *Díky Důsledku VI.16 víme, že $(B_{Y^*}, \sigma(Y^*, Y))$ je kompaktní a topologie $\sigma(Y^*, X)$ je slabší Hausdorffova topologie.*

Příklad 28. Uvažme ℓ^∞ jako duál ℓ^1. Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^∞ splývá slabá* topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ s topologií bodové konvergence (tj. s topologií generovanou pseudonormami $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto |x_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

Návod: *Použijte Příklad 27.*

Příklad 29. Uvažme ℓ^1 jako duál k c_0. Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^1 splývá slabá* topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$ s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklad 27.*

Příklad 30. Nechť $p \in (1, \infty)$. Ukažte, že na jednotkové kouli ℓ^p splývá slabá topologie s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklad 27 a reflexivitu ℓ^p.*

Příklad 31. Ukažte, že na jednotkové kouli c_0 splývá slabá topologie s topologií bodové konvergence.

Návod: *Použijte Příklady 4 a 28.*

Příklad 32. Nechť X je LCS a X^* je jeho duál. Pro neprázdnou $A \subset X^*$ definujme

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|\,; f \in A\}, \quad x \in X.$$

(1) Ukažte, že A je $\sigma(X^*, X)$-omezená, právě když pro každé $x \in X$ je $q_A(x) < \infty$.
(2) Nechť A je $\sigma(X^*, X)$-omezená. Ukažte, že q_A je pseudonorma na X.
(3) Musí být q_A spojitá na X?

(4) Nechť U je absolutně konvexní okolí nuly v X. Ukažte, že $p_U = q_{U^\circ}$ (kde p_U je Minkowského funkcionál).

`Návod:` *(3) Vezměte za X nekonečněrozměrný Banachův prostor se slabou topologií a $A = B_{X^*}$. (4) Použijte větu o bipoláře.*

Příklad 33. Nechť X je normovaný lineární prostor, $C > 0$ a $f, g \in S_{X^*}$. Nechť $\|f|_{\ker g}\| \leq C$. Ukažte, že existuje $\alpha \in \mathbb{F}$, $|\alpha| = 1$ a $\|f - \alpha g\| \leq 2C$.

`Návod:` *Pokud $C \geq 1$, tvrzení je triviální. Nechť tedy $C < 1$. Z Hahn-Banachovy věty plyne existence $\tilde{f} \in X^*$, pro které je $\left\|\tilde{f}\right\| \leq C$ a $\tilde{f} = f$ na $\ker g$. Protože $\ker g \subset \ker(f - \tilde{f})$, existuje $\beta \in \mathbb{F}$ splňující $f - \tilde{f} = \beta g$. Ukažte, že lze vzít $\alpha = \frac{\beta}{|\beta|}$.*

Příklad 34. Nechť X je Banachův prostor. Nechť $f : X^* \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál, pro který $f|_{B_{X^*}}$ je slabě* spojité zobrazení. Ukažte, že $f \in \varkappa(X)$.

`Návod:` *Protože $f(B_{X^*})$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{F}$, je $f \in X^{**}$. Případ $f = 0$ je triviální, tedy bez újmy na obecnosti $\|f\| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ nechť $A_\varepsilon = \{x^* \in B_{X^*}; \operatorname{Re} f(x^*) \geq \varepsilon\}$ a $B_\varepsilon = \{x^* \in B_{X^*}; \operatorname{Re} f(x^*) \leq -\varepsilon\}$. Pak A_ε a B_ε jsou neprázdné disjunknutní slabě* kompaktní konvexní množiny, a tedy díky oddělovací větě existuje $g \in \varkappa(X)$, pro které $\sup \operatorname{Re} g(B_\varepsilon) < \inf \operatorname{Re} g(A_\varepsilon)$. Odtud odvoďte, že $\|f|_{\ker g}\| \leq \varepsilon$. Pomocí Příkladu 33 pak ukažte, že f je v uzávěru $\kappa(X)$, tedy v $\kappa(X)$.*

Příklad 35. Platí tvrzení z předchozího příkladu i pro neúplné prostory?

`Návod:` *Použijte Příklad 27.*