FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA 1

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2023/2024

PŘÍKLADY KE KAPITOLE VII

K oddílu VII.1 – testovací funkce a slabé derivace

Příklad 1. Označme
$$\mathcal{W}((a,b)) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b)); f \text{ má slabou derivaci v } L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))\}.$$
Pro $f \in \mathcal{W}((a,b))$ nechť f' značí slabou derivaci funkce f. Nechť $p \in [1,\infty]$. Nechť
$$W^{1,p}((a,b)) = \{f \in \mathcal{W}((a,b)); f \in L^p((a,b)) \text{ a } f' \in L^p((a,b))\}.$$
Pro $f \in W^{1,p}$ položme
$$\|f\|_{1,p} = \begin{cases} (\|f\|_p^p + \|f'\|_p^p)^{1/p}, & \text{je-li } p < \infty, \\ \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}, & \text{je-li } p = \infty. \end{cases}$$
Ukažte, že $(W^{1,p}((a,b)), \|\cdot\|_{1,p})$ je Banachův prostor a že v případě $p = 2$ je to Hilbertův prostor.

`Návod:` *Ukažte, že $f \mapsto (f, f')$ je izometrie $W^{1,p}((a,b))$ na uzavřený podprostor $(L^p((a,b)) \times L^p((a,b)), \|\cdot\|_p)$.*

Příklad 2. Ukažte, že prostor $W^{1,1}((0,1))$ je izomorfní prostoru $AC([0,1])$ z Příkladu I.15 (viz Úvod do funkcionální analýzy, příklady ke kapitole I).

`Návod:` *Použijte Větu VII.4(b) z přednášky.*

Příklad 3. Ukažte, že funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $[a,b]$ tvoří hustý podprostor $W^{1,p}((a,b))$ pro každé $p \in [1,\infty)$.

`Návod:` *Nechť $f \in W^{1,p}((a,b))$. S využitím Lemmatu VII.1 z přednášky aproximujte f' pomocí testovací funkce a vezměte vhodnou primitivní funkci k této testovací funkci.*

Příklad 4. Ukažte, že $\mathscr{D}((0,1))$ není hustý podprostor $W^{1,1}((0,1))$.

`Návod:` *Uvažte funkci konstantě rovnou jedné.*

Příklad 5. Ukažte, že funkce $f(t) = \log|t|$ patří do $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ale nemá slabou derivaci v $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

`Návod:` *Pokud by funkce $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ byla slabou derivací f na $\mathbb{R}$, pak $g|_{(0,\infty)}$ by byla slabou derivací $f|_{(0,\infty)}$ na $(0,\infty)$.*

Příklad 6.
(1) Ukažte, že každá $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ je slabou derivací nějaké spojité funkce na (a,b).
(2) Ukažte, že každá znaménková či komplexní regulární borelovská míra na (a,b) je slabou derivací nějaké zprava spojité funkce na (a,b).
(3) Ukažte, že znaménková či komplexní regulární borelovská míra μ na (a,b) je slabou derivací nějaké spojité funkce na (a,b), právě když $\mu(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$.

Příklad 7. Spočtěte slabou derivaci následujících funkcí na $\mathbb{R}$. V kterých případech je slabou derivací opět funkce a ve kterých nějaká míra na $\mathbb{R}$?

(1) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$;
(2) $\chi_{(0,\infty)}$;
(3) $\chi_{(0,1)}$;
(4) Cantorova funkce.

Příklad 8. Najděte takovou spojitou funkci na $[0,1]$, že žádná míra na $(0,1)$ není její slabou derivací.

Příklad 9. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte funkci $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takovou, že $\varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = \cdots = \varphi_n^{(n-1)}(0) = 0$ a $\varphi_n^{(n)}(0) \neq 0$.

`Návod:` *Zvolte $\varphi_n(x) = x^n \psi(x)$ pro vhodné ψ.*

Příklad 10. Pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ najděte $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pro kterou platí $D^\beta \varphi_\alpha(0) = 0$ pro každé $\beta < \alpha$ a $D^\alpha \varphi_\alpha(0) \neq 0$.

