# V. Omezené a neomezené operátory na Hilbertových prostorech

**Úmluva.** V této kapitole uvažujeme Banach prostory nad tělesem komplexních čísel (kromě oddílu V.2 nebo pokud explicitně není řečeno jinak). Speciálně, pracujeme s komplexními Hilbertovými prostory.

## V.1 Různé typy omezených operátorů na Hilbertových prostorech a jejich vlastnosti

**Připomenutí:** Nechť $H$ a $K$ jsou Hilbertovy prostory.

(1) $L(H,K)$ označuje Banachův prostor všech omezených lineárních operátorů $T : H \to K$ opatřený operátorovou normou. $L(H)$ je zkratka pro $L(H,H)$.

(2) Pro každé $T \in L(H,K)$ existuje právě jeden operátor $T^* \in L(K,H)$, nazývaná **adjungovaný operátor k** $T$ splňující

$$\langle Tx, y\rangle_K = \langle x, T^*y\rangle_H \quad \text{for } x \in H \text{ and } y \in K.$$

(3) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je involuce na $L(H)$, $L(H)$ je pak $C^*$-algebra. Tedy pojmy a výsledky z Kapitoly IV můžeme aplikovat na $L(H)$. To platí mj. pro spektrum, spektrální poloměr, rezolventní množina, rezolventa, holomorfní funkční kalkulus, samoadjungované, normální a unitární prvky a spojitý funkční kalkulus pro normální prvky.

(4) Pro $x, y \in H$ následující platí **polarizační rovnost**:

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right).$$

**Definice.** Nechť $H$ a $K$ jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in L(H,K)$ se nazývá **unitární**, pokud $T^* = T^{-1}$, tj. pokud $T^*T = I_H$ a $TT^* = I_K$.

**Tvrzení 1** (charakterizace unitárních operátorů). *Nechť $H$ a $K$ jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H,K)$. Uvažme následující podmínky:*

(i) *$T$ je unitární.*
(ii) *$T$ je izometrie $H$ na $K$.*
(iii) *$T$ je izometrie $H$ do $K$.*
(iv) *$\langle Tx, Ty\rangle_K = \langle x, y\rangle_H$ for $x, y \in H$.*

*Pak (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Jestliže $T$ je na, jsou všechny podmínky ekvivalentní.*

**Definice.** Nechť $X$ je Banachův prostor, $T \in L(X)$ and $\lambda \in \sigma(T)$.

- Říkáme, že $\lambda$ je **vlastní číslo** $T$, pokud $\lambda I - T$ není prostý, tj. pokud existuje $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, pro které $Tx = \lambda x$ (pak $x$ je **vlastní číslo** příslušné $\lambda$). Množinu vlastních čísel nazýváme **bodové spektrum** $T$ a značíme $\sigma_p(T)$.
- Říkáme, že $\lambda$ je **přibližné vlastní číslo** $T$, pokud existuje posloupnost jednotkových vektorů $(x_n)$, pro kterou platí $(\lambda I - T)x_n \to \boldsymbol{o}$. Množina všech přibližných vlastních čísel se nazývá **přibližné bodové spektrum** $T$ a značí se $\sigma_{ap}(T)$.
- Říkáme, že $\lambda$ patří do **spojitého spektra** $\sigma_c(T)$, pokud $\lambda I - T$ je prostý, má hustý obor hodnot, ale není na.
- Říkáme, že $\lambda$ patří do **zbytkového spektra** $\sigma_r(T)$ (též zvaného **compression spectrum**), pokud $\lambda I - T$ je prostý a jeho obor hodnot není hustý.