`Návod:` *Zvolte $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\alpha \psi(\boldsymbol{x})$ pro vhodné ψ.*

Příklad 11. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že funkce

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \\ \varphi'(a), & x = a \end{cases}$$

patří do $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

`Návod:` *Ukažte, že $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, a použijte větu o derivaci podle parametru.*

Příklad 12. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $a \in \mathbb{R}$ splňují $\varphi(a) = 0$. Ukažte, že existuje taková $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, že $\varphi(x) = (x-a)\psi(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad.*

K oddílu VII.2 – distribuce a operace s nimi

Příklad 13. Najděte posloupnost $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, ale φ_n nekonverguje k nule v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Příklad 14. Najděte posloupnost $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}((0,1))$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$, ale φ_n nekonverguje k nule v $\mathscr{D}((0,1))$.

Příklad 15. Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definujme

$$\Lambda_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

(1) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}$ je distribuce na $\mathbb{R}$.
(2) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}|_{\mathscr{D}((0,\infty))}$ je tvaru Λ_f, kde $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$ (tj. $\Lambda_{1/x}|_{\mathscr{D}((0,\infty))}$ je regulární distribuce), ale $\Lambda_{1/x}$ není regulární distribuce (tj., není tvaru Λ_f, kde $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$).
(3) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}$ je derivací regulární distribuce Λ_g, kde $g(x) = \log|x|$.
(4) Spočtěte derivaci distribuce $\Lambda_{1/x}$.
(5) Ukažte, že distribuce $\Lambda_{1/x}$ je řádu 1 (a není řádu 0).

`Návod:` *(5) Pro důkaz, že je řádu nejvýše 1, použijte bod (3). Pro důkaz, že není řádu 0 použijte definici a (například) kompaktní množinu $[0,1]$.*

Příklad 16. Nechť $\Lambda_{1/x}$ je distribuce z předchozího příkladu, δ_0 je Diracova míra nesená v nule a $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Ukažte, že $f \cdot \Lambda_{1/x} = \Lambda_1$.
(2) Ukažte, že $f \cdot \Lambda_{\delta_0} = 0$.
(3) Ukažte, že na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ nelze zavést asociativní násobení, aby splňovalo $\Lambda_f \cdot U = f \cdot U$ pro $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Příklad 17. Které z následujících vzorců definují distribuci na $\mathbb{R}$?

(1) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(n)$.
(2) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty n\varphi(n)$.
(3) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty n! \cdot \varphi(n)$.
(4) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(\frac{1}{n})$.
(5) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\varphi(\frac{1}{n})$.
(6) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\varphi(\frac{1}{n})$.

Příklad 18. Které z vzorců z předchozího příkladu definují distribuci na $(0,\infty)$?

Příklad 19. Nechť $f = \frac{1}{2}\chi_{\{(t,x)\in\mathbb{R}^2; t>|x|\}}$.

(1) Ukažte, že $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
(2) Ukažte, že $D^{(2,0)}\Lambda_f - D^{(0,2)}\Lambda_f = \Lambda_{\delta_{(0,0)}}$, tj. „$f$ řeší rovnici $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \delta_{(0,0)}$ v distribucích“.

Návod: *Použijte definice, Fubiniovu větu a integraci per partes.*

Příklad 20. Nechť U je distribuce na (a,b) a $f \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$. Ukažte, že $(f \cdot U)' = f' \cdot U + f \cdot U'$.

Příklad 21. Najděte funkci f, která je nulová na $(-\infty, 0)$ a třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $[0,\infty)$, která „řeší rovnici $y'' + y = \delta_0$ v distribucích,“ tj. pro kterou platí $(\Lambda_f)'' + \Lambda_f = \Lambda_{\delta_0}$.

Návod: *Nejprve do rovnice dosaďte libovolné $\varphi \in \mathscr{D}((0,\infty))$. S použitím definic, integrace per partes a Lemmatu VII.2 z přednášky ukažte, že f musí na $(0,\infty)$ řešit diferenciální rovnici $y'' + y = 0$. Pro určení, které z jejích řešení dává hledanou funkci f dosaďte do rovnice funkci φ_1 z Příkladu 9.*

Příklad 22. Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ položme

$$T(\varphi) = \int_{U(0,1)} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(0)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^2\setminus U(0,1)} \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(1) Ukažte, že $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$.
(2) Ukažte, že $f \cdot T = \Lambda_1$, kde $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$.