**Tvrzení 2** (o podmnožninách spektra). *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak platí:*

(a) *$\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.*
(b) *$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$, právě když $\lambda I - T$ je izomorfismus $X$ do $X$.*
(c) *$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T)$.*
(d) *$\sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$.*
(e) *$\lambda \in \sigma_r(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$, právě když $\lambda I - T$ je izomorfismus $X$ na vlastní uzavřený podprostor $X$.*

**Definice.** Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.

- **Numerický range** $T$ je množina $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \,;\, x \in H, \|x\| = 1\}$.
- **Numerický poloměr** $T$ je definován vzorcem $w(T) = \sup\{|\lambda| \,;\, \lambda \in W(T)\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in H, \|x\| = 1\}$.

**Lemma 3** (polarizační vzorec pro operátor). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pro $x, y \in H$ platí:*

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\,\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\,\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right)$$

**Tvrzení 4** (vlastnosti numerického poloměru). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor.*

(a) *Numerický poloměr $w$ je ekvivalentní norma na $L(H)$ splňující $\frac{1}{2}\|T\| \le w(T) \le \|T\|$ pro $T \in L(H)$.*
(b) *Pokud $T \in L(H)$ a pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx, x\rangle = 0$, pak $T = 0$.*
(c) *Pokud $S, T \in L(H)$ a pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$, pak $S = T$.*
(d) *Pro každé $T \in L(H)$ je $W(T)$ souvislá podmnožina $\mathbb{C}$ .*
(e) *Pro každé $T \in L(H)$ je $\sigma_p(T) \subset W(T)$ a $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*
(f) *Pro každé $T \in L(H)$ je $w(T) \ge r(T)$.*

**Tvrzení 5** (struktura normálních operátorů). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Operátor $T$ je normální, právě když pro každé $x \in H$ platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Je-li $T$ normální, pak platí následující tvrzení:*

(a) $\ker T = \ker T^*$ a $\ker T = (R(T))^\perp$.
(b) *$R(T)$ je hustý, právě když $T$ je prostý. Tedy, $\sigma_r(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.*
(c) *Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in H$, pak $Tx = \lambda x$, právě když $T^*x = \overline{\lambda}x$. Speciálně, $\sigma_p(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma_p(T)\}$.*
(d) *Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$ různá, pak $\ker(\lambda_1 I - T) \perp \ker(\lambda_2 I - T)$.*

**Tvrzení 6** (charakterizace ortogonálních projekcí). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor at $P \in L(H)$ je projekce (tj. $P^2 = P$). Pan následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$P$ je* **ortogonální projekce**, *tj.* $\ker P \perp R(P)$.
(ii) *$P$ je samoadjungovaný.*
(iii) *$P$ je normální.*
(iv) *$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ pro každé $x \in H$.*
(v) *$\langle Px, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.*
(vi) $\|P\| \leq 1$.

*Dále, jsou-li $P, Q \in L(H)$ dvě ortogonální projekce, pak $R(P) \perp R(Q)$, právě když $PQ = 0$. V tomto případě říkáme, že $P$ a $Q$ jsou* **navzájem kolmé (ortogonální)**.

**Tvrzení 7** (spektrum samoadjungovaného operátoru). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.*

(a) *$T$ je samoadjungovaný, právě když $W(T) \subset \mathbb{R}$.*
(b) *Nechť $T$ je samoadjungovaný. Položme $a = \inf W(T)$ a $b = \sup W(T)$. Pak $\sigma(T) \subset [a, b]$, $a, b \in \sigma(T)$, $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$ a $\sigma(T)$ obsahuje aspoň jedno z čísel $\|T\|, -\|T\|$.*
(c) *$W(T) \subset [0, \infty)$, právě když $T$ je samoadjungovaný a $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.*