Návod: *(1) Druhý sčítanec je regulární distribuce. V prvním sčítanci rozdíl $\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(0)$ vyjádřete jako integrál z derivace pomocí Newton-Leibnizovy formule, použijte Cauchy-Schwarzovu nerovnost a skutečnost, že funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{\|x\|}$ je integrovatelná na $U(0,1)$ (to lze spočíst pomocí polárních souřadnic) k důkazu, že jde o distribuci prvního řádu.*

Příklad 23. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pro $r > 0$ definujme funkci φ_r předpisem $\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \varphi(r\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

(1) Ukažte, že $\varphi_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.
(2) Je-li $r > 1$, ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $\|\varphi\|_N \leq \|\varphi_r\|_N \leq r^N \|\varphi\|_N$.
(3) Je-li $r \in (0,1)$, ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $r^N \|\varphi\|_N \leq \|\varphi_r\|_N \leq \|\varphi\|_N$.

Návod: *Použijte příslušné definice a větu o derivaci složené funkce.*

Příklad 24. Které z následujících vzorců definují distribuci na $\mathbb{R}$?

(1) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.
(2) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi^{(n)}(n)$.
(3) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \varphi^{(n)}(n)$.
(4) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.
(5) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.
(6) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.

`Návod:` *(4)–(6) Použijte charakterizaci distribucí podle Tvrzení VII.6 (bod (4)) z přednášky a dále Příklady 9 a 23.*

Příklad 25. Které z vzorců z předchozího příkladu definují distribuci na $(0,\infty)$? Jsou konečného řádu?

`Návod:` *Použijte příslušné definice a Příklady 9 a 23.*

Příklad 26. Spočtěte $D^{(1,0)}\Lambda_f$ a $D^{(0,1)}\Lambda_f$ pro následující funkce na $\mathbb{R}^2$. Určete, zda výsledná distribuce je regulární, případně indukovaná nějakou mírou.

(1) $f = \chi_{(0,\infty)\times\mathbb{R}}$;
(2) $f = \chi_{(0,\infty)\times(0,\infty)}$;
(3) $f = \chi_{(0,1)\times(0,1)}$;
(4) $f = \chi_{\{(x,y);y>x\}}$;
(5) $f = \chi_{\{(x,y);y>2x\}}$.

Příklad 27. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $U \in \mathscr{D}'((a,b))$ splňuje $U^{(n)} = 0$. Ukažte, že existuje polynom P stupně menšího než n, pro který platí $U = \Lambda_P$.

`Návod:` *Použijte matematickou indukci a Tvrzení VII.9 z přednášky.*

Příklad 28. Najděte všechny distribuce na $\mathbb{R}$ splňující rovnici

(1) $U' = \Lambda_{\delta_0}$;
(2) $U'' = \Lambda_{\delta_0}$.

`Návod:` *Najděte jedno (partikulární) řešení a použijte předchozí příklad.*

Příklad 29. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f(x) = x - a$, $x \in \mathbb{R}$. Najděte všechny distribuce na $\mathbb{R}$ splňující rovnici

(1) $fU = 0$;
(2) $f^2U = 0$;
(3) $fU = \Lambda_1$;
(4) $f^2U'' = 0$.

`Návod:` *(1): Použijte Příklad 12 k důkazu, že* $\operatorname{Ker}\Lambda_{\delta_a} \subset \operatorname{Ker} U$.

Příklad 30. Uvažme funkci $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ na $\mathbb{R}^3$.

(1) Ukažte, že $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.
(2) Pro $j = 1,2,3$ položme $g_j(\boldsymbol{x}) = -\frac{x_j}{\|\boldsymbol{x}\|^3}$. Ukažte, že $g_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ a že $\Lambda_{g_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Lambda_f$.
(3) Pro $j = 1,2,3$ položme $h_j(\boldsymbol{x}) = \frac{3x_j^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^5}$. Ukažte, že $h_j \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ a že

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1}\Lambda_f(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} h_1(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,\varepsilon)} (\varphi(-\sqrt{\varepsilon^2-u^2-v^2},u,v) + \varphi(\sqrt{\varepsilon^2-u^2-v^2},u,v))\sqrt{\varepsilon^2-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Bigg)$$

(4) Ukažte, že f „řeší rovnici $\Delta f = -4\pi\delta_{(0,0,0)}$ v distribucích," tj., že $\Delta\Lambda_f = -4\pi\Lambda_{\delta_{(0,0,0)}}$, kde $\Delta\Lambda = D^{(2,0,0)}\Lambda + D^{(0,2,0)}\Lambda + D^{(0,0,2)}\Lambda$.