**Poznámky a definice.**

(1) Operátory splňující dvě ekvivalentní podmínky z Tvrzení 7(c) se nazývají **nezáporné**.
(2) $T^*T$ je nezáporný operátor pro každé $T \in L(H)$.
(3) Pro $T \in L(H)$ definujeme $|T| = \sqrt{T^*T}$ (tj. aplikujeme spojitou funkci $t \mapsto \sqrt{t}$ na nezáporný operátor $T^*T$).
(4) Je-li $T$ normální, výše definovaný operátor $|T|$ splývá s operátorem, který dostaneme aplikací spojité funkce $\lambda \mapsto |\lambda|$ na operátor $T$. Není-li $T$ normální, pak $|T| \neq |T^*|$.
(5) Operátor $U \in L(H)$ se nazývá **částečná izometrie**, pokud existuje uzavřený podprostor $H_1 \subset H$ takový, že $U|_{H_1}$ je izometrie $H_1$ do $H$ a $U|_{H_1^\perp} = 0$.

**Věta 8** (polární rozklad). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak existuje právě jedna částečná izometrie $U \in L(H)$ splňující $T = U|T|$ a $U = 0$ na $R(|T|)^\perp$.*

*Pak $U^*$ je také částečná izometrie a platí $|T| = U^*T$ a $U^* = 0$ na $R(T)^\perp$.*

**Věta 9** (Hilbert-Schmidt). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je kompaktní normální operátor. Pak existuje ortonormální báze $H$ složená z vlastních vektorů $T$. Pokud $T \neq 0$, pak dále existuje ortonormální systém $(x_k)_{k\in N}$ a nenulová komplexní čísla $(\lambda_k)_{k\in N}$, kde buď $N = \mathbb{N}$ nebo $N = \{1, 2, \ldots, m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, splňující*

$$Tx = \sum_{k\in N} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k, \qquad x \in H.$$

**Tvrzení 10.** *Nechť $H$ je nekondečnědimenzionální Hilbertův prostor. Nechť $T \in L(H)$ je kompaktní normální operátor reprezentovaný jako ve Větě 9. Pak $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_k; k \in N\}$. Pokud $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, pak*

$$\tilde{f}(T)x = f(0)x + \sum_{k\in N}(f(\lambda_k) - f(0)) \langle x, x_k\rangle x_k, \qquad x \in H.$$

*Speciálně, $\tilde{f}(T)$ je kompaktní, právě když $f(0) = 0$.*

**Věta 11** (Schmidtova reprezentace kompaktních operátorů). *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je nenulový kompaktní operátor. Pak existují ortonormální systems $(e_k)_{k\in N}$, $(f_k)_{k\in N}$ a kladná čísla $(\alpha_k)_{k\in N}$, kde buď $N = \mathbb{N}$ nebo $N = \{1, 2, \ldots, m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, splňující*

$$Tx = \sum_{k\in N} \alpha_k \langle x, e_k\rangle f_k, \qquad x \in H.$$

**Poznámka:** Jak bylo řečeno na počátku kapitoly, vše uvedené platí pro komplexní prostory. Pro reálné prostory některé z uvedených tvrzení platí ve stejné formě, některé v pozměněné formě a některé vůbec. Podrobněji:

- Adjungovaný operátor lze definovat i v reálném případě zcela stejně. Polarizační identita je v reálném případě jednodušší: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. Tvrzení 1 a Tvrzení 6 platí pro reálné prostory beze změn, s týmž důkazem. Tvrzení 5 platí pro reálné prostory s upravenou formulací.
- Spektrum z principu uvažujeme jen pro komplexní prostory, v reálném případě (i $\lambda$ bychom uvažovali reálné) by mohlo být prázdné. Numerický range a poloměr samozřejmě můžeme definovat i v reálném případě. Ale Lemma 3 v reálném případě neplatí (ani žádná jeho analogie). To souvisí s tím, že body (a)-(c) z Tvrzení 4 ani body (a),(c) z Tvrzení 7 v reálném případě neplatí. Může se totiž stát, že nenulový operátor má nulový numerický poloměr.
- V reálném případě některá tvrzení zůstávají v platnosti alespoň pro samoadjungované operátory (například Tvrzení 7(b) a Věta 9). Více se tomu budeme věnovat později, v závěru kapitoly VI.