`Návod:` *(1) Na $U(0,1)$ použijte sférické souřadnice. (2) K důkazu lokální integrovatelnosti použijte opět sférické souřadnice. Pak použijte Fubiniovu větu a integraci per partes. (3) K vyvrácení lokální integrovatelnosti použijte opět sférické souřadnice. Dále si uvědomte, že $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Lambda_f(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_{g_1}(\varphi) = -\Lambda_{g_1}(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}) = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,\varepsilon)} g_1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ a pak použijte Fubiniovu větu a integraci per partes. (4) Sečtěte vzorec z (3) s jeho analogiemi pro $j = 2,3$. Uvědomte si, že $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ mimo počátek a že součet druhých sčítanců lze vyjádřit jako $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\varphi)\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\varphi)$.*

Příklad 31. Uvažme funkci na $\mathbb{R}^2$ definovanou vzorcem

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t}) & t > 0,\\ 0 & t \le 0.\end{cases}$$

(1) Ukažte, že $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
(2) Ukažte, že $\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ na polorovině určené nerovností $t > 0$.
(3) Ukažte, že $\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ pro každé $t > 0$.
(4) Ukažte, že $D^{(1,0)}\Lambda_f - D^{(0,2)}\Lambda_f = \Lambda_{\delta_{(0,0)}}$.

`Návod:` *(1) plyne například z (3). (3) Je známo, že $\int_R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. (4) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Nejprve ukažte, že $(D^{(1,0)}\Lambda_f - D^{(0,2)}\Lambda_f)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^\infty f(\varepsilon,x)f(\varepsilon,x)\,\mathrm{d}x$. K tomu použijte definice, Fubiniovu větu, integraci per partes, rovnost z (2) a Newton-Leibnizovu formuli. Dále dosaďte za f, proveďte vhodnou substituci a použijte Lebesgueovu větu k limitnímu přechodu.*

K oddílu VII.3 – další vlastnosti distribucí

Příklad 32. Nechť (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω, z nichž všechny mají řád nejvýše k. Předpokládejme, že $\Lambda_n \to \Lambda$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$. Musí Λ být také řádu nejvýše k?

`Návod:` *Uvažte distribuci $\Lambda_{1/x}$ na $\mathbb{R}$.*

Příklad 33. Určete nosič distribucí z Příkladu 17. Které z nich mají kompaktní nosič?

Příklad 34. Určete nosič distribucí z Příkladu 18. Které z nich mají kompaktní nosič?

Příklad 35. Určete nosič distribucí z Příkladu 24. Které z nich mají kompaktní nosič?

Příklad 36. Určete nosič distribucí z Příkladu 25. Které z nich mají kompaktní nosič?

K oddílu VII.4 – konvoluce distribucí

Příklad 37. Nechť (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω, z nichž všechny mají řád nejvýše k. Předpokládejme, že $\Lambda_n \to \Lambda$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$. Musí Λ být konečného řádu?

`Návod:` *Použijte bod (d) z Věty VII.15.*

Příklad 38. Nechť μ je míra na $\mathbb{R}^d$ (buď nezáporná nebo komplexní). Ukažte, že pro každou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ platí $\Lambda_\mu * \varphi(\boldsymbol{x}) = \int \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Příklad 39. Nechť μ a ν jsou dvě komplexní míry na $\mathbb{R}^d$. Ukažte, že lze definovat konvoluci $\Lambda_\mu * \Lambda_\nu$ a že jejím výsledkem je distribuce $\Lambda_{\mu*\nu}$, kde $\mu*\nu$ je míra na $\mathbb{R}^d$ definovaná vzorcem

$$(\mu*\nu)(A) = (\mu\times\nu)(\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in A\}), \quad A \subset \mathbb{R}^d \text{ borelovská.}$$

`Návod:` *Ukažte, že jde o situaci (4) z přednášky pro $m = n = 0$ (připomeňme, že komplexní míry mají automaticky konečnou variaci). Pro výpočet použijte definice, Fubiniovu větu a integraci podle obrazu míry.*

Příklad 40. Uvažujme následující distribuce na $\mathbb{R}$:

$$U(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} D^n\varphi(n),\ V(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} D^n\varphi(n-6),\ W(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} D^n\varphi(2n), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Ukažte, že lze definovat jejich konvoluce

$$U * U, U * V, U * W, V * V, V * W, W * W$$

a spočtěte je.

`Návod:` *Ukažte, že jde o situaci (3) z přednášky.*

Příklad 41. (1) Ukažte, že konvoluce $\Lambda_{\chi_{(0,\infty)}} * ((\Lambda_{\delta_0})' * \Lambda_1)$ je dobře definovaná a spočtěte ji.
(2) Ukažte, že konvoluce $(\Lambda_{\chi_{(0,\infty)}} * (\Lambda_{\delta_0})') * \Lambda_1$ je dobře definovaná a spočtěte ji.
(3) Jsou výsledky předchozích dvou bodů stejné? Co to říká o asociativitě konvoluce pro distribuce?

`Návod:` *Ve výpočtech použijte mj. Tvrzení VII.16(g) a Příklad 7.*

Příklad 42. Nechť U, V jsou distribuce na $\mathbb{R}^d$ s kompaktním nosičem a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Ukažte, že $(U * V) * \varphi = U * (V * \varphi)$.

Příklad 43. Nechť U, V, W jsou tři distribuce na $\mathbb{R}^d$, z nichž aspoň dvě mají kompaktní nosič. Ukažte, že $(U * V) * W = U * (V * W)$.

K oddílu VII.5 – Temperované distribuce

Příklad 44. Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je nezáporná funkce, pro kterou je distribuce Λ_f temperovaná. Ukažte, že existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ taková, že platí

$$\forall R \geq 1\colon \int_{-R}^{R} f \leq C(1+R)^N.$$

`Návod:` *Zvolme nezápornou $\psi \in \mathscr{D}((-2,2))$, která je konstantně rovna 1 na $[-1,1]$. Použijte Tvrzení VII.18(b) a příslušnou nerovnost aplikujte na funkci $\psi_R(x) = \psi(\frac{x}{R})$.*

Příklad 45. Nechť μ je nezáporná míra na $\mathbb{R}$, pro kterou je distribuce Λ_μ temperovaná. Ukažte, že existují $C > 0$ a $N \in \mathbb{N}_0$ taková, že platí

$$\forall R \geq 1\colon \mu([-R,R]) \leq C(1+R)^N.$$

`Návod:` *Postupujte stejně jako v předchozím příkladu.*

Příklad 46. Které z následujících distribucí jsou temperované?
(1) Λ_f, kde $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
(2) Λ_g, kde $g(x) = e^x \cos(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$;
(3) $U(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\varphi(n)$;
(4) $U(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n\varphi(n)$;

`Návod:` *(1) Použijte Příklad 44. (2) Uvědomte si, že g má omezenou primitivní funkci. (4) Použijte Příklad 45.*

Příklad 47. Nechť $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ je temperovaná. Ukažte, že U je konečného řádu.

`Návod:` *Použijte Tvrzení VII.18(b).*

K oddílu VII.5 – Fourierova transformace

Příklad 48. Nechť μ je (znaménková či komplexní) míra na $\mathbb{R}^d$. Ukažte, že $\widehat{\Lambda_\mu} = \Lambda_f$ pro nějakou omezenou spojitou funkci f na $\mathbb{R}^d$ a určete příslušnou f.

`Návod:` *Použijte definici a Fubiniovu větu. Pro důkaz spojitosti f použijte větu o spojitosti vzhledem k parametru.*

Příklad 49. Spočtěte $\widehat{\Lambda_{\delta_0}}$ a obecněji $\widehat{\Lambda_{\delta_a}}$ pro $a \in \mathbb{R}$.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad.*

Příklad 50. Spočtěte $\widehat{\Lambda_{\cos}}$ a $\widehat{\Lambda_{\sin}}$.

`Návod:` *Vyjádřete* cos *a* sin *pomocí exponenciály, použijte výsledek předchozího příkladu a Větu VII.25(a).*